

در قلمرو مکانیک

کتاب دوم / استاتیک

تألیف هامفری و توپینگ / ترجمه هوشنگ شریف زاده



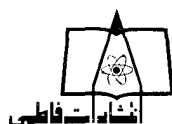
در قلمرو مکانیک

کتاب دوم / استاتیک

تألیف هامفری و توپینگ

ترجمه هوشنگ شریف زاده

چاپ اول شهر یورماه ۱۳۶۶



در قلمرو مکانیک کتاب دوم / استاتیک

A SHORTER INTERMEDIATE MECHANIC

مؤلف: هامفری و تاپینگ **Humphry & Topping**

مترجم: هوشنگ شریف زاده

چاپ سوم: خرداد ماه ۱۳۶۹

تیراژ: ۵۵۰۰ نسخه

چاپ و صحافی: چاپخانه صنوبر

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است

نشانی تهران، خیابان دکتر فاطمی، شماره ۱۵۹

تلفن: ۶۵۱۴۲۲

فهرست مطالب

- ۱۰- استاتيك نقطه مادى ۷
- نیرو-۷ / مبانی استاتيك-۸ / متوازی الاضلاع نیروها-۹ / اجسام صیقلی-۱۲ / کشش
نخ-۱۳ / تجزیه يك نیرو-۱۵ / مثلث نیروها-۲۰ / قضیه لامی-۲۱ / چند ضلعی
نیروها-۳۲ / برابند نیرو-۳۳ / شرایط تعادل يك نقطه مادى-۴۱ / قوانین اصطكاك-۴۵ /
تعادل نقطه مادى بر سطح افقی ناصاف-۴۸ / تعادل نقطه مادى بر سطح شیب دار ناصاف-۵۰.
- ۱۱- استاتيك جسم صلب-نیروهای متوازی-گشاور-زوج ۵۸
- برابند دو نیروی متوازی همسو-۵۸ / برابند دو نیروی متوازی ناهمسو-۶۰ / مرکز
نیروهای متوازی و مرکز ثقل-۶۱ / مرکز ثقل يك میله یکنواخت-۶۳ / مرکز ثقل تیغه
نازکی که به شکل متوازی الاضلاع است-۶۳ / مرکز ثقل تیغه مثلثی شکل نازک-۶۴ /
گشاور يك نیرو-۶۶ / قضیه وارینیون-۶۸ / کاربرد اصل گشاورها-۶۸ / اهرم-۷۹ /
ترازو-۸۰ / پان-۸۴.
- ۱۲- نیروهایی که در يك صفحه اند و بريك جسم صلب وارد می شوند ۹۰
- جسم صلبی که تحت اثر سه نیرو است-۹۰ / جسم صلبی که تحت اثر بیش از سه نیرو
است-۱۰۷ / تبدیل نیروهای هم صفحه به يك نیرو یا يك زوج-۱۰۸ / شرایط تعادل-۱۰۹ /
میله های مفصل دار-۱۲۲ / مثالهای بیشتری درباره نیروهای هم صفحه-۱۳۹ / ترکیب
زوجها-۱۵۵ / تبدیل نیروهای هم صفحه به يك نیرو و يك زوج-۱۶۳ / راستای
برابند-۱۶۵ / صورتهای دیگر شرایط تعادل-۱۶۶ / گشاور يك نیرو نسبت به يك
محور-۱۷۶ / کاری که به كمك يك زوج انجام می گیرد-۱۷۸.

۱۳- ترسیمات نموداری

۱۸۹

نیرو و چند ضلعیهای رابط- ۱۸۹ / نشانه گذاری بوو- ۱۹۲ / نیروهای متوازی- ۱۹۲ /
دار بستهها- ۲۰۰.

۱۴- اصطكاك

۲۲۱

تعدادل يك جسم صلب- ۲۲۲ / شرایط برای لغزش یا کج شدن- ۲۳۷ / تعادل اجسام
مفصل دار- ۲۴۱.

۱۵- ماشینها

۲۵۳

مزیت مکانیکی- نسبت سرعتها- ۲۵۴ / بازده- ۲۵۵ / دستگاههای قرقرهها- ۲۵۷ / قرقره
دیفرانسیل و ستون- ۲۶۶ / چرخ و محور- ۲۶۷ / کشش اضافی- ۲۷۰ / پیچ- ۲۷۱ /
پیچ دیفرانسیل- ۲۷۲.

۱۶- مرکز ثقل

۲۷۷

سه میله که تشکیل يك مثلث می دهند- ۲۷۷ / چهار وجهی- ۲۷۸ / هرم چندوجهی و
مخروط توپر- ۲۷۹ / سطح جانبی مخروط مدور قائم- ۲۸۰ / مرکز ثقل چند نقطه
مادی- ۲۸۱ / مرکز ثقل يك جسم مرکب- ۲۸۴ / تیغه چهار ضلعی- ۲۹۸ / پایداری
تعادل- ۳۰۳ / قوس مدور یکنواخت- ۳۱۲ / مرکز ثقل قطاع دایره- ۳۱۳ / مرکز ثقل
يك قطعه از دایره- ۳۱۵ / مرکز ثقل نیمکره توپر یکنواخت- ۳۱۶ / مرکز ثقل نیمکره
توخالی نازک- ۳۱۷.

۱۷- بردارها

۳۳۴

جمع و تفریق بردارها- ۳۳۵ / مؤلفه های بردار- ۳۴۲ / معادله برداری يك خط- ۳۴۶ /
بردارهای سطحی- ۳۵۰.

پاسخها

۳۵۸

۳۷۸

فهرست موضوعی

استاتيك نقطه مادی

۱۰۱۰. اکنون بخشی از مکانیک را در نظر می گیریم که استاتیک نامیده می شود و به جامداتی مربوط است که تحت اثر نیرو به حال سکون هستند. باز هم در شروع این بخش فرض خواهیم کرد که ابعاد جسم جامد ناچیز است. نیز، مانند گذشته، چنین جسمی را نقطه مادی می نامیم و آن را به صورت يك نقطه نمایش می دهیم.

۲۰۱۰. نیرو

در بخش ۳، نیرو را چنین تعریف کردیم: هر علتی که حالت سکون یا حالت حرکت یکنواخت مستقیم الخط جسم را تغییر بدهد یا مایل به تغییر دادن آن باشد، نیروست. نیرو، جسم را به شتاب وامی دارد، و فقط اگر بر جسم برآیند نیرویی اثر نکند، جسم به سکون خود نسبت به يك دستگاه مقایسه ای، یا به حرکت خود با تندی یکنواخت ادامه می دهد. در استاتیک به بررسی رابطه هایی می پردازیم که هنگامی که برآیند نیرو برابر صفر است باید میان نیروها برقرار باشد.

۳۰۱۰. برای آنکه، نیرویی را که بر يك نقطه مادی وارد می شود، به طور کامل مشخص کنیم، به این اطلاعات نیازمندیم: (۱) بزرگی نیرو، (۲) جهت نیرو در فضا. در مورد يك جسم صلب، نقطه اثر نیرو نیز باید مشخص شود.

بزرگی نیرو را می توان به كمك اثر آن اندازه گیری کرد. اندازه گیری آن در دینامیک معمولاً از روی حرکتی که در يك جسم معین در مدتی معین ایجاد می کند، یا به طور دقیقتر از روی شتابی که در هر لحظه در جسم تولید می کند انجام می گیرد، چنانکه نیوتون (N)، واحد نیرو، به عنوان نیرویی تعریف می شود که در جرم يك کیلو گرم شتابی برابر 1 m/s^2 تولید می کند.

نیز می‌توانیم نیرو را به وسیلهٔ وزنی که تحمل می‌کند اندازه بگیریم. در این صورت اندازهٔ آن بستگی به نیروی جاذبه در محلی دارد که آن نیرو در آنجا اندازه‌گیری شده است. چنین واحدی در نقاط مختلف زمین دارای اندازه‌های مختلف است، زیرا نیروی گرانشی زمین در نقاط مختلف تفاوت می‌کند.

با وجود این، در استاتیک، عموماً فقط با اندازه‌های نسبی نیروها در یک نقطه سروکار داریم. بنابراین می‌توانیم از هر واحد نیرویی که استفاده از آن مناسبتر باشد استفاده کنیم، زیرا نسبت‌های نیروها که همه بر حسب هر واحد انتخاب شده‌ای بیان شده باشند از یک جابه‌جای دیگر تغییر نخواهند کرد.

۴.۱۰. بردارها

یک نیروی معین را می‌توانیم به طور کامل با یک خط راست AB نمایش دهیم. زیرا یک سر آن، A ، می‌تواند نقطهٔ اثر نیرو را نشان دهد. جهت خط در فضا، می‌تواند جهت نیرو را نمایش دهد، و طول خط می‌تواند بزرگی نیرو را در یک مقیاس مناسب نشان دهد. هر کمیتی که مانند نیرو، شامل بزرگی و جهت باشد، بردار نامیده می‌شود.

مثالهای دیگری از بردار که در دینامیک با آنها سروکار داشتیم عبارت بودند از تندى، مقدار حرکت، و شتاب، و همهٔ آنها را می‌توان به طور کامل با خطوط راست نمایش داد.

هنگامی که نیرویی را با خط AB نمایش می‌دهیم، برای آنکه کاملاً روشن شود که نیرو از A به سوی B وارد شده است، می‌توانیم پیکانی بر روی حروف بگذاریم و بنویسیم $\overrightarrow{AB}$. اما در بسیاری از حالتها، کاملاً روشن است که جهت نیرو بر حسب ترتیب الفبایی و از چپ به راست است؛ مثلاً AB نمایش نیرویی است که از A به سوی B وارد شده است و BA نیرویی است که از B به سوی A وارد شده است.

قانون اساسی که دربارهٔ همهٔ بردارها صدق می‌کند قانون جمع بردارهاست. بر طبق این قانون، مجموع هر دو کمیت برداری هم‌منوع که به وسیلهٔ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ نمایش داده شده‌اند برداری است که به وسیلهٔ $\overrightarrow{AC}$ نمایش داده می‌شود.

اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ معلوم باشند، $\overrightarrow{AC}$ را می‌توان با رسم مثلث ABC پیدا کرد.

۵.۱۰. مبانی استاتیک

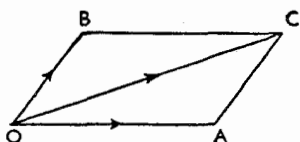
علم مکانیک را با چند قانون یا فرض مسلم که مبتنی یا متکی بر تجربه و مشاهده است آغاز می‌کنیم.

اما استاتیک درواقع حالتی خاص از دینامیک است که در آن اجسام نسبت به دستگاه مقایسه‌ای معینی ساکن هستند. اگر حالتی کلی‌تر، یعنی حالتی که اجسام در حال حرکت هستند، را در نظر بگیریم و قوانینی را انتخاب کنیم که مربوط به اثر نیروها بر این اجسام است (دینامیک)، این قوانین در حالت خاص که اجسام به حال سکون هستند نیز صدق می‌کند (استاتیک). البته ممکن است استاتیک را بر مبنای قوانینی پایه‌گذاری کرد که مستقل از تصور حرکت باشند. درواقع، از نظر تاریخی، علم استاتیک پیش از علم دینامیک بسط و گسترش یافته است. برای دینامیک، مجبور بودیم که تا قرن هفدهم صبر کنیم. در این قرن مبنای دینامیک به وسیله گالیله و نیوتون گذاشته شد، و حال آنکه مبنای استاتیک را حداقل یونانیان باستان می‌دانستند و پایه‌گذاری آن به قبل از دوهزار سال پیش برمی‌گردد. گرچه ارسطو (۳۸۴-۳۲۲ ق.م) سهمی در مکانیک دارد، اما کسی که اصل اهرم را بسط داد و سهم مؤثری در علم استاتیک (بند ۱۱-۱۷ را ببینید) دارد ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق.م) است.

اکنون می‌توانیم به عنوان نقطه شروع استاتیک، قضیه‌ای اساسی را، که به متوازی الاضلاع نیروها موسوم است، در نظر بگیریم. این قضیه، فقط بیان می‌کند که قانون جمع بردارها درباره نیروها درست است، اما می‌توان آن را از قوانین اساسی دینامیک، که به قوانین نیوتون در باره حرکت موسوم است نتیجه گرفت. این قوانین در بخش ۳ توضیح داده شده‌اند. بنابراین دینامیک و استاتیک محتوی یک علم هستند که مبتنی بر مجموعه‌ای از فرضهای مسلم اساسی است.

۶.۱۰. متوازی الاضلاع نیروها

اگر دو نیرو، در نقطه O بر یک نقطه مادی وارد شوند، و از نظر بزرگی و جهت با دو خط داشت OA و OB که از نقطه O رسم می‌شوند نمایش داده شوند، برابر نیرویی تنها خواهند بود که از نظر بزرگی و جهت با قطر OC متوازی الاضلاع $OACB$ نمایش داده می‌شود.



شکل ۱۰-۱

این قضیه اساسی استاتیک است و می‌توان آن را با آزمایش تحقیق کرد و این درست مانند هر قانون علمی دیگر، تحقیق مقدماتی آن است. $\vec{OC}$ مجموع بردارهای $\vec{OA}$ و

$\vec{OB}$ است، بنابراین، این قضیه به طور ساده بیان می‌کند که نیروها مانند بردارها، با هم جمع شده‌اند (یا ترکیب شده‌اند).

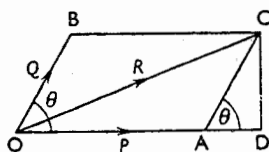
این نیرویی که با OC نمایش داده می‌شود به برآیند دو نیرویی که با OA و OB نمایش داده شده‌اند موسوم است. بر عکس، نیروهایی که با OA و OB نمایش داده شده‌اند مؤلفه‌های نیرویی هستند که با OC نمایش داده شده‌است.

در حالت ساده، هنگامی که نیروها هم‌جهت هستند، برآیند آنها، به طور بدیهی برابر مجموع آنهاست و وقتی که نیروها در جهتهای مختلف اثر می‌کنند، برآیند آنها برابر تفاوت آنهاست و در جهت نیروی بزرگتر وارد می‌شود. برآیند فقط هنگامی صفر است که بزرگیهای دو نیرو برابر و جهتهای دو نیرو مخالف یکدیگر باشند.

بزرگی و جهت برآیند هر دو نیرویی را که بر O وارد شوند، می‌توان با رسم متوازی‌الاضلاع $OACB$ ، که با مقیاس مناسبی رسم می‌شود، یا با محاسبه‌ای که اکنون بیان می‌شود، پیدا کرد.

۷۰۹۰. فرض می‌کنیم دو نیروی P و Q که بر O وارد می‌شوند با OA و OB (شکل ۲۰۱۰) نمایش داده شوند. برآیند آنها، R ، به وسیله قطر OC ، متوازی‌الاضلاع $OACB$ نمایش داده می‌شود.

فرض می‌کنیم θ زاویه میان جهتهای P و Q باشد، یعنی $\angle AOB = \theta$. خط CD را عمود بر OA رسم می‌کنیم و اگر لازم باشد OA را امتداد می‌دهیم.



شکل ۲۰۱۰

$$OC^2 = OD^2 + DC^2 \quad \text{در این صورت}$$

$$= (OA + AD)^2 + DC^2$$

$$= (OA + AC \cos \theta)^2 + (AC \sin \theta)^2$$

$$\therefore R^2 = (P + Q \cos \theta)^2 + (Q \sin \theta)^2$$

$$= P^2 + Q^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2PQ \cos \theta$$

$$= P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta$$

$$R = +\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$$

بنابراین
برای پیدا کردن جهت OC می توان نوشت:

$$\operatorname{tg} \operatorname{COD} = \frac{CD}{OD} = \frac{AC \sin \theta}{OA + AC \cos \theta} = \frac{Q \sin \theta}{P + Q \cos \theta}$$

اگر نیروها عمود بر یکدیگر باشند، $\theta = 90^\circ$ است و بنابراین

$$\operatorname{tg} \operatorname{COD} = \frac{Q}{P} \text{ و } R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

اگر نیروها برابر یکدیگر باشند، مثلاً هر دو برابر P باشند، در این صورت

$$R = \sqrt{P^2(1 + 1 + 2 \cos \theta)} = P\sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

$$= P \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2P \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{COA} = \frac{P \sin \theta}{P + P \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

نیز

$$= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

پس در این حالت، برابند، زاویه میان دو نیرو را نصف می کند. این را می توان از این واقعیت نیز نتیجه گرفت که وقتی که دو نیرو با هم برابرند، متوازی الاضلاع نیروها به یک لوزی تبدیل می شود.

۸.۹۰. مثال ۱: اگر برابند نیروهای $3P$ و $5P$ برابر $7P$ باشد، زاویه میان نیروها را تعیین کنید.

حل: اگر زاویه میان نیروهای $3P$ و $5P$ برابر θ باشد و برابند دو نیرو برابر R باشد،

$$R^2 = 9P^2 + 25P^2 + 30P^2 \cos \theta$$

$$34P^2 + 30P^2 \cos \theta = 49P^2 \quad \text{چون } R = 7P \text{ است،}$$

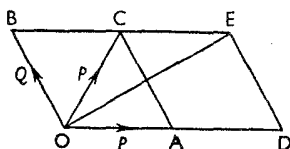
$$\therefore 30P^2 \cos \theta = 15P^2$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

مثال ۲: اگر زاویه میان دویروی P و Q به اندازه‌ای باشد که $R = P$ باشد، نشان دهید که اگر P دوبرابر شود، برابند جدید بر Q عمود خواهد بود.

حل: فرض می‌کنیم OA و OB (شکل ۱۰-۳) نمایش‌دهنده P و Q باشند. در این صورت قطر OC متوازی الاضلاع $OACB$ ، که نمایش‌دهنده R است، برابر OA است.



شکل ۱۰-۳

OA را تا D امتداد می‌دهیم به طوری که $AD = OA$ شود. در این صورت OD نمایش‌دهنده $2P$ است و برابند Q و $2P$ به وسیله قطر OE متوازی الاضلاع $ODEB$ نمایش داده می‌شود.

$$BC = OA = P \quad \text{اما}$$

$$CE = AD = P \quad \text{و}$$

$$\therefore CB = CE = CO$$

بنابراین BE قطر دایره‌ای خواهد بود که مرکز آن C است و از O عبور می‌کند،

$$\therefore \angle BOE = \text{زاویه قائمه}$$

$$\angle CEO = \angle COE \quad \text{یا چون } CE = CO \text{ است،}$$

$$\angle CBO = \angle COB \quad \text{و چون } CB = CO \text{ است،}$$

$$\therefore \angle CEO + \angle CBO = \angle BOE$$

$$\therefore \angle BOE = \text{زاویه قائمه}$$

۹.۱۰. اجسام صیقلی

هیچ جسمی به طور کامل صیقلی نیست. عملاً وقتی که جسمی از روی جسم دیگر می‌گذرد، همیشه در امتداد سطح مشترک آنها نیرویی وجود دارد که مایل است از لغزش جسم روی جسم دیگر جلوگیری کند. این نیرو را اصطکاک می‌نامند.

وقتی که سطحهای تماس دو جسم فوق العاده صیقلی شده باشد، چنین نیرویی بسیار کوچک خواهد بود و در بسیاری از مسائل، این اجسام را به طور کامل صیقلی فرض می کنند. در چنین حالتی، تنها نیروی میان اجسام عمود بر سطح مشترک آنهاست. این نیرو را عکس العمل قائم می نامند.

جهت عکس العمل قائم که بر یک جسم صیقلی، که با جسم یا سطح دیگری در تماس است، وارد می شود، همیشه عمود بر جهتی است که جسم در آن جهت قادر به حرکت است. وقتی که میله ای در یک صفحه صیقلی قرار دارد، عکس العمل، عمود بر صفحه است. وقتی که میله ای به وسیله یک میخ صیقلی نگاهداری شده است، عکس العمل، عمود بر میله است.

وقتی که انتهای یک میله بر سطح منحنی یک کره صیقلی یا بر یک قوس مدور صیقلی قرار دارد، عکس العمل، عمود بر کره یا دایره است و بنابراین از مرکز آن می گذرد. به این حالتها که غالباً پیش می آید باید مخصوصاً توجه شود.

۱۰.۱۰. کشش نخ

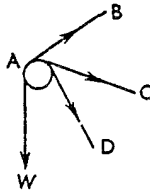
وقتی که از نخ برای آویزان کردن یک وزنه یا حرکت دادن یک وزنه استفاده می شود، نخ در حالت کشش است.

اگر نخ را در نظر بگیریم که وزن آن ناچیز باشد و جسمی به وزن W به طور قائم به آن آویزان شود، کشش نخ تقریباً در سراسر طول نخ یکسان خواهد بود و می توان آن را برابر W دانست. اما اگر نخ، سنگین باشد، کشش نخ از یک نقطه به نقطه دیگر تفاوت می کند. اگر نخ ساکن باشد، کشش در هر نقطه A برابر وزن W به علاوه وزن قسمتی از نخ خواهد بود که در زیر A است. اگر وزن نخ قابل صرف نظر کردن باشد به آن، نخ سبک اطلاق می کنیم.

اگر نخ را که به آن وزنه ای آویزان است از حول قرقره کوچک صیقلی مانند A بگذرد (شکل ۱۰-۴)، نیروی لازم برای نگاهداری وزنه تغییر نمی کند، و چه نخ به وضع AB ، AC یا AD باشد تفاوتی نمی کند. البته اگر قرقره ناصاف باشد، این مطلب درست نیست.

باید به یاد داشته باشیم که کشش نخ سبک که از حول میخ یا قرقره ای صاف می گذرد در سراسر طول آن یکسان است.

غالباً فرض می کنیم که نخ، انعطاف ناپذیر است، اما چند مسئله را که در آن نخ، کشسان است و قانون هوک درباره آن صدق می کند نیز مورد توجه قرار خواهیم

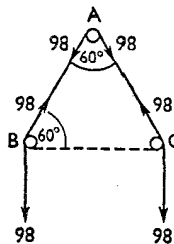


شکل ۱۰-۴

داد. در حالت اخیر، کشش نخ با افزایش طول نخ تغییر می‌کند^۱.

۱۱.۱۰. مثال: دو وزنه متساوی، هر یک به جرم 10 kg به دو انتهای نخ نازکی بسته شده‌اند و نخ از دایره میخ صیقلی می‌گذرد. این سه میخ در دیوار به شکل یک مثلث متساوی‌الاضلاع کوبیده شده‌اند که یکی از اضلاع آن افقی است. نیرویی که بر هر میخ فشار می‌آورد چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم A، B و C جای میخها باشند (شکل ۱۰-۵).



شکل ۱۰-۵

چون میخها صیقلی هستند، کشش در سرتاسر نخ یکسان و برابر $98\text{ N} = 10\text{ g}$ است.

نیرویی که بر A فشار می‌آورد برابر دو کشش است که هر یک برابر 98 N

است و با هم زاویه 60° می‌سازند. اگر بزرگی این برابری R نیوتون باشد،

$$R^2 = 98^2 + 98^2 + 2 \times 98^2 \cos 60^\circ = 3 \times 98^2$$

$$\therefore R = 98\sqrt{3} = 170$$

نیروی که بر B یا C فشار می‌آورد برابری دو کشش 98 N است که با هم زاویه 150° می‌سازند. اگر بزرگی این برابری S نیوتون باشد،

$$S^2 = 98^2 + 98^2 + 2 \times 98^2 \cos 150^\circ$$

$$= 98^2(2 - \sqrt{3})$$

$$= 98^2 \times 0.268$$

$$\therefore S = 98 \times 0.518$$

$$= 50.8$$

چون مؤلفه‌های نیروها در هر حالت برابری، جهت‌های نیروهای فشاری، نیمساز زاویه‌های میان دو قطعه نخ در طرفین هر میخ است.

۱۲.۱۰. تجزیه یک نیرو

یک نیرو را ممکن است به راه‌های بسیار به دو مؤلفه تجزیه کرد، زیرا با یک خط می‌توان، بسیاری متوازی‌الاضلاع ساخت که آن خط قطر آن متوازی‌الاضلاع باشد. در عمل، جهت‌های مؤلفه‌ها معلومند و مهمترین حالت هنگامی است که این جهت‌ها بر یکدیگر عمودند.

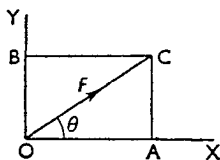
فرض می‌کنیم OC (شکل ۱۰-۶) نمایش‌دهنده نیروی F باشد، و فرض می‌کنیم که می‌خواهیم آن را به دو مؤلفه، یکی در امتداد OX و دیگری در امتداد عمود بر آن یعنی OY ، تجزیه کنیم.

CA را عمود بر OX و CB را عمود بر OY رسم می‌کنیم.

در این صورت OA و OB به ترتیب مؤلفه‌های F در امتدادهای OX و OY هستند.

اگر زاویه COX برابر θ باشد، خواهیم داشت:

$$OA = F \cos \theta \quad \text{و} \quad OB = F \sin \theta$$



پس نیروی F برابر مجموع دو نیروی $F \cos \theta$ و $F \sin \theta$ است که اولی در امتداد خطی وارد می شود که با جهت F زاویه θ می سازد و دیگری عمود بر جهت مؤلفه نخست وارد می شود.

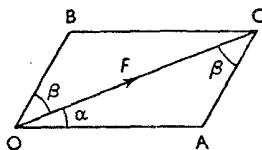
وقتی که نیرویی با این شیوه به دو نیروی عمود برهم تجزیه می شود، آن دو نیرو را گاهی اجزای تفکیکی نیروی اصلی در این دو جهت می نامند.

جزء تفکیکی نیروی F در جهتی که با آن زاویه θ می سازد $F \cos \theta$ است. اصطلاح «مؤلفه افقی» نیرو که گاهی به کار برده می شود، می بایستی به معنی جزء تفکیکی نیرو در جهت افقی به کار گرفته شود. در نتیجه چنین درک می شود که مؤلفه دیگر، مؤلفه قائم است.

عموماً هنگامی که اصطلاح مؤلفه (نه اصطلاح جزء تفکیکی) را به کار می بریم، منظور ما - جز در موردی که خلاف آن را بیان کرده باشیم - دو نیروی (یا دو بردار) عمود برهم است.

۱۳.۱۰. اگر بخواهیم مؤلفه های F با آن زاویه های α و β بسازند، آنها را می توان به طریق زیر تعیین کرد:

فرض می کنیم OC (شکل ۱۰-۷) نشان دهنده F باشد. OA و OB را طوری رسم می کنیم که با OC زاویه های α و β بسازند، و از C خطهایی موازی با آنها رسم می کنیم تا متوازی الاضلاع $OACB$ کامل شود.



شکل ۱۰-۷

در این صورت OA و OB ، یا OA و AC نمایش دهنده مؤلفه های مطلوب هستند. از مثلث OAC :

$$\frac{OA}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin(\alpha + \beta)}$$

∴

$$OA = \frac{F \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$OB = \frac{F \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

و به همین ترتیب،

- ۱- درحالت‌های زیر P و Q معرف دونیرو و θ زاویه میان آنها و R برآیند آنهاست.
 - الف) اگر $P = 9$ ، $Q = 12$ ، $\theta = 90^\circ$ باشد، R را پیدا کنید.
 - ب) اگر $R = 13$ ، $Q = 5$ ، $\theta = 90^\circ$ باشد، P را پیدا کنید.
 - پ) اگر $P = 7$ ، $Q = 8$ ، $\theta = 60^\circ$ باشد، R را پیدا کنید.
 - ت) اگر $P = 10$ ، $Q = 10$ ، $\theta = 120^\circ$ باشد، R را پیدا کنید.
 - ث) اگر $P = 12$ ، $Q = 5$ ، $R = 11$ باشد، θ را پیدا کنید.
 - ج) اگر $P = 3$ ، $Q = 5$ ، $\theta = \text{Arcsin} \frac{3}{5}$ باشد، R را پیدا کنید.
- ۲- ثابت کنید که برآیند دونیرو که هریک مساوی P است و با هم زاویه 120° می‌سازند برابر P است.
- ۳- زاویه میان دونیرو را که هریک برابر P است درحالت‌های زیر پیدا کنید:
 - الف) برآیند آنها برابر با P است؛
 - ب) برآیند آنها برابر با $P\sqrt{3}$ است.
- ۴- بزرگی برآیند دونیروی P و Q برابر است با P و نیز بزرگی برآیند دونیروی $2P$ و Q (که در همان جهت‌های قبلی اثر می‌کند) برابر است با P . بزرگی Q را پیدا کنید و ثابت کنید که Q با P زاویه 150° می‌سازد.
- ۵- مجموع بزرگی دونیرو برابر 24 N است و برآیند آنها، که بر نیروی کوچکتر عمود است، برابر است با 12 N . بزرگی دونیرو و زاویه میان آنها را به دست آورید.
- ۶- دو وزنه که جرم هریک 10 kg است به دوسرنخ سبکی متصل هستند. این نخ از روی سه میخ که به دیوار کوبیده شده‌اند می‌گذرد. میخ‌ها طوری به دیوار کوبیده شده‌اند که شکل مثلث متساوی‌الساقینی را متجسم می‌کنند که قاعده آن افقی و زاویه روبه‌رو به قاعده آن 120° است. تعیین کنید که بر میخ‌ها چه نیرویی فشار می‌آورد.
- ۷- دو میخ صاف به دیواری کوبیده شده‌اند. یکی از میخ‌ها بالاتر و دیگری پایین‌تر است، به طوری که خطی که جای آنها را به هم وصل می‌کند با امتداد افقی زاویه 30° می‌سازد. نخ سبک از روی آنها عبور کرده است و به هریک از دوسرنخ وزنه‌ای 5 kg آویزان است. نیروهایی را که بر هر میخ فشار وارد می‌آورد تعیین کنید.
- ۸- زاویه میان دونیروی 5 N و 12 N چقدر باشد تا برآیند آنها نیرویی برابر 15 N باشد؟
- ۹- A و B دو نقطه ثابت از محیط دایره ABC هستند. P نقطه‌ای است که بر قوس ACB حرکت می‌کند. نیروهایی با بزرگی ثابت در امتداد‌های PA و PB وارد می‌شوند.

ثابت کنید که امتداد بر ایند آنها از نقطه‌ای ثابت می‌گذرد.

۱۰- بر ایند د نیروی P و $2P$ که بر یک نقطه اثر می‌کنند برابر است با P . زاویه میان P و $2P$ را پیدا کنید.

۱۱- بر ایند نیروهای $3N$ و $5N$ بر نیروی کوچکتر عمود است. بزرگی بر ایند و زاویه میان نیروها را تعیین کنید.

۱۲- زاویه میان نیروهای $4N$ و $6N$ برابر 60° است. بر ایند این دو نیرو را از راه رسم به دست آورید و درستی پاسخ به دست آمده را از راه محاسبه تحقیق کنید.

۱۳- به طریق ترسیم، بر ایند نیروهای $5N$ و $6N$ را که با هم زاویه 40° می‌سازند، تعیین کنید.

۱۴- بر ایند دو نیرو، برابر $8N$ است و جهتش با جهت یکی از دو نیرو که بزرگی آن $4N$ است، زاویه 60° می‌سازد. به طریق ترسیم، بزرگی و جهت نیروی دیگر را تعیین کنید.

۱۵- وقتی که دو نیرو، که بزرگی آنها با هم برابر است، با هم زاویه 2α بسازند، بر ایندشان دو برابر بزرگتر از هنگامی است که زاویه میان آن دو نیرو برابر 2β باشد.

$$\text{ثابت کنید که} \quad \cos \alpha = 2 \cos \beta$$

۱۶- نیرویی برابر $25N$ با افق زاویه θ° می‌سازد. اگر مؤلفه قائم آن برابر $15N$ باشد، مؤلفه افقی آن و مقدار θ را تعیین کنید.

۱۷- نیروی $10N$ را به دو مؤلفه عمود بر هم، طوری تجزیه کنید که (الف) مؤلفه‌ها با هم برابر باشند، (ب) یکی از مؤلفه‌ها سه برابر دیگری باشد.

۱۸- نیروی P نیوتون به دو مؤلفه طوری تجزیه شده است که بزرگی هر یک $2P$ نیوتون است. جهت‌های این دو مؤلفه را تعیین کنید.

۱۹- یکی از مؤلفه‌های نیروی $12N$ برابر $4N$ است و با آن زاویه 30° می‌سازد. بزرگی و جهت نیروی دیگر را تعیین کنید.

۲۰- برای کشاندن یک ماشین چمن زنی، به جرم 60 kg در امتداد افقی، شخصی نیرویی برابر $500N$ طوری اعمال می‌کند که با امتداد زمین زاویه 45° می‌سازد. پیدا کنید: (الف) نیرویی که بر ماشین چمن زنی در امتداد حرکت وارد می‌شود؛ (ب) عکس العمل قائم میان ماشین چمن زنی و سبزه‌ها را.

۲۱- جسمی به جرم 25 kg به وسیله دونه نگاهداری شده است. یکی از نخ‌ها با امتداد قائم زاویه 60° و دیگری با امتداد قائم زاویه 20° می‌سازد. کشش را در هر نخ تعیین کنید و درستی نتیجه‌های خود را به کمک ترسیم هندسی تحقیق کنید.

۱۴.۱۰. نقطه مادی که تحت اثر نیرو است

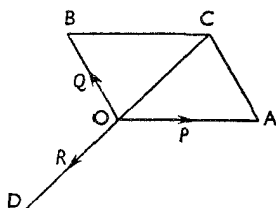
در دینامیک، نشان دادیم که اگر نقطه‌ای مادی تحت اثر یک نیروی F قرار گیرد، در جهت نیروی F با شتاب a ، که از رابطه $F = ma$ به دست می‌آید، حرکت خواهد کرد. در این رابطه m جرم نقطه مادی است. همچنین اگر نقطه مادی تحت اثر دو نیروی P و Q قرار گیرد، در جهت براینده P و Q حرکت خواهد کرد. براینده فقط هنگامی صفر است که P و Q از نظر بزرگی با هم برابر و از نظر جهت، مخالف یکدیگر باشند. در این حالت، نقطه مادی به حال سکون می‌ماند (یا اگر در حال حرکت باشد، به حرکت خود با تندی یکنواخت ادامه می‌دهد). مثلاً اگر وزنه W از یک نقطه ثابت به وسیله نخ آویزان باشد، تحت اثر دویرو به حال سکون باقی می‌ماند؛ یکی از آن دویرو، وزن W در امتداد قائم و به طرف پایین است و دیگری نیروی T در امتداد قائم و به طرف بالاست که به سبب وجود نخ تولید شده است و برابر کشش نخ است. در این حالت $T = W$.

۱۵.۱۰. سه نیرو که بر یک نقطه مادی وارد می‌شوند

فرض می‌کنیم که P ، Q ، R (شکل ۱۰-۸) سه نیرو باشند که در O بر یک نقطه مادی وارد می‌شوند.

اگر از میان آنها دویرو، مثلاً P و Q ، به وسیله خطهای OA و OB نمایش داده شوند، براینده آنها به وسیله قطر OC متوازی الاضلاع $OACB$ نمایش داده می‌شود. پس اگر R بتواند از نظر بزرگی و امتداد به وسیله CO نمایش داده شود، در این صورت با براینده P و Q متعادل خواهد شد و سه نیروی P ، Q و R به حال تعادل در خواهند آمد. پس اگر سه نیروی P ، Q و R بتوانند از نظر جهت و بزرگی به وسیله OA ، AC و CO نمایش داده شوند، در حال تعادل خواهند بود.

(باید به یاد داشت که AC از نظر بزرگی و جهت نمایش دهنده Q خواهد بود ولی نه از نظر خط اثر).



این نتیجه به مثلث نیروها موسوم است که ممکن است به صورت زیر بیان شود:

اگر سه نیرو که بزرگ نقطه اثر می کنند بتوانند از نظر بزرگی و جهت به ترتیب به وسیله اضلاع يك مثلث نمایش داده شوند، نیروها به حال تعادل خواهند بود.

عکس این مطلب نیز درست است.

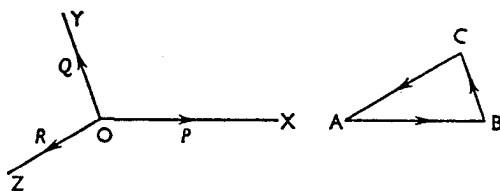
اگر سه نیرو که بزرگ نقطه اثر می کنند به حال تعادل باشند، آنها را می توان از نظر بزرگی و جهت به ترتیب به وسیله سه ضلع يك مثلث نمایش داد.

این را می توان به طور تجربی تحقیق کرد.

۱۶-۱۰. دوش ترسیمی

عکس مثلث نیروها به ما امکان می دهد که راه حل های ترسیمی ساده ای برای مسائل تعادل سه نیرو به دست بیاوریم.

فرض می کنیم که می دانیم سه نیروی P ، Q و R ، که بر نقطه O درجهت های معلوم OX ، OY و OZ (شکل ۹-۱۰) وارد می شوند، در حال تعادلند. در این صورت، اگر بزرگی یکی از این سه نیرو، مثلاً P ، را بدانیم، می توانیم بزرگی و جهت هر یک از دو نیروی دیگر را از راه زیر به دست آوریم.



شکل ۹-۱۰

چون نیروها در حال تعادلند، می توانیم آنها را از نظر بزرگی و جهت به ترتیب به وسیله اضلاع يك مثلث نمایش دهیم.

AB را به موازات OX رسم می کنیم و طول آن را طوری انتخاب می کنیم که در مقیاس مناسبی معرف بزرگی P باشد.

از A خط AC را به موازات OZ و از B خط BC را به موازات OY رسم می کنیم. چون AB نشان دهنده P است، دو ضلع دیگر مثلث ABC باید معرف Q و R باشند. BC و CA در همان مقیاسی که AB معرف P است، به ترتیب معرف Q و R هستند.

ترتیب حروف، در هر حالت، نشان دهنده جهت نیرو است و این ترتیب، اگر به دور مثلث در یک جهت بچرخیم، به دست می آید.

۱۷۰۱۰. در شکل ۹-۱۰ دیدیم که CA معرف نیروی R است که با برآیند دو نیروی P و Q در حال تعادل است. پس AC باید از نظر جهت و بزرگی معرف برآیند P و Q باشد. بنابراین بزرگی و جهت برآیند P و Q را می توانیم از مثلث ABC و بدون استفاده از متوازی الاضلاع نیروها به دست آوریم.

اگر دو نیرو که بر نقطه ای وارد می شوند، از نظر بزرگی و جهت به وسیله اضلاع AB و BC مثلث ABC نمایش داده شوند، AC ، ضلع سوم، از نظر بزرگی و جهت معرف برآیند آن دو نیرو خواهد بود.

با علامتهای برداری $\vec{AC}$ جمع برداری $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ است، یعنی

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$$

یا

باید به خوبی درک کرد که AC معرف مکان برآیند نخواهد بود؛ زیرا نقطه اثر آن نقطه اثر نیروهایی خواهد بود که با AB و BC نمایش داده می شوند.

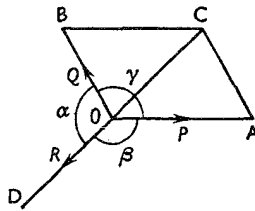
اگر AB و BC واقعاً خطوط اثر نیروها باشند برآیند آنها در B اثر خواهد کرد اما برابر و موازی با AC خواهد بود.

۱۸۰۱۰. عکس مثلث نیروها را می توان به شکل مثلثاتی نیز ارائه کرد، که غالباً به قضیه لامی معروف است.

اگر سه نیرو که بر یک نقطه اثر می کنند به حال تعادل باشند، هر یک از آن سه نیرو متناسب با سینوس زاویه میان دو نیروی دیگر است.

فرض می کنیم P, Q, R (شکل ۱۰-۱۰) معرف سه نیرویی باشند که بر O وارد می شوند. فرض می کنیم OA معرف P ، و OB معرف Q باشد. در این صورت CO از نظر بزرگی و جهت معرف R خواهد بود.

فرض می کنیم α, β, γ به ترتیب زاویه های میان Q و R ، R و P ، P و Q باشند. در مثلث OAC خواهیم داشت:



شکل ۱۰-۱۰

$$\angle ACO = \angle BOC = 180^\circ - \alpha \quad \therefore \quad \sin ACO = \sin \alpha$$

$$\angle COA = 180^\circ - \beta \quad \therefore \quad \sin COA = \sin \beta$$

$$\angle CAO = 180^\circ - \gamma \quad \therefore \quad \sin OAC = \sin \gamma$$

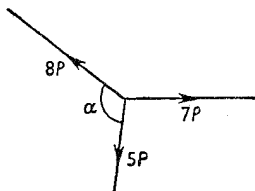
$$\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin COA} = \frac{CO}{\sin OAC}$$

نیز

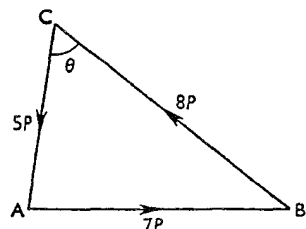
$$\therefore \quad \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$$

۱۹.۱۰. مثال ۱: نیروهای برابر $7P$ ، $8P$ و $5P$ که بر یک نقطه مادی وارد می‌شوند به‌حال تعادلند. به طریقه ترسیم و محاسبه، زاویه بین نیروهای $8P$ و $5P$ را پیدا کنید.

حل: چون نیروها در حال تعادلند، آنها را می‌توان به ترتیب به وسیله اضلاع یک مثلث نشان داد. مطابق شکل ۱۰-۱۱ الف، مثلث ABC را طوری رسم می‌کنیم که AB برابر ۷ واحد و BC برابر ۸ واحد و CA برابر ۵ واحد باشد. بنابراین نیروها باید به موازات اضلاع این مثلث وارد شوند.



شکل ۱۰-۱۱ ب



شکل ۱۰-۱۱ الف

بر طبق نتیجه اندازه گیری: $\angle ACB = 60^\circ$ است. بر طبق محاسبه، اگر

$\angle ACB = \theta$ باشد، داریم:

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \cos \theta$$

$$\therefore 49 = 64 + 25 - 80 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

جهت نیروها باید مطابق شکل ۱۰-۱۱ باشد، که در آن بردارهایی که معرف نیروها هستند به موازات اضلاع مربوطه از مثلث ABC رسم شده‌اند. زاویه‌ی میان نیروهای P و 8 برابر $120^\circ = 180^\circ - \theta$ است.

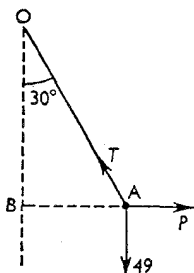
مثال ۲: وزنه‌ای به جرم 5 kg به وسیله نخ انعطاف‌ناپذیر سبکی از نقطه‌ای مانند O آویزان است. آن را در امتداد افقی بانیروی برابر P نیوتون می کشیم. به طوری که با خط قائم زاویه‌ی 30° بسازد. P را پیدا کنید.

حل: در شکل ۱۰-۱۲، A وضع تعادل وزنه است.

وزنه تحت اثر سه نیرو است: (۱) نیروی وزن که برابر 49 N است؛

(۲) نیروی افقی PN ، (۳) نیروی TN که برابر کشش نخ است.

اگر AB را به طور افقی رسم کنیم، اضلاع مثلث OAB به موازات سه نیرو هستند و بنابراین در یک مقیاس معین معرف این نیروها هستند.



شکل ۱۰-۱۲

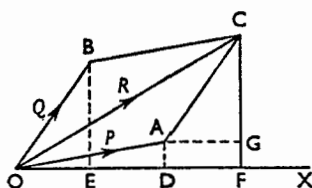
$$\therefore \frac{T}{AO} = \frac{P}{BA} = \frac{49}{OB}$$

$$\therefore P = 49 \frac{BA}{OB} = 49 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{49}{\sqrt{3}} = 28.3$$

۲۰۱۰. برای حل بسیاری از مسائل مربوط به تعادل نقطه مادی که تحت اثر سه نیرو قرار گرفته است، روشی به کار می رود که به قضیه زیر بستگی دارد.

اگر دو نیرو بر یک نقطه مادی وارد شوند، مجموع مؤلفه های آنها در هر جهت دلخواه برابر مؤلفه آنها بر این جهت است.

فرض کنید OA و OB معرف دو نیروی Q و P معرف بر ایند آنها یعنی R باشد. بنابراین $OACB$ یک متوازی الاضلاع است (شکل ۱۰-۱۳). فرض می کنیم جهت دلخواه مفروض جهت OX باشد.



شکل ۱۰-۱۳

AD ، BE و CF را عمود بر OX و AG را عمود بر CF رسم می کنیم. اضلاع OB و AC از مثلثهای OBE و ACG باهم برابرند و اضلاع این دو مثلث متوازی هستند، بنابراین از هر جهت این دو مثلث باهم برابرند.

$$OE = AG = DF$$

$$OF = OD + DF = OD + OE$$

اما OD ، OE و OF معرف مؤلفه های P ، Q ، R در جهت OX هستند و بنابراین قضیه به اثبات رسید.

بدیهی است که این قضیه را برای هر چند نیرو می توان تعمیم داد. در نتیجه، اگر سه نیرو یا بیشتر بر یک نقطه مادی وارد شوند و در حال تعادل باشند، مجموع جبری مؤلفه های نیروها در هر جهت باید صفر باشد. برعکس می توان نشان داد که اگر مجموعهای جبری مؤلفه های نیروها در هر دو جهت صفر باشند، در این صورت نیروها باید در حال تعادل باشند (۱۰-۲۶ را نگاه کنید).

مثال ۱: نقطه ای مادی به جرم 50 kg به وسیله دو نخ به طولهای 3 متر و 4 متر از دو نقطه همتراز آویزان است. فاصله این دو نقطه از یکدیگر برابر 5 متر است. کششهای نخها

را پیدا کنید.

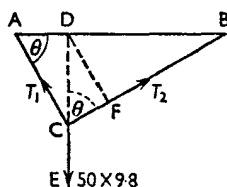
۱۰-۱۴) فرض می‌کنیم AC و BC (شکل ۱۰-۱۴) معرف T_1 و T_2 کششهای نخها بر حسب نیوتون باشند.

$AC = 3\text{ m}$ ، $BC = 4\text{ m}$ ، $AB = 5\text{ m}$ و زاویهٔ ACB قائمه است.

فرض می‌کنیم CD عمود بر AB باشد. چون AB افقی است، DC قائم است، و وزن نقطهٔ مادی که بر C اعمال می‌شود در امتداد DC است.

فرض می‌کنیم $\angle DCB = \theta$ باشد، در این صورت $\angle BAC = \theta$ و

$$\cos \theta = \frac{3}{5} \text{ و } \sin \theta = \frac{4}{5}$$



شکل ۱۰-۱۴

روش (الف): اگر در امتداد افقی، نیروها را تجزیه کنیم، مؤلفه‌ای که به طرف چپ وارد می‌شود، باید با مؤلفه‌ای که به طرف راست وارد می‌شود، برابر باشد،

$$T_1 \cos \theta = T_2 \sin \theta \quad (۱)$$

اگر در امتداد قائم، نیروها را تجزیه کنیم، مؤلفه‌ای که به طرف بالا وارد می‌شود، باید با مؤلفه‌ای که به طرف پایین وارد می‌شود، برابر باشد. پس

$$T_1 \sin \theta + T_2 \cos \theta = 50 \times 9.8 = 490 \quad (۲)$$

$$T_2 = \frac{3}{4} T_1 \text{ یا } \frac{3}{5} T_1 = \frac{4}{5} T_2 \quad (۱) \text{ از رابطه}$$

$$\frac{4}{5} T_1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} T_1 = 490 \quad (۲) \text{ و برطبق رابطه}$$

$$\frac{25}{20} T_1 = 490$$

$$\therefore T_1 = 392$$

$$\therefore T_2 = 294$$

در غیراین صورت، با تجزیه در امتداد AC و CB بیدرنگ خواهیم داشت:

$$T_1 = 490 \sin \theta = 392$$

$$T_2 = 490 \cos \theta = 294$$

و

دوش (ب): DC را تا E امتداد می دهیم، سپس بر طبق قضیه لamy

$$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{50 \times 9/8}{\sin ACB}$$

اما $\angle ACB = 90^\circ$ و $\sin ACE = \sin(90 - \theta) = \cos \theta$ ، $\sin BCE = \sin \theta$

$$\frac{T_1}{\frac{4}{5}} = \frac{T_2}{\frac{3}{5}} = \frac{490}{1}$$

پس

$$\therefore T_2 = 294 \text{ و } T_1 = 392$$

دوش (پ): اگر شکل را بر طبق مقیاس رسم کنیم، و DF را به موازات AC بکشیم،

اضلاع مثلث DCF به ترتیب با وزن ۴۹۰، کشش T_2 و کشش T_1 متوازیند.

پس CF و FD معرف T_2 و T_1 و در همان مقیاسند که DC معرف ۴۹۰ N

$$\text{است. اما } \frac{CF}{CD} = \cos \theta = \frac{3}{5} \text{ پس } T_2 = 294.$$

مثال ۲: نقطه ای مادی به جرم ۵ kg بر روی سطح صیقلی شیب داری که با افق زاویه 30°

می سازد قرار دارد. بزرگی نیرویی را که باید وارد شود تا تعادل برقرار شود

در حالت های زیر تعیین کنید:

(الف) نیرویی که به موازات سطح شیب دار وارد می شود؛

(ب) نیرویی که به طور افقی بر نقطه مادی وارد می شود.

حل: فرض می کنیم AB (شکل ۱۵-۱۵) نشان دهنده سطح شیب دار، AC سطح افقی

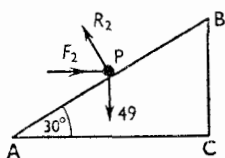
و P نقطه مادی مفروض باشد.

چون سطح صیقلی است، هیچ نیرویی به موازات سطح از لغزش نقطه مادی

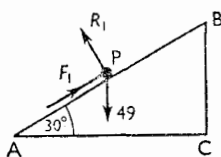
به طرف پایین جلوگیری نمی کند. تنها نیرویی که وجود دارد عکس العمل قائم

است که در حالت (الف) برابر است با R_1 نیوتون و در حالت (ب) برابر است

با R_2 نیوتون.



شکل ۱۵-۱۰ ب



شکل ۱۵-۱۰ الف

(الف) بدیهی است نیروی F_1 که لازم است به موازات سطح وارد شود تا از لغزش نقطه مادی به طرف پایین سطح جلوگیری کند (شکل ۱۵-۱۰ الف)، برابر است با $24/5 \text{ N}$ که به طرف بالای سطح وارد می شود. مؤلفه وزن که عمود بر AB وارد می شود با عکس العمل R_1 سطح متعادل خواهد شد.

(ب) اگر نیروی F_2 مطابق شکل (۱۵-۱۰ ب) به طور افقی وارد شود، مؤلفه $F_2 \sin 30^\circ$ عمود بر AB است و نقطه مادی را بر سطح می فشارد. بنابراین مؤلفه $F_2 \cos 30^\circ$ که به موازات سطح است، باید برای متعادل شدن با مؤلفه وزن $24/5 \text{ N}$ که در امتداد سطح به طرف پایین وارد می شود کافی باشد.

$$\therefore F_2 \cos 30^\circ = 24/5$$

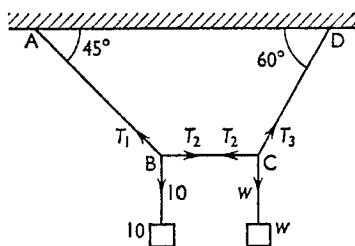
$$\therefore F_2 = \frac{49}{\sqrt{3}} = \frac{49\sqrt{3}}{3} \text{ N}$$

باید توجه داشت که

$$R_2 = F_2 \sin 30^\circ + 49 \cos 30^\circ = 98 \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال ۳: نخ $ABCD$ از دو نقطه همتراز A و D آویزان است. وزنه ای به وزن 10 N به نقطه B از نخ $ABCD$ گره زده شده است و از آن آویزان است. وزنه ای به وزن W نیوتون به نقطه C از نخ $ABCD$ گره زده شده است و از آن آویزان است. اگر AB و CD با امتداد افقی، به ترتیب زاویه های 45° و 60° بسازند، و اگر BC افقی باشد، کشش نخ BC و وزن W را تعیین کنید.

حل: فرض می کنیم کششهای نخهای AB ، BC و CD به ترتیب T_1 ، T_2 و T_3 نیوتون باشند (شکل ۱۵-۱۶).



شکل ۱۰-۱۶

سه نیرویی را که در B اثر می کند مورد توجه قرار می دهیم، و آنها را در امتدادهای افقی و قائم تجزیه می کنیم. خواهیم داشت:

$$T_1 \cos 45^\circ = T_2$$

$$T_1 \sin 45^\circ = 10 \quad \text{و}$$

$$T_2 = 10 \quad \text{و} \quad T_1 = 10\sqrt{2} \quad \text{پس}$$

به همین طریق با توجه به سه نیرویی که بر C وارد می شود و تجزیه آنها در امتدادهای افقی و قائم خواهیم داشت:

$$T_2 \cos 60^\circ = T_3$$

$$T_2 \sin 60^\circ = W \quad \text{و}$$

$$T_2 = 2T_3 = 20 \quad \text{پس}$$

$$W = 10\sqrt{3} \quad \text{و}$$

در عین حال، می توانیم مثلث نیروها را برای نیروهایی که بر B وارد می شوند، با رسم BM عمود بر AD، بسازیم. به سادگی نتیجه می شود که $T_2 = 10$ و $T_1 = 10\sqrt{2}$. به همین طریق اگر CN را عمود بر AD رسم کنیم، مثلث CND به عنوان مثلث نیروهایی که بر C وارد می شوند به کار خواهد رفت.

تمرین ۲۰۱۰

۱- وزنه ای به جرم ۲۰ کیلوگرم به وسیله دونخ سبک، به طولهای ۶ متر و ۸ متر از دو نقطه همتراز که به فاصله ۱۰ متر از یکدیگر واقعند، آویزان شده است. کششهای نخها را تعیین کنید.

۲- وزنه ای به جرم ۹۰ کیلوگرم به وسیله دونخ سبک، به طولهای ۹ متر و ۱۲ متر از دو نقطه همتراز که به فاصله ۱۵ متر از یکدیگر واقعند، آویزان شده است. کششهای نخها

را تعیین کنید.

۳- وزنه‌ای به جرم ۲۶ کیلوگرم، به وسیله دونه سبک، به طولهای ۵ متر و ۱۲ متر ازدو نقطه همتراز که به فاصله ۱۳ متر از یکدیگر واقعند، آویزان شده است. کششهای نخها را تعیین کنید.

۴- قرقره صیقلی بدون وزنی، وزنه‌ای به جرم 15 kg حمل می‌کند، و می‌تواند آزادانه در شیار صیقلی قائمی بالا یا پایین برود. آن را به وسیله نخ‌کی که از حول قرقره گذشته است طوری در بالانگاه می‌دارند که دوجزء نخ با افق، زاویه‌های 30° و 60° بسازند. نشان دهید که کشش نخ کمی کمتر از 108 N است.

۵- دونه به طولهای $1/5$ متر و $1/8$ متر به نقطه‌ای مادی به جرم 10 kg بسته شده‌اند. دواتهای دیگر نخها به دو نقطه همتراز که به فاصله $2/4$ متر از یکدیگرند بسته شده‌اند. کشش هر یک از نخها را تعیین کنید.

۶- وزنه‌ای به جرم 5 kg به وسیله دونه به طولهای 7 cm و 24 cm ازدو نقطه که در یک خط افقی واقعند آویزان است. فاصله این دو نقطه از یکدیگر 25 cm است. کششهای نخها را تعیین کنید.

۷ - نقطه‌ای مادی به جرم 10 kg بر سطح شیب‌داری که با افق زاویه 60° می‌سازد، قرار دارد. بزرگی نیرویی را که باید بر نقطه مادی وارد شود تا نقطه مادی به حال سکون بماند، در حالت‌های زیر تعیین کنید: (الف) نیرو به موازات سطح شیب‌دار وارد می‌شود؛ (ب) نیرو به طور افقی وارد می‌شود.

۸ - جسم کوچکی به جرم 10 kg ازدو نقطه A و B که به فاصله 12 m از یکدیگر و در یک خط افقی واقعند به وسیله نخهایی به طولهای 7 m و 10 m آویزان است. این دونه به یک نقطه از جسم بسته شده‌اند. کشش هر یک از نخها را تعیین کنید.

۹ - نقطه‌ای مادی به جرم 6 kg بر سطح صیقلی شیب‌داری که با افق زاویه 30° می‌سازد قرار دارد، و به نخ سبکی بسته شده است. این نخ از دور قرقره‌ای صیقلی که در بالای سطح شیب‌دار است می‌گذرد و به وزنه‌ای به جرم M کیلوگرم که به طور قائم آویزان است، بسته شده است. مقدار M را طوری پیدا کنید که وزنه‌ها به حال تعادل باشند و نیز تعیین کنید وقتی که این شرط برقرار است، چه نیرویی بر قرقره فشار می‌آورد.

۱۰- وزنه C به جرم 10 kg ، با دو تکه ریسمان AC و BC ، که طول آنها به ترتیب ۲ متر و ۳ متر است، به دو نقطه A و B ، که به فاصله ۴ متر از یکدیگر و در یک خط افقی واقعند، متصل شده است. کششهای ریسمانها را تعیین کنید.

۱۱- سه نیروی P ، Q و R در یک نقطه متقارند. برای Q و R ، برای P و R ، و

برایند P و Q از نظر بزرگی و جهت معلومند. نشان دهید که چگونه هر یک از نیروهای P ، Q و R را تعیین می کنید.

۱۲- نقطه‌ای مادی بر سطحی شیبدار قرار دارد. برای نگاهداری نقطه‌ی مادی چه نیرویی، (۱) در امتداد افقی، (۲) در امتداد سطح شیبدار و به طرف بالا، در هر یک از حالت‌های زیر لازم است؟

(الف) جرم نقطه‌ی مادی 10 kg ، طول سطح شیبدار 10 متر و ارتفاع آن 6 متر است.

(ب) جرم نقطه‌ی مادی 45 kg ، طول سطح شیبدار 25 متر و ارتفاع آن 20 متر است.

(پ) جرم نقطه‌ی مادی 5 تن ، زاویه‌ی سطح شیبدار با افق 30° است.

۱۳- جسمی به جرم 10 kg بر سطح صیقلی شیبداری که با افق زاویه‌ی 30° می سازد قرار دارد. حداقل مقدار نیروی لازم برای آنکه جسم به حال تعادل بماند و برایند عکس العمل سطح را پیدا کنید.

۱۴- نقطه‌ای مادی به جرم 5 kg به وسیله‌ی دو نخ آویزان است. اگر جهت یکی از نخ‌ها با افق زاویه‌ی 60° بسازد، تعیین کنید جهت دیگری با افق چه زاویه‌ای بسازد به طوری که کشش به کمترین حد ممکن برسد؟ مقادیر کشش نخ‌ها را در این حالت‌ها تعیین کنید.

۱۵- سیم بی وزنی میان دو نقطه‌ی هم تراز A و B که به فاصله‌ی $1/2 \text{ m}$ از یکدیگر واقعند، کشیده شده است. وزنه‌ای به جرم 5 kg از نقطه‌ی وسط سیم آویزان شده است و سبب شده که سیم 5 cm پایینتر از AB بیفتد. کشش سیم را پیدا کنید.

۱۶- به وزنه‌ی سبک P که در حال تعادل است، سه نخ متصل شده است. دوتا از نخ‌ها از روی دو قرقره می گذرند و سپس به طور قائم آویزانند و وزنه‌هایی را حمل می کنند. نخ سوم به وزنه‌ای به جرم M کیلوگرم متصل است. زاویه‌های انحراف نخ‌های بالایی با خط قائمی که از P به طرف بالا رسم می شود، به ترتیب 30° و 45° است. اکنون وزنه‌ی دیگری به جرم 10 kg به وزنه‌ی M اضافه می کنیم. تعیین کنید به دو نخ دیگر چه وزنه‌هایی باید اضافه کرد تا P ، باز هم به حال تعادل در همان وضع باقی بماند.

۱۷- دو نخ به طول‌های 40 cm و 30 cm به وزنه‌ای به جرم 6 kg متصل شده‌اند و دو انتهای دیگر نخ‌ها به دو میخ، که به فاصله‌ی 50 cm از یکدیگر در یک خط افقی قرار دارند، محکم شده است. از راه ترسیم یا راه دیگر، کشش نخ بلندتر را پیدا کنید.

اکنون به جای میخ‌ها، قرقره‌هایی صیقلی می گذاریم و نخ‌ها را از روی آنها می گذرانیم و به انتهای آزاد نخ‌ها به ترتیب وزنه‌های $4/5 \text{ kg}$ و 6 kg می بندیم.

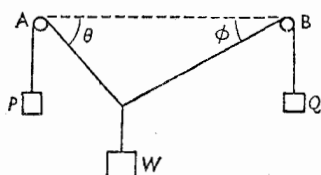
از راه ترسیم یا راه دیگر، زاویه‌هایی را که اجزای غیر قائم نخ با خط قائم می‌سازند، در وضع جدید تعادل پیدا کنید.

۱۸- وزنه‌ای به جرم 10 kg به وسیله نخ انعطاف‌ناپذیر سبکی از نقطه ثابت O آویزان است. این وزنه به وسیله نیرویی برابر P نیوتون که همیشه عمود بر نخ وارد می‌شود به یک طرف کشانده می‌شود. اگر در وضع تعادل، نخ با خط قائم، زاویه‌ای برابر (الف) 45° ، (ب) 30° بسازد مقدار P را تعیین کنید.

۱۹- نخ‌ای که می‌تواند حداکثر کششی برابر 100 N را تحمل کند، از نقطه‌ای ثابت آویزان است و در B وزنه‌ای به جرم 6 kg به آن بسته شده است. اکنون کشش افقی P بر B وارد می‌شود و آن را به یک سو می‌کشد. در وضع تعادل، اگر P برابر 25 N باشد، کشش نخ و زاویه امتداد آن را با خط قائم تعیین کنید.
در حالتی که نخ در حال پاره شدن است، بزرگی کشش افقی P و شیب نخ را پیدا کنید.

۲۰- شکل ۱۷-۱۰ نشان می‌دهد که وزنه W به دو نخ متصل است. نخ‌ها از روی دومیخ صیقلی هم‌تراز می‌گذرند و به انتهای آزاد آنها وزنه‌های P و Q متصل شده‌اند. ثابت کنید که در وضع تعادل

$$\sin \theta = \frac{(W^2 + P^2 - Q^2)}{2WP}$$



شکل ۱۷-۱۰

۲۱- نخ $ABCD$ در نقطه‌های A و D به صفحه‌ای افقی بسته شده است. در B وزنه‌ای به جرم 10 kg و در C وزنه‌ای به جرم M کیلوگرم متصل شده است. نخ AB با خط قائم زاویه 45° می‌سازد، DC با خط قائم زاویه 30° و BC که شیب آن به طرف بالاست با افق زاویه 45° می‌سازد. کشش‌های AB ، BC و CD و مقدار M را تعیین کنید.

۲۲- $ABCD$ نخ سبکی است که به دو نقطه ثابت A و D متصل شده است، و در B و C دو وزنه متساوی به آن آویزان شده است. در حال تعادل اجزای AB و CD نخ

باخط قائم به ترتیب زاویه‌های 30° و 60° می‌سازند. ثابت کنید که کشش قسمت BC برابر وزن یکی از وزنه‌هاست. نیز ثابت کنید که BC باخط قائم زاویه 60° می‌سازد.

۲۳- A و D نقطه‌هایی هستند که در یک خط افقی و به فاصله 48 cm از یکدیگر واقعند. دوسریرسمان سبکی که طول آن 66 cm است به A و D بسته شده‌اند. B نقطه‌ای است از نخ که به فاصله 25 cm از A واقع است و C نقطه‌ای است از نخ که به فاصله 29 cm از D واقع است. به B وزنه‌ای به جرم 14 g می‌آویزیم. اندازه جرم Q را که باید به C بیاویزیم، تا قسمت BC نخ افقی شود، تعیین کنید.

۲۴- وزنه‌های ۲، ۲ و ۳ کیلوگرم به نقطه‌های B، C و D از نخ‌ای که دوسر آن A و E به دو نقطه ثابت متصل شده است، آویزانند. اگر هر یک از اجزای BC و CD نخ با امتداد افقی زاویه 25° بسازند، ثابت کنید که AB و DE با امتداد افقی زاویه‌هایی تقریباً برابر 43° و 49° می‌سازند.

۲۲.۱۰. نقطه‌ای مادی که تحت اثر بیش از سه نیرو است

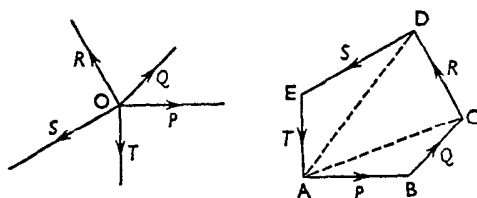
اگر بر یک نقطه مادی چند نیرو وارد شود، می‌توان نشان داد که نیروها در حالت کلی برابر یک نیروی منفرد هستند که همان برابند نیروهاست. اگر برابند نیروها صفر باشد، نقطه مادی به حال تعادل خواهد بود.

اکنون دو مسئله مهم مطرح می‌شود: نخست این که برابند چند نیرو را چگونه پیدا می‌کنند. دوم این که وقتی که نیروها در حال تعادلند، رابطه میان آنها چیست؟

۲۳.۱۰. چند ضلعی نیروها

اگر چند نیرو که بر یک نقطه مادی اثر می‌کنند، بتوانند از نظر جهت و بزرگی به ترتیب با اضلاع یک چندضلعی نمایش داده شوند، نیروها در حال تعادل خواهند بود.

فرض می‌کنیم اضلاع AB، BC، CD، DE و EA از چندضلعی ABCDE (شکل ۱۸-۱۰) بیان‌کننده نیروهایی باشند که بر یک نقطه مادی در نقطه O وارد شده‌اند.



شکل ۱۸-۱۰

برایند نیروهایی که با AB و BC نمایش داده شده‌اند، از نظر بزرگی و جهت برابر AC است.

برایند نیروهایی که با AC و CD نمایش داده شده‌اند، از نظر بزرگی و جهت برابر AD است. و به همین طریق برایند نیروهایی که با AD و DE نمایش داده شده‌اند، از نظر بزرگی و جهت برابر AE است. پس برایند P, Q, R, S برابر و در خلاف جهت T است و چون همه نیروها بر یک نقطه وارد شده‌اند، این برایند T با یکدیگر تعادل دارند و دستگاه نیروها در حال تعادل است.

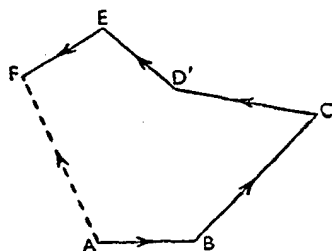
بدیهی است که این روش اثبات را می‌توان درباره هر چند نیرو به کار برد. نیز روشن است که لزومی ندارد که نیروها در یک صفحه باشند.

۲۴.۱۰. برایند چند نیرو

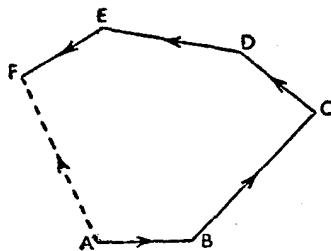
اگر مانند بند قبل، چند نیرو در O بر یک نقطه مادی وارد شوند، و چند ضلعی‌ای بسازیم که اضلاع آن متناسب و متوازی با آن نیروها باشد (همیشه ضلع بعدی را از نقطه‌ای شروع می‌کنیم که ضلع قبلی در آن نقطه ختم شده است)، در این صورت اگر چند ضلعی، بسته شود، می‌دانیم که دستگاه به حال تعادل است، اما اگر چند ضلعی بسته نشود، برایند نیروها به وسیله خط راستی که برای بستن شکل لازم است نمایش داده می‌شود. جهت برایند، مخالف جهتی است که برای بستن شکل لازم است، یعنی در جهتی است که از رأس اول به رأس آخر رسم می‌شود.

پس اگر مطابق شکل ۱۰-۱۹ الف، شکل $ABCDEF$ را به دست آوریم، برایند پنج نیرو، نیرویی است که بر O اثر می‌کند و از نظر بزرگی و جهت با AF نمایش داده می‌شود.

با علائم برداری می‌توان نوشت: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} = \vec{AF}$



شکل ۱۰-۱۹ ب



شکل ۱۰-۱۹ الف

بردارهایی که معرف نیروها هستند، می‌توانند با هر ترتیب دلخواه رسم شوند، یعنی براینده، مستقل از ترتیب اضافه کردن نیروهاست. در شکل ۱۰-۱۹ ب چندضلعی نیرو با چندضلعی نیرو در شکل ۱۰-۱۹ الف تفاوت دارد، و این تفاوت به سبب اختلاف ترتیب نیروهای سوم و چهارم است که جای آنها عوض شده است، اما AF در هر حالت تفاوتی نکرده است. این روش که برای به دست آوردن براینده چند نیرو، به طریقۀ ترسیم، به کار می‌رود، خیلی ساده‌تر از روشی است که با متوازی‌الاضلاع نیروها و با توجه به زوج نیروها به دست می‌آید.

به طوری که خواهیم دید، وقتی که نیروهایی بر یک جسم صلب وارد می‌شوند، غالباً این روش به کار می‌رود.

اما محاسبه براینده چند نیرو، اگر نیروها را در دو جهت عمود برهم، به طریقی که در بند بعد خواهیم دید، تجزیه کنیم، درست تر و سریعتر خواهد بود.

۲۵۰۱۰. تعیین براینده چند نیرو که در یک صفحه بر یک نقطه مادی وارد می‌شوند.

فرض می‌کنیم در O بر یک نقطه مادی نیروهای P, Q, R و غیره وارد شده‌اند (شکل ۱۰-۲۰). از O دو محور متعامد OX و OY را به هر ترتیب که بخواهیم رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم همه نیروها در صفحه XOY وارد می‌شوند.

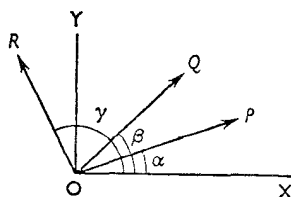
فرض می‌کنیم نیروهای P, Q, R و ... با OX زاویه‌های α, β, γ و ... بسازند. مؤلفه‌های P در جهتهای OX و OY به ترتیب عبارتند از $P \cos \alpha$ و $P \sin \alpha$ ؛ مؤلفه‌های Q نیز عبارتند از $Q \cos \beta$ و $Q \sin \beta$ و همین‌طور تا آخر.

پس نیروها معادل نیرویی هستند که مؤلفه آن در امتداد OX برابر است با

$$P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma + \dots$$

و مؤلفه آن در امتداد OY برابر است با

$$P \sin \alpha + Q \sin \beta + R \sin \gamma + \dots$$



فرض می‌کنیم این مؤلفه‌ها به ترتیب X و Y باشند. برآیند نیروها را F و زاویه میان این برآیند و OX را برابر θ می‌گیریم.

$$F \cos \theta = X \quad \text{پس}$$

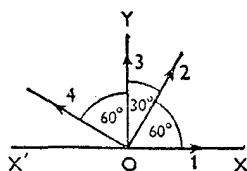
$$F \sin \theta = Y \quad \text{و}$$

$$\therefore F^2 = X^2 + Y^2$$

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} \quad \text{و}$$

مثال ۱: نقطه‌ای مادی تحت اثر نیروهای برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ نیوتون قرار دارد. زاویه میان این نیروها به ترتیب 60° ، 30° و 60° است. بزرگی و جهت برآیند را تعیین کنید.

حل: بهتر آن است که محور X ها را منطبق بر خط اثر یکی از نیروها بکنیم. فرض می‌کنیم O (شکل ۱۰-۲۱ الف) وضع نقطه مادی و OX خط اثر نیروی ۱ N باشد. در این صورت نیروی ۳ N در امتداد OY وارد می‌شود.



شکل ۱۰-۲۱ الف

مؤلفه برآیند در امتداد OX برابر است با

$$1 + 2 \cos 60^\circ - 4 \cos 30^\circ = 1 + 1 - 2\sqrt{3} \\ = 2 - 3.464 = -1.464$$

یعنی معادل نیرویی برابر 1.464 N در امتداد OX است.

مؤلفه برآیند در امتداد OY برابر است با

$$2 \cos 30^\circ + 3 + 4 \cos 60^\circ = \sqrt{3} + 3 + 2 \\ = \sqrt{3} + 5 = 6.732$$

برآیند برابر است با

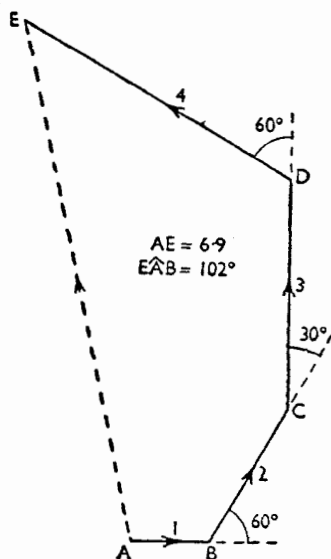
$$\sqrt{[(1.464)^2 + (6.732)^2]} = 6.9 \text{ N}$$

اگر θ زاویه میان این برآیند و OX باشد،

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{6/732}{1/464} = -4/597$$

$$\therefore \theta = 102^\circ 16' \text{ تقریباً}$$

این مسئله را می‌توان از راه ترسیم مطابق شرح زیر نیز حل کرد. مطابق شکل ۱۰-۲۱ ب AB, BC, CD و DE را به ترتیب به موازات نیروهای داده شده و به بزرگیهای ۱، ۲، ۳ و ۴ رسم می‌کنیم.



شکل ۱۰-۲۱ ب

در این صورت $\vec{AE}$ از نظر بزرگی و جهت معرف برآیند نیروهاست.

با اندازه‌گیری، $AE = 6/9$ و $\angle EAB = 102^\circ$ به دست می‌آید. اگر با استفاده از شکل ۱۰-۲۱ ب این کمیتها حساب شوند، یکسان بودن نتیجه دو روش روشن می‌شود.

ترسیم اضلاع چندضلعی نیروی $ABCDE$ با تغییر دادن ترتیب نیروها برای خواننده آموزنده خواهد بود.

مثال ۲: سه نیرو به بزرگیهای P ، $10P$ و $5P$ بريك نقطه مادی طوری اثر می‌کنند که دو به دو با یکدیگر زاویه 120° می‌سازند. برآیند آنها را پیدا کنید.

حل:

دوش (الف): مجموع مؤلفه‌های نیروها به موازات نیروی $15P$ برابر است با

$$15P - 10P \cos 60^\circ - 5P \cos 60^\circ = \frac{15P}{2}$$

نیز مجموع مؤلفه‌های نیروها در امتداد عمود بر نیروی $15P$ برابر است با

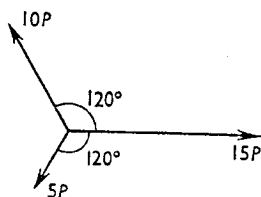
$$10P \sin 60^\circ - 5P \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}P}{2}$$

پس برآیند $R = \frac{1}{2}P\sqrt{15^2 + (5\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{3}P$ و زاویه آن با نیروی $15P$

برابر است با

$$\theta = \text{Arctg} \frac{5\sqrt{3}}{15} = 30^\circ$$

دوش (ب): می‌دانیم که نیروهای $5P$ ، $5P$ ، $5P$ در جهتهایی که نشان داده شده‌اند در حال تعادلند. زیرا آنها را می‌توان از نظر بزرگی و جهت به وسیله اضلاع يك مثلث متساوی‌الاضلاع نمایش داد.



شکل ۱۰-۲۲

پس سه نیروی داده شده برابر با دو نیروی $10P$ و $5P$ می‌شوند که باهم زاویه 120° می‌سازند. برآیند این نیروها، R ، مطابق زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R^2 &= (10P)^2 + (5P)^2 + 2 \times 10P \times 5P \cos 120^\circ \\ &= 100P^2 + 25P^2 - 50P^2 = 75P^2 \end{aligned}$$

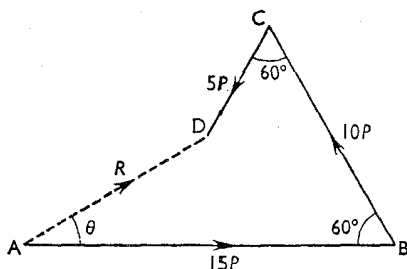
$$\therefore R = 5\sqrt{3}P$$

زاویه θ که برآیند با جهت نیروی $15P$ می‌سازد از این راه به دست می‌آید:

$$\text{tg } \theta = \frac{5 \sin 60^\circ}{10 - 5 \cos 60^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^\circ$$

بنابراین



شکل ۱۰-۲۳

دوش (پ): چند ضلعی برداری ABCD (شکل ۱۰-۲۳) را که در آن $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$ ، $\vec{CD}$ به ترتیب معرف نیروهای $15P$ ، $10P$ ، $5P$ هستند رسم می کنیم. در این صورت $\vec{AD}$ معرف برآیند سه نیرو است. با اندازه گیری، یا از راه محاسبه، $AD = 8/7P$ و $\angle DAB = 30^\circ$ است.

تمرین ۳۰۱۰

- ۱ - نیروهای ۱، ۲، ۳، ۴ نیوتون بر نقطه A در جهتهای AB، AC، AD و AE وارد می شوند، به طوری که $\angle BAC = 30^\circ$ ، $\angle CAD = 30^\circ$ ، $\angle DAE = 90^\circ$ است. بزرگی برآیند این سه نیرو و زاویه ای که برآیند با امتداد AB می سازد چقدر است؟ نتیجه را با رسم نمودار برداری تحقیق کنید.
- ۲ - نقطه ای مادی تحت اثر نیروهای ۲ و ۴ نیوتون که بازوویه قائمه برهم وارد می شوند و نیز تحت اثر نیرویی برابر $4\sqrt{2}$ نیوتون که جهش نیمساز زاویه میان دو نیروی دیگر است، قرار گرفته است. برآیند نیرویی را که بر نقطه مادی وارد می شود تعیین کنید.
- ۳ - سه نیروی ۵، ۱۰، ۱۳ نیوتون در یک صفحه بزرگ نقطه مادی وارد می شوند. زاویه میان هر دو جهت آنها 120° است. بزرگی و جهت برآیند آنها را تعیین کنید.
- ۴ - ABCD یک مربع است و نیروهای ۴، ۵ و ۵ نیوتون به ترتیب در جهتهای AB، AC و AD بر A وارد می شوند. بزرگی و جهت برآیند را تعیین کنید.
- ۵ - بزرگی و جهت برآیند نیروهایی را پیدا کنید که بزرگ نقطه وارد می شوند و بزرگی و جهت آنها به ترتیب عبارتند از $20N$ در جهت مشرق، $42N$ در جهت شمال غربی، $60N$ در جهت 30° جنوب غربی و $15N$ در جهت جنوب.
- ۶ - ABCDEF یک شش ضلعی منظم است. نیروهایی به بزرگی ۲، $4\sqrt{3}$ ، ۸، $2\sqrt{3}$ و ۴

نیوتون، به ترتیب درجه‌های AB, AC, AD, AE, AF بر A وارد می‌شوند. بزرگی برابند و زاویه جهت آن‌را با AB پیدا کنید. نتیجه را بارسم نمودار برداری تحقیق کنید.

۷ - چهارسیم افقی به يك تیرتلفن متصلند و بر آن کششهای زیر را وارد می‌کنند. $N = 80$ به‌سوی شمال، $N = 120$ به‌سوی شرق، $N = 160$ به‌سوی جنوب غربی و $N = 200$ به‌سوی جنوب شرقی. برابند کشش وارد بر تیرتلفن و جهت آن را پیدا کنید.

۸ - چهارمیخ صیقلی A, B, C, D در يك صفحه قائم، طوری نصب شده‌اند که چهار گوشه پایینی يك شش ضلعی منظم را که ضلع BC آن افقی است، تشکیل داده‌اند. نخ را به A می‌بندیم و آن را از زیر B و C و از روی D و A می‌گذرانیم و وزنه‌ای به جرم 10 کیلوگرم را به انتهای آزاد آن متصل می‌کنیم. وزنه به‌طور قائم قرار می‌گیرد. نیروهایی را که بر چهارمیخ فشار می‌آورد تعیین کنید.

۹ - سه نیرو که بزرگی هریک برابر F است بر نقطه O در امتداد خطوط OA, OB و OC که در يك صفحه‌اند وارد می‌شوند. زاویه BOA برابر $45^\circ +$ ، و زاویه BOC برابر $90^\circ -$ است. بزرگی برابند نیرو را تعیین کنید و جهت آن را، با تعیین تانژانت زاویه‌ای که برابند با OB می‌سازد، پیدا کنید.

۱۰ - سه نیرو در جهت‌های شمال غربی، شمال شرقی و جنوب بريك نقطه وارد می‌شوند و بزرگی آنها به‌ترتیب برابر $100, 200$ و 300 نیوتون است. جهت و بزرگی نیروی برابند را پیدا کنید و آن را شرح دهید.

۱۱ - اضلاع AB, BC, CA يك مثلث به‌ترتیب $5, 7$ و 3 سانتیمتر است. از راه ترسیم یا از هر راه دیگر، بزرگی برابند نیروهایی را که بريك نقطه وارد می‌شوند و انحراف آن را نسبت به BC تعیین کنید، در صورتی که می‌دانیم نیروی 5 N در جهت BC ، و 9 N در جهت AC و 3 N در جهت AB بر نقطه مادی وارد می‌شوند.

۱۲ - نیروهای $2, 3, 4$ نیوتون درجه‌هایی به‌ترتیب متوازی با اضلاع AB, AC, BC از يك مثلث متساوی‌الاضلاع وارد می‌شوند. برابند آنها را پیدا کنید.

۱۳ - نیروهای $5, 4, 12, 4$ نیوتون بر نقطه A به‌ترتیب در امتدادهای AB, AC, AD و AE وارد می‌شوند. $\angle BAC = 30^\circ, \angle BAD = 90^\circ, \angle BAE = 150^\circ$ است. بزرگی برابند و زاویه‌ای را که خط اثر آن با برابند می‌سازد تعیین کنید.

۱۴ - مثلثی متساوی‌الاضلاع است، و G مرکز برخورد میانه‌های آن است. نیروهای $8, 8, 16$ نیوتون به‌ترتیب در امتدادهای GB, GC, GA بر G وارد می‌شوند. بزرگی و جهت برابند آنها را تعیین کنید.

۱۵- نیروهای 11 N ، 20 N و 5 N به ترتیب در امتدادهای OA ، OB و OC وارد می شوند. $\cot \angle AOB = \cot \angle AOC = \frac{3}{4}$ و OB میان OA و OC واقع است. مؤلفه

نیرو را در امتداد OA و نیز بزرگی برایند کل را تعیین کنید.

۱۶- چهار نیروی 10 ، 9 ، 4 و 1 نیوتون به ترتیب در جهتهای شمال، مشرق، جنوب و مغرب بر نقطه O وارد می شوند. بزرگی برایند و انحراف آن را نسبت به شمال پیدا کنید. نیز اگر در جهت شمال غربی، نیرویی برابر $\sqrt{8}\text{ N}$ به نقطه O اضافه شود، بزرگی برایند جدید را پیدا کنید.

۱۷- نیروهای متقارب زیر بر یک نقطه وارد می شوند. واحد نیرو 1 N است، زاویه ها در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت و نسبت به خط معلوم OX سنجیده می شوند.

2° ، 3° ، 3° ، 15° ، 2° ، 24° و 4° بر 270°

بزرگی و جهت برایند آنها را از دو راه زیر تعیین کنید:

(الف) از راه ترسیم چندضلعی نیروها؛

(ب) از راه محاسبه مؤلفه های موازی و عمود بر OX .

۱۸- $ABCD$ مربعی است به ضلع 30 cm . نیروهای 2 ، 4 و 2 نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع DA ، AB و BC وارد می شوند. نشان دهید که برایند نیروهایی که در امتدادهای AB و BC وارد می شوند نیرویی را که در امتداد DA وارد می شود، در نقطه ای مانند E قطع می کند، به طوری که $AE = 30\text{ cm}$ است و سپس بزرگی و جهت و راستای برایند سه نیرو را تعیین کنید.

۱۹- نیروهای 1 ، 2 و 3 نیوتون در امتداد اضلاع AB ، BC و CA از مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 5 cm وارد می شوند. از راه ترسیم تعیین کنید که برایند نیروهایی که در امتدادهای AB و BC وارد می شوند، امتداد AC را در کجا قطع می کنند و سپس بزرگی و جهت برایند سه نیرو و جایی را که راستای آن امتداد BC را قطع می کند تعیین کنید.

۲۰- k مقداری است ثابت و ABC مثلثی است که طول اضلاع آن a ، b و c است. تعیین کنید: (الف) برایند نیروی ka در امتداد BC و نیروی kc در امتداد AB ؛ (ب) برایند نیروی ka در امتداد BC و نیروی kc در امتداد BA . بزرگی و راستا را در هر دو حالت بالا تعیین کنید.

ثابت کنید که نیروی ka در امتداد BC و نیروی kc در امتداد BA معادل با نیرویی برابر $3k$ در امتداد BD است، که D نقطه ای است بر CA به طوری که

$$AD = 2DC$$

۲۶.۱۰. شرایط تعادل چند نیرو که بر يك نقطه مادی وارد می‌شوند.

اگر نیروها را در دو جهت متعامد دلخواه تجزیه کنیم و مؤلفه‌ها را در این جهتها جمع کنیم و جمع آنها X و Y باشد، برآیند F برطبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F^2 = X^2 + Y^2$$

اما اگر نیروها در حال تعادل باشند F باید صفر باشد.

از طرفی جمع مربعات دو کمیت واقعی نمی‌تواند صفر باشد، مگر آنکه هریک از دو کمیت جداگانه برابر صفر باشد.

$$X = 0 \text{ و } Y = 0$$

∴

پس، اگر چند نیرو که بر يك نقطه مادی وارد می‌شوند، در حال تعادل باشند، مجموع جبری مؤلفه‌های آنها در هر دو جهت متعامد دلخواه، باید جداگانه برابر صفر باشد. برعکس، اگر مجموع مؤلفه‌های آنها در هر دو جهت متعامد صفر باشد، نیروها در حال تعادلند. زیرا در این صورت هم X و هم Y صفرند و بنابراین F برابر صفر است.

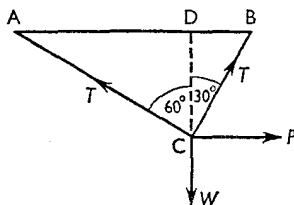
۲۷.۱۰. در مسائلی که نیروهای وارد بر يك نقطه در حال تعادلند، با توجه به نتایجی که در بند قبل بیان شد، می‌توان راه حل کلی به وسیله محاسبه به دست آورد.

در این گونه مسائل، نیروهای داده شده را در دو جهت عمود بر هم (معمولاً افقی و قائم) تجزیه می‌کنیم و مجموع مؤلفه‌ها را در هریک از این دو جهت برابر صفر می‌گیریم. از روشهای ترسیمی که شامل مثلث و چند ضلعی نیروهاست، می‌توان در مورد هر چند نیرو استفاده کرد، اما این روشها غالباً وقت زیادی می‌گیرند و دقت نتایج آنها کمتر از محاسبه است. روش برداری غالباً مناسبتر است.

مثال ۱: نخي به دو نقطه هم‌تراز محکم شده است و حلقه‌ای صیقلی به وزن W می‌تواند آزادانه در طول نخ جابه‌جا شود. این حلقه را با نیروی افقی برابر P فشار می‌دهند. اگر در وضع تعادل، اجزای نخ با خط قائم زاویه‌های 60° و 30° بسازند، مقدار P و کشش نخ را تعیین کنید.

حل: فرض می‌کنیم A و B (شکل ۱۰-۲۴) نقطه‌هایی باشند که نخ به آنها بسته شده است و C وضع حلقه θ و CD عمود بر AB باشد. بنابراین $\angle ACD = 60^\circ$ ، $\angle BCD = 30^\circ$. چون حلقه صیقلی است، کشش T نخ در سراسر آن یکسان است. با تجزیه در امتداد قائم،

$$T \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ = W$$



شکل ۱۰-۲۴

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)T = W$$

$$\therefore T = \frac{2W}{\sqrt{3} + 1} = W(\sqrt{3} - 1)$$

با تجزیه در امتداد افقی،

$$P + T \sin 30^\circ = T \sin 60^\circ$$

$$\therefore P = \frac{\sqrt{3}}{2}T - \frac{1}{2}T = \frac{T}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

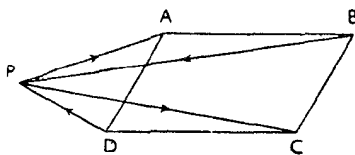
$$\therefore P = \frac{W}{2}(\sqrt{3} - 1)^2 = W(2 - \sqrt{3})$$

مثال ۲: ABCD یک متوازی الاضلاع است و P نقطه‌ای است دلخواه. ثابت کنید که دستگاه نیروهایی که با PA، BP، PC، DP نمایش داده می‌شوند در حال تعادلند.

حل: در شکل ۱۰-۲۵ روشن است که برایند نیروهایی که با BP و PA نمایش داده می‌شوند، از نظر بزرگی و جهت برابر BA است. البته این برایند بر نقطه P وارد می‌شود.

برایند نیروهایی که با DP و PC نمایش داده شده‌اند از نظر بزرگی و جهت با DC نمایش داده می‌شود. این برایند نیز بر نقطه P وارد می‌شود.

اما AB مساوی و موازی DC است، بنابراین برایندها از نظر بزرگی با هم



شکل ۱۰-۲۵

برابرند، و چون هر دو بر نقطه P وارد می‌شوند، در امتداد یک خط مستقیم هستند. چون جهت‌های آنها متفاوتند، نیروها باهم متعادلند و دستگاه به حال تعادل است. به طور برداری می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \vec{BP} + \vec{PA} + \vec{DP} + \vec{PC} &= \text{مجموع برداری نیروها} \\ &= \vec{BA} + \vec{DC} \end{aligned}$$

که چون AB و DC برابر و موازی هستند و دو بردار در جهت‌های متفاوت بایکدیگرند، نتیجه بالا برابر صفر است.

چون نیروها بر یک نقطه اثر می‌کنند و برابری بردازی آنها صفر است، این نیروها در حال تعادلند.

در این حالت، تجزیه نیروها در دو جهت متعامد، روش مناسبی نخواهد بود.

تمرین ۴.۱۰

۱ - دنیروی ۹ و ۱۰ نیوتون که بر یک نقطه وارد می‌شوند، باهم زاویه‌ای می‌سازند که تانژانت آن برابر $\frac{4}{3}$ است.

دنیروی P و Q بر این نقطه طوری وارد می‌شوند که چهار نیرو در حال تعادلند. Q در جهت مخالف نیروی N ۹ وارد می‌شود و P عمود بر Q است. بزرگی‌های این دو نیرو را تعیین کنید.

۲ - نقطه وسط ضلع CD از مربع $ABCD$ است. نیروهای P ، Q و نیوتون در امتدادهای AB ، AD ، EA و CA و در جهت‌هایی که ترتیب حروف رعایت می‌شود، وارد می‌شوند. اگر نیروها در حال تعادل باشند P و Q را تعیین کنید.

۳ - نخ به طول 0.6 m به دو نقطه هم‌تراز A و B که به فاصله 0.3 m از یکدیگر واقعند، بسته شده است. حلقه‌ای به وزن 50 N که از نخ عبور کرده است، تحت اثر نیرویی افقی برابر P است، به طوری که درست در زیر B به حال تعادل است. کشش نخ و بزرگی P را پیدا کنید.

۴ - نخ به طول 31 cm به دو نقطه هم‌تراز که به فاصله 25 cm از یکدیگر واقعند، بسته شده است. حلقه‌ای که جرم آن 90 g است می‌تواند در نخ جابه‌جا شود و تحت اثر نیرویی افقی است. بزرگی این نیرو به قدری است که حلقه در فاصله 7 cm از نزدیکترین انتهای نخ به حال تعادل است. نشان دهید که نیروی مذکور تقریباً برابر وزن یک وزنه 50 گرمی است و کشش نخ را تعیین کنید.

۵ - ABCD يك مربع است. نیروهای ۲، $3\sqrt{2}$ ، و ۹ نیوتون، به ترتیب در جهتهای AB ، AD و AC بر نقطه A وارد می‌شوند. بزرگی نیرویی اضافی را که باید برای ایجاد تعادل بر A وارد شود، تعیین کنید.

۶ - نیروهای ۳، $5\sqrt{3}$ ، و $6\sqrt{3}$ نیوتون، به ترتیب بر يك رأس بر يك شش ضلعی منتظم و به طرف پنج رأس دیگر وارد می‌شوند. بزرگی نیرویی را که باید بر این رأس وارد کرد تا این نیروها به حال تعادل در آیند، تعیین کنید.

۷ - پنج نیرو که بر يك نقطه وارد می‌شوند، به حال تعادلند. بزرگی چهارتای از آنها برابر ۱، ۲، ۳، و ۴ نیوتون است که بایک خط راست معین، به ترتیب زوایای 60° ، 90° ، 120° و 150° می‌سازند. بزرگی وجهت نیروی دیگر را تعیین کنید و از راه ترسیم نتیجه به دست آمده را تحقیق کنید.

۸ - ABCDEF يك شش ضلعی منتظم است. نشان دهید که نیروهایی که با $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ ، $\vec{DA}$ ، $\vec{AE}$ و $\vec{AF}$ نمایش داده می‌شوند، به حال تعادلند.

۹ - ABCD مربع است و BEC مثلثی متساوی الاضلاع است که در همان صفحه قرار دارد و E در خارج مربع ABCD است. اگر نیروهایی که به وسیله $\vec{pAB}$ ، $\vec{qAD}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{EA}$ نمایش داده می‌شوند، در حال تعادل باشند، p و q را تعیین کنید.

۱۰ - اگر F، E، D نقطه‌های وسط اضلاع AB ، CA ، BC از مثلث ABC باشند، نشان دهید که سه نیرویی که بر يك نقطه وارد می‌شوند و با $\vec{AD}$ ، $\vec{BE}$ و $\vec{CF}$ نمایش داده می‌شوند، در حال تعادلند.

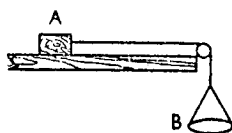
۲۸.۱۰ اصطکاک

هنگامی که جسمی روی جسم دیگر می‌لغزد، تجربه نشان داده است، که نیرویی وارد عمل می‌شود که مایل است در مقابل حرکت مقاومت کند. این نیرو را نیروی اصطکاک می‌نامیم.

اگر قطعه چوب A را (شکل ۱۰-۲۶) که وزن آن معلوم است، روی میزی قرار دهیم و سپس يك قطعه نخ به آن ببندیم و نخ را از شیار قرقره‌ای عبور دهیم و انتهای آن را به يك کفه متصل کنیم، می‌توانیم قوانینی را که در باره عمل نیروی اصطکاک صدق می‌کند، پیدا کنیم.

اگر وزنه کوچکی در کفه B بگذاریم، حرکتی در A تولید نخواهد شد. در این صورت اصطکاک میان A و میز باید برابر با مجموع وزن کفه و وزن وزنه‌ای باشد که در کفه افزوده‌ایم

تجربه نشان می‌دهد که اگر وزن B را به تدریج زیاد کنیم، هنگامی می‌رسد که نقطه‌ای از A شروع به حرکت می‌کند. این نشان می‌دهد که فقط مقدار محدودی اصطکاک می‌تواند، وارد عمل شود.



شکل ۱۰-۲۶

هرچه نیرویی که مایل است A را به حرکت درآورد از صفر زیادتر می‌شود، نیروی اصطکاک نیز به همان نسبت از صفر زیادتر می‌شود تا آنکه به مقدار ماکزیمم یا حدی برسد و در آن هنگام، حرکت آغاز شود. در این صورت وزن کل B برابر نیروی اصطکاک است. اکنون اگر وزنه‌ای روی A قرار دهیم، به طوری که عکس‌العمل میان A و میز افزایش یابد و آزمایش را تکرار کنیم، درمی‌یابیم که باید وزنه بیشتری به B اضافه شود تا حرکت آغاز شود، یعنی اصطکاک ماکزیمم افزایش می‌یابد. اگر آزمایش را با وزنه‌های مختلفی درباره A تکرار کنیم، برای اصطکاک ماکزیمم یک سری مقادیر به دست می‌آوریم که به روشنی بستگی به عکس‌العمل میان A و میز دارد. با تقسیم وزن کل B بر وزن کل A در هر حالت، به این نتیجه می‌رسیم که عددی که به دست می‌آید، تقریباً ثابت است. آزمایش‌های مشابهی را می‌توان با استفاده از مواد متفاوت تکرار کرد. نتایج این گونه آزمایش‌ها به شرح زیر است:

قوانین اصطکاک

- ۱- جهت اصطکاک در خلاف جهتی است که جسم مایل به حرکت است.
- ۲- بزرگی اصطکاک، تا یک حد معین، درست برابر نیرویی است که مایل است جسم را به حرکت درآورد.
- ۳- فقط مقدار معینی اصطکاک می‌تواند وارد عمل شود. مقدار ماکزیمم آن را اصطکاک حدی می‌نامیم.
- ۴- نسبت بزرگی اصطکاک حدی (برای سطوح معین) به عکس‌العمل قائم میان سطوح مقدار ثابتی برابر μ است. این نسبت ثابت، μ ، به ماهیت سطوح بستگی دارد و ضریب «استاتیکی» اصطکاک نامیده می‌شود.

۵- مقدار اصطکاک، به شرط آنکه عکس العمل قائم میان سطوح تغییری نکند، مستقل از مساحتها و شکل سطوح در حال تماس است.

۶- وقتی که حرکت برقرار می شود، اصطکاک باز هم در خلاف جهت حرکت وارد می شود و مستقل از تندی است و متناسب با نیروی فشاری قائم است و کمی کمتر از اصطکاک حدی است.

باید به خوبی درک شود که این قوانین، تجربی هستند و به استثنای سه قانون اول، دامنه صحت سه قانون دیگر محدود است. مثلاً اگر فشارهای فوق العاده زیاد بر سطوح تماس وارد شود، ممکن است این سطوح از هم بپاشند و قانون ۴ دیگر صدق نکند. برطبق قانون ۴، اگر اصطکاک حدی برابر F (یعنی نیروی اصطکاکی که درست در آغاز حرکت وارد می شود)، و عکس العمل قائم برابر R و ضریب استاتیکی اصطکاک برابر μ باشد، در این صورت

$$F = \mu R \quad \text{یا} \quad \frac{F}{R} = \mu$$

باید کاملاً دقت کرد که فرض نشود که اصطکاک همیشه برابر μR است. این مقدار فقط هنگامی است که جسم می خواهد شروع به حرکت کند. در غیر این صورت، مقدار اصطکاک می تواند از صفر تا μR باشد.

۲۹.۱۰. زاویه اصطکاک

اگر عکس العمل قائم R و نیروی اصطکاک F را ترکیب و به صورت یک نیروی منفرد در نظر بگیریم (شکل ۱۰-۲۷)، این نیرو را عکس العمل کل یا برآیند می نامند. این

عکس العمل باخط قائم زاویه ای می سازد که تانژانت آن برابر $\frac{F}{R}$ است.

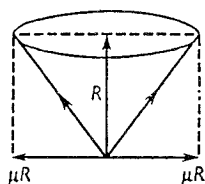
وقتی که F از صفر شروع به زیاد شدن می کند، زاویه ای که این برآیند باخط قائم می سازد، افزایش می یابد تا آنکه اصطکاک F به مقدار ماکزیمم خود یعنی μR برسد. در این حالت تانژانت زاویه میان برآیند و خط قائم برابر $\frac{\mu R}{R}$ یا μ است. وقتی که اصطکاک به مقدار حد خود می رسد، زاویه ای که عکس العمل برآیند با خط قائم می سازد، زاویه اصطکاک نامیده می شود و با λ نمایش داده می شود.

$$\operatorname{tg} \lambda = \mu \quad \text{بنابراین}$$

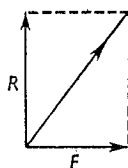
عکس العمل کل می تواند هر زاویه ای میان صفر و این مقدار با خط قائم بسازد، اما نمی تواند زاویه ای بیشتر از این مقدار باخط قائم داشته باشد. نیرویی که در امتداد سطح،

بر جسم وارد می شود و تمایل به حرکت در جسم ایجاد می کند، در هر جهت باشد، عکس العمل کل مربوط به آن بر سطح مخروطی قرار می گیرد که نیم زاویه رأس آن برابر λ یا $\text{Arc } tg \mu$ است.

این مخروط به مخروط اصطکاک (شکل ۱۰-۲۸) موسوم است. عکس العمل کل همیشه باید در داخل یا بر روی سطح این مخروط واقع شود و در حالت اخیر یعنی وقتی که بر سطح مخروط واقع می شود، تعادل به حالت حدی خود می رسد.



شکل ۱۰-۲۸

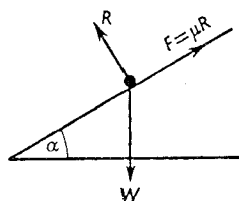


شکل ۱۰-۲۷

۳۰.۱۰. تعادل يك نقطه مادی بر سطح شیبدار ناصاف

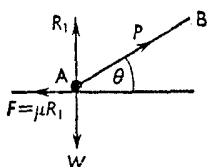
فرض می کنیم که نقطه ای مادی به وزن W بر سطح ناصافی قرار دارد که زاویه آن نسبت به افق کم کم زیاد می شود (شکل ۱۰-۲۹). وقتی که زاویه آن با افق برابر α است، مؤلفه وزن در امتداد پایین سطح برابر $W \sin \alpha$ است. اصطکاک حداقل یا حدی برابر $\mu W \cos \alpha$ است، پس وقتی که $W \sin \alpha = \mu W \cos \alpha$ یا $tg \alpha = \mu$ است، درست هنگامی است که حرکت می خواهد شروع شود.

بنابراین نقطه مادی هنگامی که زاویه انحراف سطح شیبدار طوری است که $tg \alpha = \mu$ است، تحت اثر وزن خود، در حال شروع به حرکت خواهد بود. و این هنگامی است که زاویه سطح شیبدار با افق برابر زاویه اصطکاک است.

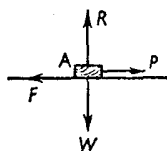


شکل ۱۰-۲۹

۳۱۰۱۰. نقطه مادی که بر یک سطح افقی ناصاف و تحت اثر نیروی خارجی قرار دارد اگر نیرو، افقی (مانند شکل ۱۰-۳۰) و برابر P باشد، در این صورت برای اینکه حرکت روی دهد، P باید بزرگتر از μR باشد. اما چون حرکت در امتداد قائم وجود ندارد $R = W$ است و بنابراین P باید بزرگتر از μW باشد.



شکل ۱۰-۳۱



شکل ۱۰-۳۰

اگر نیروی P با سطح افقی زاویه θ بسازد و جهت آن به طرف بالا باشد، (مانند شکل ۱۰-۳۱)، در این صورت این نیرو دارای مؤلفه‌ای قائم به طرف بالا خواهد بود، که موجب می‌شود فشار میان نقطه مادی و سطح را کاهش دهد.

اکنون عکس العمل قائم R_1 برابر $W - P \sin \theta$ است، و اصطکاک حدی مربوط به آن برابر $\mu(W - P \sin \theta)$ است. پس هنگامی که حرکت درست در حال روی دادن است، باید چنین داشته باشیم:

$$P \cos \theta = \mu(W - P \sin \theta)$$

$$\therefore P(\cos \theta + \mu \sin \theta) = \mu W$$

$$\therefore P \left(\cos \theta + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \sin \theta \right) = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} W$$

که در آن λ زاویه اصطکاک است.

$$\therefore P \frac{\cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda}{\cos \lambda} = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} W$$

$$\therefore P \cos(\theta - \lambda) = W \sin \lambda$$

$$\therefore P = W \frac{\sin \lambda}{\cos(\theta - \lambda)}$$

مقدار P هنگامی حداقل خواهد بود که $\cos(\theta - \lambda)$ ماکزیمم باشد، یعنی $\theta = \lambda$ یا $P = W \sin \lambda$ باشد.

اگر P ، مانند شکل ۱۰-۳۲ به طرف پایین در امتداد CA شیب داشته باشد، دارای مؤلفه قائمی به طرف پایین خواهد بود که موجب می‌شود عکس العمل قائم سطح و در نتیجه

اصطكاك زياد شود. بنابراین برای آنكه نقطه مادی با حداقل نیرو به حرکت درآید، باید نیرو به طرف بالا و در امتدادی وارد شود كه زاویه آن با افق برابر زاویه اصطكاك باشد. وقتی كه P به طرف پایین وارد می شود (شكل ۱۰-۳۲)، اصطكاك برابر است با

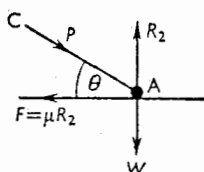
$$\mu(W + P \sin \theta)$$

و برای آنكه حرکت روی بدهد، باید چنین داشته باشیم:

$$P \cos \theta > \mu(W + P \sin \theta)$$

$$\therefore P \left(\cos \theta - \frac{\sin \lambda \sin \theta}{\cos \lambda} \right) > \frac{W \sin \lambda}{\cos \lambda}$$

$$\therefore P > \frac{W \sin \lambda}{\cos(\theta + \lambda)}$$

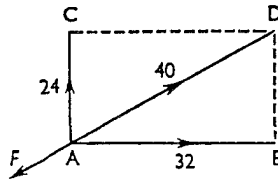


شكل ۱۰-۳۲

حال اگر $(\theta + \lambda)$ تقریباً 90° باشد، مخرج کسر طرف راست خیلی کوچک خواهد بود و برای آنكه حرکت روی بدهد، P باید خیلی بزرگ باشد. اگر $\theta + \lambda$ برابر 90° باشد، نقطه مادی به هیچ وجه حرکت نخواهد کرد، حتی اگر P فوق العاده بزرگ باشد. نیز اگر $\theta + \lambda$ بزرگتر از 90° باشد، کسینوس آن منفی و برای P غیر ممکن است كه بتواند نقطه مادی را به حرکت درآورد. مقدار منفی به این معنی است كه P باید در جهت مخالف، یعنی در امتداد AC ، وارد شود.

مثال: نقطه ای مادی به جرم 30 kg بر سطح افقی ناصافی قرار دارد. وقتی كه نیروهای افقی 24 N و 32 N ، عمود بر یکدیگر، بر آن وارد می شوند، درست به نقطه شروع حرکت می رسد. ضریب اصطكاك میان نقطه مادی و سطح افقی و نیز جهتی را كه اصطكاك در آن اعمال می شود تعیین کنید.

حل: در مسائلی از این نوع، باید بپایند نیرویی را كه در نقطه مادی تمایل به حرکت ایجاد می کند، پیدا کنیم. نقطه مادی در امتداد این برایند تمایل به حرکت دارد و اصطكاك



شکل ۱۰-۳۳

در جهت عکس آن وارد می‌شود.

فرض می‌کنیم AB و AC (شکل ۱۰-۳۳) جهت‌های نیروها و A نقطه مادی باشد. براینند نیروها برابر است با

$$\sqrt{24^2 + 32^2} = 40 \text{ N}$$

و در امتداد AD وارد می‌شود و با نیروی ۳۲ N زاویه‌ای می‌سازد که کسینوس آن

$\frac{4}{5}$ است. اصطکاک در جهت DA وارد می‌شود. چون اصطکاک حدی برابر μR است

که R عکس‌العمل قائمی است که بر نقطه مادی وارد می‌شود،

$$40 = 30 \times 9/8 \mu$$

$$\mu = \frac{4}{29/4} = 0/14 \text{ یا}$$

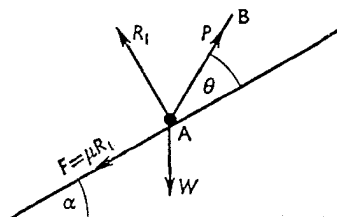
۳۲۰۱۰. نقطه مادی که بزرگ سطح شیب‌دار ناصاف و تحت اثر نیرویی خارجی قرار دارد

I- هنگامی که زاویه سطح شیب‌دار با افق کمتر از زاویه اصطکاک است.

در این حالت اصطکاک به قدری است که از لغزش نقطه مادی به طرف پایین و تحت اثر وزن

خود جلوگیری می‌کند.

برای تعیین نیروی P ، که در صفحه قائمی که از خط بزرگ‌ترین شیب سطح می‌گذرد،



شکل ۱۰-۳۴

وارد می‌شود و برای به حرکت درآوردن نقطه مادی به طرف بالا یا پایین سطح لازم است، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(الف) اگر P به طرف بالا وارد شود و با سطح زاویه‌ای برابر θ بسازد (مطابق شکل ۱۰-۳۴)، در این صورت عکس العمل قائم R_1 برابر $W \cos \alpha - P \sin \theta$ است. پس اصطکاک حدی برابر $\mu(W \cos \alpha - P \sin \theta)$ است و به طرف پایین سطح وارد می‌شود. مؤلفه وزن به طرف پایین سطح برابر است با $W \sin \alpha$. بنابراین هنگامی که نقطه مادی در حال شروع به حرکت به طرف بالای سطح است، چنین خواهیم داشت:

$$P \cos \theta = W \sin \alpha + \mu(W \cos \alpha - P \sin \theta)$$

$$\therefore P \left(\cos \theta + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \sin \theta \right) = W \left(\sin \alpha + \frac{\sin \lambda \cos \alpha}{\cos \lambda} \right)$$

$$\therefore P \frac{\cos(\theta - \lambda)}{\cos \lambda} = W \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos \lambda}$$

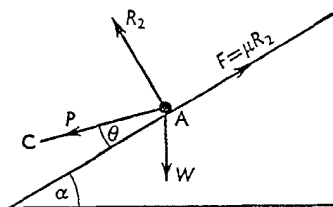
$$\therefore P = W \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

این مقدار، وقتی که $\theta = \lambda$ باشد، حداقل است و در این صورت $P = W \sin(\alpha + \lambda)$ است.

اگر $\theta = 0$ باشد، یعنی P به موازات سطح وارد شود،

$$P = W \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos \lambda}$$

(ب) اگر P به طرف پایین و در امتدادی وارد شود که با سطح زاویه θ بسازد، یعنی در امتداد AC (شکل ۱۰-۳۵) وارد شود، اصطکاک حدی باز هم برابر $\mu(W \cos \alpha - P \sin \theta)$ است، اما این بار وقتی که نقطه مادی در حال شروع به حرکت است به طرف بالای سطح وارد می‌شود.



$$\therefore P \cos \theta + W \sin \alpha = \mu (W \cos \alpha - P \sin \theta)$$

$$\therefore P (\cos \theta + \frac{\sin \lambda \sin \theta}{\cos \lambda}) = W (\frac{\sin \lambda \cos \alpha}{\cos \lambda} - \sin \alpha)$$

$$\therefore P \frac{\cos(\theta - \lambda)}{\cos \lambda} = W \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\cos \lambda}$$

$$\therefore P = W \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

P بازهم هنگامی حداقل است که $\theta = \lambda$ باشد و در این صورت مقدارش برابر است با $W \sin(\lambda - \alpha)$

II- هنگامی که زاویه سطح شیبدار با افق بیشتر از زاویه اصطکاک است

در این حالت نقطه مادی به طرف پایین سطح می لغزد، مگر آنکه نقطه مادی به کمک یک نیروی خارجی نگاهداری شود. اکنون باید به دو مورد توجه کنیم: (الف) نیروی لازم برای به حرکت درآوردن نقطه مادی به طرف بالای سطح؛ (ب) نیروی لازم برای نگاهداری نقطه مادی.

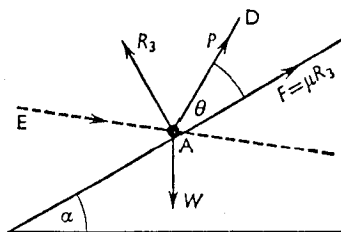
(الف) این حالت درست مانند حالت I (الف) است. نیرویی که به موازات سطح وارد می شود، با قرار دادن $\theta = 0$ برابر است با

$$W \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos \lambda}$$

اگر به طرف بالا با زاویه θ وارد شود،

$$P = W \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

P هنگامی حداقل است که $\theta = \lambda$ باشد. در این صورت مقدار آن برابر است با $W \sin(\alpha + \lambda)$



(ب) اگر P به طرف بالا و با زاویه θ وارد شود (شکل ۱۰-۳۶)، در این صورت، همان طور که در بالا بیان شد، عکس العمل قائم R_3 برابر $W \cos \alpha - P \sin \theta$ است و اصطکاک حدی برابر است با

$$\mu(W \cos \alpha - P \sin \theta)$$

اکنون در هنگامی که نقطه مادی در حالت شروع به حرکت به طرف پایین است، اصطکاک به طرف بالا وارد می شود.

$$\therefore P \cos \theta + \mu(W \cos \alpha - P \sin \theta) = W \sin \alpha$$

$$\therefore P \left(\cos \theta - \frac{\sin \lambda \sin \theta}{\cos \lambda} \right) = W \left(\sin \alpha - \frac{\sin \lambda \cos \alpha}{\cos \lambda} \right)$$

$$\therefore P \frac{\cos(\theta + \lambda)}{\cos \lambda} = W \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\cos \lambda}$$

$$\therefore P = W \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\cos(\theta + \lambda)} \quad (۱)$$

P هنگامی حداقل خواهد بود که $\theta = -\lambda$ باشد، یعنی هنگامی که P در امتداد EA وارد شود. این را می توان به طریق زیر نشان داد.

اگر P در امتداد EA وارد شود، مؤلفه ای عمود بر سطح خواهد داشت که موجب افزایش عکس العمل قائم می شود. بنابراین اصطکاک حدی برابر $\mu(W \cos \alpha + P \sin \theta)$ خواهد شد و به طرف بالای سطح وارد می شود.

$$\therefore P \cos \theta + \mu(W \cos \alpha + P \sin \theta) = W \sin \alpha$$

$$\therefore P \left(\cos \theta + \frac{\sin \lambda \sin \theta}{\cos \lambda} \right) = W \left(\sin \alpha - \frac{\sin \lambda \cos \alpha}{\cos \lambda} \right)$$

$$\therefore P \frac{\cos(\theta - \lambda)}{\cos \lambda} = W \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\cos \lambda}$$

$$\therefore P = W \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)} \quad (۲)$$

P هنگامی حداقل است که $\theta = \lambda$ باشد، و در این صورت $P = W \sin(\alpha - \lambda)$ است.

تمرین ۵.۱۰

۱ - جسمی به جرم 20 kg بر سطح افقی ناصافی قرار دارد. ضریب اصطکاک سطح برابر 0.5 است. تعیین کنید با چه نیرویی، (الف) در امتداد افقی، (ب) در امتدادی که با

افق زاویه 30° می‌سازد که به جسم وارد می‌شود، جسم شروع به حرکت خواهد کرد.

۲ - جسمی به جرم 40 kg بر سطح افقی ناصافی قرار دارد و می‌تواند با نیرویی برابر 98 N که به طور افقی بر آن وارد می‌شود، شروع به حرکت کند. ضریب اصطکاک را تعیین کنید.

۳ - حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآوردن جسمی به جرم 20 kg را در امتداد سطح افقی ناصافی که ضریب اصطکاک آن 0.25 است، پیدا کنید.

۴ - قطعه چوبی به وزن W ، در امتداد سطح افقی ناصافی به وسیله نیرویی کشیده می‌شود که بر مرکز وجه بالایی آن، طوری وارد می‌شود که با خط قائم زاویه θ می‌سازد. ثابت کنید که اگر θ کمتر از زاویه اصطکاک باشد، قطعه چوب حرکت نخواهد کرد. نیز ثابت کنید که اگر θ بزرگتر از زاویه اصطکاک λ باشد، حداقل نیرویی که قطعه چوب را به حرکت وامی‌دارد برابر است با

$$\frac{W \sin \lambda}{\sin(\theta - \lambda)}$$

۵ - طول سطح شیب‌داری 5 m و ارتفاع آن 3 m است. نیرویی برابر 49 N که به موازات سطح وارد شود قادر است که از لغزش وزنه‌ای به جرم حداکثر 10 kg جلوگیری کند. ضریب اصطکاک را تعیین کنید.

۶ - بر سطح شیب‌دار ناصافی که زاویه آن با افق برابر 30° است، جسمی به جرم 10 kg در حال حد تعادل قرار دارد. سطح را بالامی‌برند تا زاویه آن با افق برابر 60° شود. تعیین کنید چه نیرویی باید به موازات سطح وارد کرد تا جسم را نگاه داشت.

۷ - جسمی به جرم 20 kg بر روی سطح شیب‌دار ناصافی که زاویه آن با افق $\frac{3}{5} \text{ Arcsin}$ است قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک میان سطح و جسم 0.2 باشد، حداقل نیرویی را پیدا کنید که باید به موازات سطح وارد کرد تا (الف) از لغزش جسم به طرف پایین جلوگیری کند؛ (ب) آن را به طرف بالای سطح بکشانند.

۸ - جسمی به جرم 40 kg بر روی سطح شیب‌دار ناصافی قرار دارد. وقتی که با نیروی 196 N که به موازات سطح بر آن وارد می‌شود، نگاهداری می‌شود، درست در حال شروع به لغزش است. وقتی که بر آن نیرویی برابر 294 N به موازات سطح وارد می‌شود، درست در حال شروع به حرکت به طرف پایین است. ضریب اصطکاک را تعیین کنید.

۹ - وزنه‌ای به جرم 610 kg بر سطح شیب‌دار ناصافی که زاویه شیب آن $\frac{11}{60} \text{ Arc tg}$

است قرار دارد. ضریب اصطکاک سطح $\frac{1}{6}$ است. این جسم به ریسمانی متصل است

که با امتداد بالای سطح زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن $\frac{5}{12}$ است. مقادیر حدی کشش ریسمان را در مواردی که تعادل در حالت حد است، پیدا کنید.

۱۰- سطح شیبدار ناصافی است که با افق زاویه 30° می‌سازد و ضریب اصطکاک آن 0.75 است. وزنه‌ای به جرم 80 kg بر آن قرار دارد. حداقل نیروی لازم برای آنکه جسم به طرف بالا شروع به حرکت کند چقدر است؟

۱۱- اگر حداقل نیروی لازم برای آنکه جسمی از یک سطح شیبدار ناصاف که زاویه آن با افق برابر α است، به طرف بالا شروع به حرکت کند، دو برابر حداقل نیروی لازم برای جلوگیری از لغزش این جسم به طرف پایین باشد، نشان دهید که ضریب اصطکاک میان جسم و سطح برابر $\frac{1}{3} \tan \alpha$ است.

۱۲- حداقل نیروی لازم برای آنکه جسمی از یک سطح شیبدار شروع به حرکت به طرف بالا بکند P است. نشان دهید که حداقل نیرو، که به موازات سطح وارد می‌شود و سبب می‌شود که جسم به طرف بالا شروع به حرکت کند برابر است با

$$P\sqrt{1+\mu^2}$$

که μ ضریب اصطکاک است.

۱۳- زاویه سطح شیبداری با افق 20° است و قرار است که به کمک آن وزنه‌ای به جرم 100 kg را به طرف بالا بکشاند. ضریب اصطکاک موجود برابر 0.25 است. جهت و بزرگی حداقل نیروی لازم را پیدا کنید.

۱۴- دو سطح شیبدار، دارای یک رأس مشترک هستند. قرقره‌ای صیقلی به بالای رأس مشترک نصب شده است و نخ از شیار آن عبور کرده است. وزنه‌های مساوی به دو انتهای نخ متصل است. هر وزنه بر روی یکی از سطوح قرار دارد. اگر یکی از سطوح صیقلی و دیگری شیبدار باشد، وزنه‌ای که بر روی سطح صیقلی قرار دارد، در حال شروع حرکت به طرف پایین باشد، تعیین کنید چه رابطه‌ای میان زاویه‌های شیب دو سطح وجود دارد.

۱۵- دو سطح شیبدار، که ناصافی هر دو یکسان است، دارای یک رأس مشترک هستند و زاویه‌های شیب آنها با افق 60° و 30° است. بر این دو سطح نقاطی مادی که جرم آنها به ترتیب 2 kg و 1 kg است قرار دارند. این دو نقطه مادی به وسیله نخ سبکی که از شیار قرقره سبکی می‌گذرد که بالای دو سطح نصب شده است، به یکدیگر

متصل هستند. اگر وزنه سنگینتر در حال شروع به حرکت به طرف پایین باشد، نشان دهید که ضریب اصطکاک برابر $8 - \sqrt{3}$ است.

۱۶- وزنه‌ای به جرم 20 kg بر سطح شیبدار ناصافی که با افق زاویه 22° می‌سازد، قرار دارد. حداقل نیروی لازم که به طرف پایین در امتداد سطح شیبدار وارد می‌شود و سبب حرکت وزنه می‌گردد، برابر 24 N است. تعیین کنید: (الف) ضریب اصطکاک را؛ (ب) حداقل نیرویی را که در امتداد شیب سطح وارد می‌شود و سبب حرکت وزنه به طرف بالا می‌شود.

۱۷- در امتداد خط بزرگترین شیب یک سطح شیبدار ناصاف، که با افق زاویه α می‌سازد، به کمک نیرویی برابر P که با قسمت بالای سطح زاویه β می‌سازد، وزنه‌ای به جرم W به طرف بالا کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک برابر μ باشد، مقدار P را که موجب می‌شود، وزنه W درست در حال شروع به حرکت به طرف بالا گردد، تعیین کنید. کاری که به وسیله این نیروی P انجام می‌شود تا وزنه W به اندازه l در امتداد سطح شیبدار بالا برود، چقدر است؟ اگر $W = 50 \text{ N}$ ، $\alpha = 15^\circ$ ، $\beta = 30^\circ$ ، $\mu = 0.20$ ، $l = 30 \text{ m}$ باشد کار انجام شده را تعیین کنید.

۱۸- جسمی به وزن W که بر یک سطح شیبدار ناصاف قرار دارد، به وسیله نیروی افقی P نگاهداری می‌شود. این جسم را می‌توان به وسیله نیرویی برابر Q نیز، که در امتداد سطح شیبدار و به طرف بالا بر وزنه وارد می‌شود، نگاهداری کرد. کسینوس زاویه اصطکاک را فقط بر حسب P ، Q و W تعیین کنید.

۱۹- نقطه‌ای مادی به وزن W بر سطح شیبدار ناصافی که زاویه آن با افق از زاویه اصطکاک بیشتر است، قرار دارد. حداقل نیروی افقی لازم برای جلوگیری از حرکت وزنه به طرف پایین سطح، برابر W است. حداقل نیروی افقی لازم برای تولید حرکت به سمت بالا برابر $W/\sqrt{3}$ است. زاویه شیب و زاویه اصطکاک را تعیین کنید. بزرگی و جهت حداقل نیرویی که می‌تواند نقطه مادی را به حال تعادل نگاه دارد تعیین کنید.

۲۰- دو وزنه متساوی که به وسیله نخ به یکدیگر متصل هستند، بر سطح کره‌ای ناصاف به شعاع R ، به حال سکونند. یکی از وزنه‌ها در بالاترین نقطه کره است. اگر زاویه اصطکاک برابر α باشد و از اصطکاک نخ بتوان صرف نظر کرد، بزرگترین طول ممکن نخ را، تعیین کنید.

۲۱- قطعه چوبی به جرم 2 kg بر روی تخته‌ای افقی به طول $1/8 \text{ m}$ واقع است. تجربه نشان داده است که وقتی که انتهای تخته به اندازه $5/6 \text{ m}$ بالا بیايد قطعه چوب

شروع به لغزش می کند. ضریب اصطکاک را تعیین کنید. اگر ارتفاع قائم انتهای تخته به $m/9/5$ برسد، حداقل نیروی عمود بر تخته را که موجب نگاهداری تعادل می شود پیدا کنید.

۲۲- صفحه ای است که با افق زاویه 30° می سازد. بر روی آن وزنه ای به جرم 20 kg قرار دارد. نیرویی را تعیین کنید که اگر به موازات صفحه بروزنه وارد شود از لغزش وزنه به طرف پایین جلوگیری می کند. اگر صفحه ناصاف باشد و ضریب اصطکاک آن $\frac{1}{4}$ باشد، حداقل نیرویی که به موازات صفحه باید وارد کرد تا وزنه شروع به حرکت به طرف بالا بکند، چقدر است؟

۲۳- نیروی P که در امتداد سطح شیب دار ناصافی وارد می شود، برای نگاهداری جسم بر روی صفحه کافی است. زاویه اصطکاک که برابر λ است از α یعنی زاویه شیب سطح کمتر است. ثابت کنید که حداقل نیرویی که در امتداد سطح بر جسم وارد می شود و جسم را به طرف بالا شروع به کشاندن می کند برابر است با $P \frac{\sin(\alpha + \lambda)}{\sin(\alpha - \lambda)}$.

۲۴- جسمی به وزن W بر صفحه شیب داری که زاویه شیب آن با افق برابر α است قرار دارد. نشان دهید که حداقل بزرگی نیرویی که جسم را به طرف بالای سطح به حرکت در می آورد برابر $W \sin(\alpha + \lambda)$ است که λ ضریب اصطکاک است. اگر جهت نیرو ثابت نگاه داشته شود، نشان دهید که اگر $\alpha > \lambda$ باشد، بزرگی نیرو را می توان تا $\frac{W \sin(\alpha - \lambda)}{\sin 2\lambda}$ کاهش داد تا جسم به طرف پایین سطح شروع به حرکت کند.

استاتیک جسم صلب - نیروهای متوازی - گشتاور - زوج

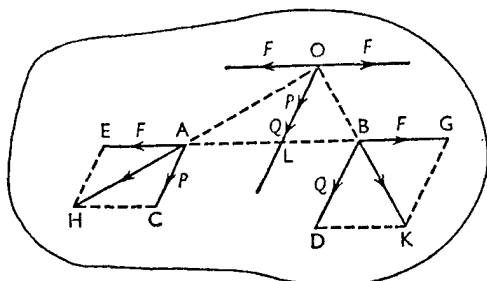
۱۰۱۱. در بخش قبلی اثر نیروها را بر يك نقطه مادی مورد توجه قرار دادیم. اکنون توجه خود را به اثر نیروها بر يك جسم صلب معطوف می‌داریم. بدیهی است که در این حالتها ممکن است مجبور باشیم بر ایندو نیرو را، که با هم موازی هستند و در يك راست نیستند، پیدا کنیم. چون چنین نیروهایی در يك نقطه برخورد نمی‌کنند، نمی‌توانیم برای آنها رامستقیماً با استفاده از متوازی‌الاضلاع نیروها به‌دست آوریم. با این همه، با توجه به قانون متوازی‌الاضلاع، به‌طوری که در دو بند بعدی بیان شده است، بر ایندو چنین نیروهایی را به‌دست می‌آوریم.

نیروهای متوازی را که در يك جهت اثر می‌کنند، همسو می‌نامیم، و وقتی نیروهای متوازی در جهتهای مخالف اثر می‌کنند، آنها را ناهمسو می‌نامیم.

۲۰۱۱. تعیین بر ایندو نیروی متوازی همسوه که بر يك جسم صلب اثر می‌کنند
فرض می‌کنیم P و Q نیروهایی باشند که بر نقاط A و B (شکل ۱۱-۱) از يك جسم اثر می‌کنند و فرض می‌کنیم که آنها را با خطوط AC و BD نمایش داده‌ایم.
در A و B دو نیروی مساوی و مخالف، F ، در امتداد خط AB تولید می‌کنیم و آنها را با AE و BG نمایش می‌دهیم. اعمال این نیروها در عمل نیروهای P و Q تغییری ایجاد نمی‌کنند، زیرا جسم را صلب فرض کرده‌ایم و نیروی F را که در A وارد می‌شود، می‌توان فرض کرد که به B منتقل شود و در آنجا با نیروی دیگر F به‌حال تعادل درآید. متوازی‌الاضلاعهای $AEHC$ و $BGKD$ را تکمیل می‌کنیم، و قطرهای HA و KB را امتداد می‌دهیم تا در O یکدیگر را قطع کنند. OL را به موازات AC یا BD رسم می‌کنیم تا AB را در L قطع کنند.

بر ایندو نیروهای P و F در A با AH نمایش داده می‌شود که ممکن است فرض کرد

که در O اثر می‌کند. به همین طریق برآیند Q و F در B با BK نمایش داده می‌شود که ممکن است فرض کرد که در O اثر می‌کند.



شکل ۱۱-۱

اکنون این نیروها را، که در O اثر می‌کنند، به مؤلفه‌های P در امتداد OL، F به موازات AE و Q در امتداد OL، F به موازات BG، تجزیه می‌کنیم. دو نیروی F در حال تعادلند.

پس نیروهای اصلی P و Q معادل با نیروی $(P+Q)$ هستند که در امتداد OL اثر می‌کند، یعنی به موازات جهت‌های اصلی P و Q و بر L واقع بر AB اثر می‌کند.

تعیین وضع نقطه L

مثلثهای OLA و ACH متشابهند.

$$\therefore \frac{OL}{LA} = \frac{AC}{CH} = \frac{P}{F}$$

$$\therefore P \cdot LA = F \cdot OL \quad (۱)$$

مثلثهای OLB و BDK متشابهند.

$$\therefore \frac{OL}{LB} = \frac{BD}{DK} = \frac{Q}{F}$$

$$\therefore Q \cdot LB = F \cdot OL \quad (۲)$$

بنابراین از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،

$$P \cdot LA = Q \cdot LB$$

یعنی نقطه L بر خط AB و در میان نقطه‌های A و B است و خط AB را به نسبت عکس نیروها تقسیم می‌کند.

بدیهی است که اگر $P=Q$ باشد، نقطه L وسط خط AB است.

تعیین وضع نقطه L

مثلثهای OLA و HEA متشابهند.

$$\therefore \frac{OL}{LA} = \frac{HE}{EA} = \frac{P}{F}$$

$$\therefore P \cdot LA = F \cdot OL$$

مثلثهای OLB و BDK متشابهند.

$$\therefore \frac{OL}{LB} = \frac{BD}{DK} = \frac{Q}{F}$$

$$\therefore Q \cdot LB = F \cdot OL$$

$$\therefore P \cdot LA = Q \cdot LB$$

یعنی L بر خط AB و خارج از نقطه‌های A و B است و خط AB را به نسبت عکس نیروها تقسیم می‌کند.

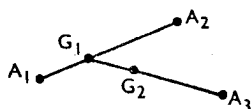
۴.۱۱. حالت خاص

در شکل مربوط به بند قبل، اگر $P=Q$ باشد، مثلثهای AEH و BGK از هر جهت متساوی هستند. در این حالت $\angle HAE = \angle GBK$ است، بنابراین خطوط AH و KB متوازی خواهند شد و در هیچ نقطه‌ای مانند O یکدیگر را قطع نمی‌کنند و نمی‌توان ترسیم را تا آخر ادامه داد. پس وقتی که دو نیروی مساوی و متوازی و ناهمسو بر یک جسم صلب اثر می‌کنند، نیروی منفردی معادل آنها وجود ندارد.

چنین جفت نیرویی را زوج می‌نامند. زوج نیروی توانی توان با چیزی ساده‌تر جانشین کرد. خواص زوجها را بعداً (۱۱-۱۴ و ۱۲-۱۶) مورد توجه قرار خواهیم داد.

۵.۱۱. مرکز نیروهای متوازی

فرض می‌کنیم مجموعه‌ای از نیروهای متوازی و همسوی $W_1, W_2, W_3, \dots$ بر نقاط $A_1, A_2, A_3, \dots$ (شکل ۱۱-۳) وارد شوند.



برایند نیروهای W_1 و W_2 که بر A_1 و A_2 وارد می‌شوند، برابر است با $W_1 + W_2$ و جهت دو نیرو هر چه باشد، همیشه از نقطه‌ای مانند G_1 که بر $A_1 A_2$ واقع است می‌گذرد (به‌طوری که $W_1 \cdot A_1 G_1 = W_2 \cdot G_1 A_2$) به همین طریق برایند نیروهای متوازی و همسوی $W_1 + W_2$ که بر G_1 وارد می‌شود و W_3 که بر A_3 وارد می‌شود $W_1 + W_2 + W_3$ است که همیشه از نقطه‌ای مانند G_4 واقع بر $G_1 A_3$ می‌گذرد، به طوری که

$$(W_1 + W_2) G_1 G_4 = W_3 \cdot G_4 A_3$$

پس، به فرض آنکه همه نیروها همسو و متوازی باشند، برایند آنها برابر مجموع نیروهاست و همیشه از نقطه‌ای می‌گذرد که وضع آن نسبت به نقاط $A_1, A_2, \dots$ ثابت است. وضع این نقطه به جهت مشترك نیروهای متوازی بستگی ندارد. این نقطه را مرکز نیروهای متوازی می‌نامند و بدیهی است که استدلال فوق در هر مورد چه نیروها در يك صفحه باشند و چه نباشند، صادق است.

۶.۱۱. یکی از کاربردهای مهم قضیه بند قبل در مورد وزن يك جسم است. هر نقطه مادی از ماده به طرف مرکز زمین جذب می‌شود. این نیروی جاذبه، متناسب با جرم نقطه مادی است و وزن نامیده می‌شود (بند ۳-۱۵ را ببینید).

جسم را ممکن است متشکل از نقاط مادی متعدد دانست، و اگر ابعاد جسم در مقایسه با زمین کوچک باشد، نیروهایی را که بر همه نقاط مادی آن جسم وارد می‌شود، ممکن است تقریباً متوازی فرض کرد.

در مورد اجسامی که ابعاد آن معمولی است، این نیروها را متوازی فرض خواهیم کرد.

بنابراین نقاط $A_1, A_2, \dots$ را در شکل ۱۱-۳ ممکن است نمایش دهنده نقاط مادی يك جسم در نظر گرفت و چون وزنهای این نقاط مادی، مجموعه‌ای از نیروهای متوازی تشکیل می‌دهند، برایند این نیروها (که مساوی وزن جسم است) همیشه از نقطه‌ای مانند G می‌گذرد که وضع آن نسبت به جسم ثابت است و بستگی به جهت جسم ندارد. این نقطه را مرکز ثقل یا مرکز جرم جسم می‌نامند.

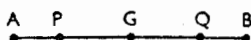
وضع مرکز ثقل اجسامی که شکلهای متفاوت دارند در بخش ۱۶ مورد توجه قرار خواهد گرفت. در آنجا خواهیم دید که این نقطه لزومی ندارد که داخل جسم باشد ولی غالباً چنین است.

تعیین وضع این نقطه در مورد بعضی از اجسام بسیار ساده است، مثلاً تعیین مرکز ثقل يك میله باریك، يك مستطیل، يك متوازی الاضلاع یا يك مثلث بسیار ساده است. چون این حالتها در بسیاری از مسائل روی می دهد، اکنون به مطالعه آنها می پردازیم.

۷.۱۱. مرکز ثقل يك میله باریك یکنواخت

چون میله یکنواخت است، طولهای متساوی از آن، هر قدر هم کوچک باشند، دارای وزنهاى متساوی هستند.

فرض می کنیم AB (شکل ۱۱-۴) نشان دهنده میله و G نقطه وسط آن باشد. نقطه ای مانند P بین G و A و نقطه ای مانند Q بین G و B اختیار می کنیم. به طوری که $PG = GQ$ باشد.



شکل ۱۱-۴

بدیهی است مرکز ثقل نقاط مادی متساوی از میله که در P و Q واقعند در G است، زیرا بر ایند نیروهای متوازی و همسو که در P و Q وارد می شوند از G می گذرد. نیز برای هر نقطه مادی مانند P که بین G و A است، نقطه مادی متساوی با آن به فاصله ای متساوی از G بین G و B وجود دارد. مرکز ثقل هر يك از این جفت نقاط مادی در G است و بنابراین مرکز ثقل تمام میله در G است.

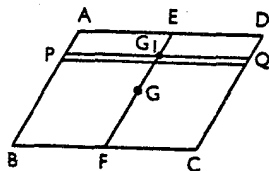
یادآوری می شود که جهتی که در آن جهت این نیروهای متوازی اعمال می شوند (اوزان نقاط مادی) تفاوتی ایجاد نمی کند، یعنی بر ایند اوزان همه نقاط مادی از G می گذرد، اگرچه وضع میله جا به جا شود.

۸.۱۱. مرکز ثقل تیغه نازکی که به شکل متوازی الاضلاع است

فرض می کنیم $ABCD$ (شکل ۱۱-۵) متوازی الاضلاع باشد. فرض می کنیم این متوازی الاضلاع به عده بسیاری نوارهای بسیار باریك، نظیر PQ ، به موازات AD ، تقسیم شده باشد.

هر يك از این نوارها را می توان میله باریك یکنواختی تصور کرد و مرکز ثقل آن در نقطه وسط آن یعنی G خواهد بود.

پس مرکز ثقل کل شکل، روی خطی واقع خواهد شد که نقاط وسط این نوارها را به یکدیگر متصل می‌کند، یعنی روی خط EF که وسطهای AD و BC را به هم وصل



شکل ۱۱-۵

می‌کند، قرار دارد. به همین طریق و با این تصور که شکل به نوارهایی موازی با AB تقسیم شده است، مشاهده می‌شود که مرکز ثقل باید بر خطی واقع شود که وسطهای AB و DC را به یکدیگر متصل می‌کند.

بنابراین مرکز ثقل در G ، یعنی محل تلاقی این خطوط، خواهد بود. البته G نقطه تلاقی قطرهای متوازی الاضلاع نیز هست.

۹.۱۱. مرکز ثقل تیغه مثلثی شکل نازک

فرض می‌کنیم ABC (شکل ۱۱-۶) تیغه مثلثی شکل باشد.

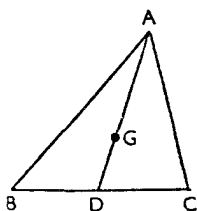
فرض می‌کنیم که این مثلث به عده بسیاری نوارهای بسیار نازک مانند B_1C_1 به موازات BC تقسیم شده است.

مرکز ثقل هر نوار در نقطه وسط آن نوار است. پس مرکز ثقل همه مثلث بر خطی واقع می‌شود که نقاط وسط نوارها را به هم وصل می‌کند، یعنی بر میانه AD واقع است. به همین طریق با فرض اینکه نوارها را به موازات AC بگیریم، مشاهده خواهیم کرد که مرکز ثقل بر میانه BE واقع است. بنابراین مرکز ثقل در G یعنی محل تلاقی میانه‌هاست.

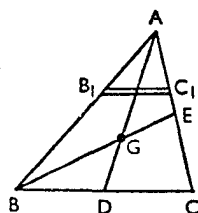
در هندسه دانسته‌ایم که این نقطه در $\frac{1}{3}$ هر میانه از قاعده است، یعنی $DG = \frac{1}{3}DA$.

۱۰.۱۱. مرکز ثقل هر تیغه مثلثی شکل مانند مرکز ثقل سه نقطه مادی متساوی است که در دئوس مثلث است.

فرض می‌کنیم ABC (شکل ۱۱-۷) تیغه باشد. برابند نیروهای متوازی و همسو،



شکل ۱۱-۷



شکل ۱۱-۶

که هر کدام برابر W است و بر B و C وارد می‌شوند، نیرویی است برابر $2W$ که به موازات آنهاست و بر D نقطه وسط BC اعمال می‌شود. برایندهای W که بر D اعمال می‌شود و W که بر A اعمال می‌شود، نیرویی است برابر $3W$ که بر G واقع بر AD اعمال می‌شود و نقطه G جایی است که $AG = 2GD$. پس G که مرکز ثقل سه نقطه مادی متساوی است که در A ، B و C قرار دارند بر AD واقع است و $GD = \frac{1}{3}AD$ ، یعنی در همان نقطه‌ای است که مرکز ثقل تیغه است.

تمرین ۱۰۱۱

- ۱ - نیروهای متوازی همسویه اندازه‌های 40 N و 70 N بر نقطه‌های A و B که به فاصله 22 cm از یکدیگرند، وارد می‌شوند. بزرگی برایندهای نقطه‌ای را که برایندهای AB را قطع می‌کند تعیین کنید. نیز اگر دو نیرو ناهمسو بودند، بزرگی برایندهای نقطه‌ای را که برایندهای آنها امتداد AB را قطع می‌کرد پیدا کنید.
- ۲ - نیروهای متوازی همسو به اندازه‌های 9 و 12 نیوتون بر نقطه‌های A و B که به فاصله 42 cm از یکدیگرند، وارد می‌شوند. بزرگی برایندهای آنها و نقطه‌ای را که برایندهای آنها، خط AB را قطع می‌کند، تعیین کنید. نیز اگر دو نیرو ناهمسو بودند، بزرگی برایندهای آنها و نقطه‌ای را پیدا کنید که این برایندهای امتداد خط AB را قطع می‌کرد.
- ۳ - نیروهای متوازی ناهمسو به اندازه‌های 12 و 8 نیوتون بر نقطه‌های A و B که به فاصله 12 cm از یکدیگرند، وارد می‌شوند. بزرگی برایندهای نقطه‌ای را پیدا کنید که این برایندهای امتداد AB را قطع می‌کند.
- ۴ - بزرگی برایندهای دو نیروی متوازی همسو، که یکی از آنها 8 N است، برابر 20 N است و این برایندها به فاصله 6 cm از نیروی 8 N وارد می‌شود. بزرگی نیروی دیگر و فاصله راستای آن را از نیروی 8 N تعیین کنید.

۵ - دو نیروی متوازی و همسو بر دو نقطه به فاصله ۴ متر از یکدیگر وارد می‌شوند و برآیند آنها 100 N است که در فاصله ۱ متری از یکی از نیروها وارد می‌شود. بزرگی این دو نیرو را تعیین کنید.

۶ - چهار نیروی متوازی همسو بر رئوس یک مربع وارد می‌شوند. نشان دهید که برآیند آنها از مرکز مربع می‌گذرد.

۷ - سه نیروی متوازی همسو بر رئوس یک مثلث وارد می‌شوند. نشان دهید که برآیند آنها از نقطه تلاقی میانه‌های مثلث می‌گذرد.

۸ - نیروهای متوازی همسو به بزرگی P ، P و $2P$ به ترتیب بر رئوس A ، B و C از مثلث ABC وارد می‌شوند. نشان دهید که برآیند آنها از نقطه وسط خطی که C را به نقطه وسط AB وصل می‌کند می‌گذرد.

۹ - P و Q نیروهای متوازی همسو هستند. اگر Q به موازات خودش حرکت کند و مسافتی به اندازه x طی کند، ثابت کنید که برآیند P و Q به اندازه $\frac{Qx}{P+Q}$ جابجایی می‌شود.

۱۰ - سه نیروی متوازی همسو بر نقاط وسط اضلاع یک مثلث وارد می‌شوند. دهید که برآیند آنها از نقطه تلاقی میانه‌های مثلث می‌گذرد.

۱۱ - نیروهای متوازی همسو به بزرگیهای ۴، ۲، ۴ واحد به ترتیب بر رئوس A ، B و C از مربع $ABCD$ وارد می‌شوند. بزرگی نیروی متوازی دیگر که باید بر رأس D مربع وارد شود تا برآیند چهار نیرو از مرکز مربع بگذرد چقدر است؟ اگر بر D نیروی متوازی همسویی وارد شود که بزرگی آن ۵ واحد است، وضع راستای برآیند را پیدا کنید.

۱۲ - نیروهای متوازی همسو به بزرگی ۲، ۵، ۳ نیوتون به ترتیب بر رئوس A ، B و C از مثلث ABC وارد می‌شوند. در این مثلث $AB = 4\text{ cm}$ ، $BC = 3\text{ cm}$ ، $CA = 5\text{ cm}$ است. راستای برآیند را تعیین کنید.

۱۱.۱۱. گشتاور یک نیرو

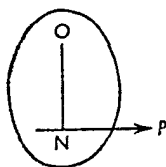
یک مجموعه نیرو که بر یک جسم صلب اثر می‌کنند ممکن است مایل باشند که آن جسم را بچرخانند.

اگر تنها یک نیرو بر جسم صلبی که یک نقطه آن ثابت است، وارد شود، در این صورت، جز در حالتی که راستای نیرو از نقطه ثابت جسم می‌گذرد، جسم مایل است که

حول آن نقطه بچرخد*. این موضوع، تصور اثر چرخانندگی یا گشتاور يك نیرو را، که معمولاً به صورت زیر بیان می شود، به وجود می آورد:

گشتاور يك نیرو حول يك نقطه معین برابر است با حاصل ضرب نیرو در فاصله قائم آن نقطه از راستای نیرو.

پس گشتاور نیروی P ، که راستای آن مطابق شکل ۸-۱۱ است، حول نقطه O ، برابر است با $P \times ON$ که ON فاصله قائم O از راستای P است. بدیهی است که اگر راستای P از نقطه O بگذرد، گشتاور آن حول این نقطه صفر است. اگر O نقطه ای ثابت از جسم باشد، که مقطع آن با يك صفحه، شامل O است و راستای P همان راستایی باشد که در شکل نشان داده شده است، حاصل ضرب $P \times ON$ اندازه تمایل P را به چرخاندن جسم در حول O نشان می دهد. قدرت چرخانندگی چه با افزایش P و چه با افزایش فاصله O از افزایش می یابد.



شکل ۸-۱۱

گشتاور يك نیرو حول يك نقطه معین ممکن است مثبت یا منفی باشد و این بستگی به آن دارد که نیرو در چه جهتی مایل است جسم را حول آن نقطه بچرخاند.

در شکل بالا نیروی P مایل است که جسم را در جهتی مخالف جهت حرکت عقربه های ساعت بچرخاند. در این حالتها گشتاور را مثبت می گویند. اگر نیرو مایل باشد که جسم را در جهت حرکت عقربه های ساعت بچرخاند، گشتاور را منفی می گویند.

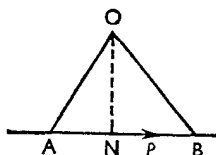
وقتی که چند نیرو بريك جسم وارد می شوند، مجموع جبری گشتادهای آنها را با تعیین مقدار گشتاور هر نیرو و با توجه به علامت آن و افزودن آنها به یکدیگر، به دست می آوریم. گشتاور يك نیرو، هم دارای بزرگی است و هم دارای جهت است، و بنابراین يك کمیت برداری است.

واحد گشتاور يك نیرو برابر است با واحد نیرو ضرب در واحد طول، یعنی نیوتون-متر است.

* درست تر آن که، در نقطه ای که جسم ثابت است، نیروهای دیگر وارد عمل می شوند.

۱۲.۱۱. نمایش ترسیمی يك گشتاور

اگر طول AB که در راستای نیروی P است (شکل ۱۱-۹) معرف بزرگی P باشد، در این صورت گشتاور P حول O با $AB \times ON$ نشان داده می‌شود.



شکل ۱۱-۹

اما مساحت مثلث AOB برابر است با $\frac{1}{2} AB \times ON$ ، بنابراین دو برابر مساحت مثلث AOB برابر گشتاور P حول نقطه O است. اکنون می‌توانیم با استفاده از این روش ترسیمی که برای نمایش گشتاور به کار برده می‌شود، قضیه اساسی گشتاورهای نیروهای متقارب را ثابت کنیم.

۱۳.۱۱. مجموع جبری گشتاورهای دو نیرو حول هر نقطه‌ای که در صفحه آن نیروها باشد، برابر است با گشتاور برآیند آن نیروها حول آن نقطه. (قضیه وادینیون)
دو حالت وجود دارد که باید در نظر گرفت:

(۱) فرض می‌کنیم که نیروها در يك نقطه برخورد کنند.

فرض می‌کنیم که نیروهای P و Q ، مطابق شکل‌های ۱۱-۱۵ الف و ب، بر A وارد شوند و نیز O نقطه‌ای است واقع در صفحه این دو نیرو.

OC را به موازات امتداد P رسم می‌کنیم تا راستای Q را در C قطع کند. فرض می‌کنیم که AC نشان دهنده بزرگی Q و با همین مقیاس AB نشان دهنده P باشد. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را تکمیل می‌کنیم، و OA را به OB وصل می‌کنیم.

AD نشان دهنده R برآیند P و Q است.

در هر يك از شکل‌ها،

گشتاور P حول O با ΔAOB نمایش داده می‌شود،

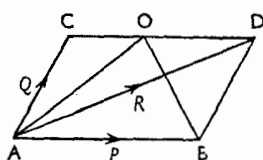
گشتاور Q حول O با ΔAOC نمایش داده می‌شود،

گشتاور R حول O با ΔAOD نمایش داده می‌شود،

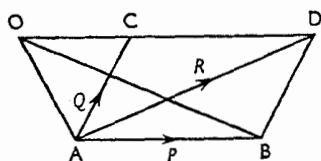
نیز $\Delta AOB = \Delta ADB = \Delta ADC$.

در شکل ۱۱-۱۵ الف، گشتاورها هردو مثبت هستند و مجموع جبری آنها به صورت

زیر نمایش داده می شود:



شکل ۱۱-۱۰ ب



شکل ۱۱-۱۰ الف

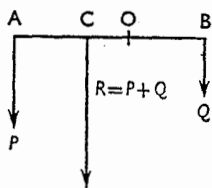
$$2\triangle AOB + 2\triangle AOC = 2\triangle ADC + 2\triangle AOC \\ = 2\triangle OAD = R \text{ گشتاور}$$

در شکل ۱۰-۱۱ ب، گشتاورها در جهت‌های مخالفند، یعنی گشتاور P مثبت و گشتاور Q منفی است؛ مجموع جبری آنها به صورت زیر نمایش داده می شود:

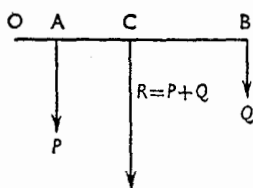
$$2\triangle AOB - 2\triangle AOC = 2\triangle ADC - 2\triangle AOC \\ = 2\triangle OAD = R \text{ گشتاور}$$

(۲) فرض می کنیم که نیروها متوازی باشند.

فرض می کنیم P و Q نیروهای متوازی ای باشند که مطابق شکل‌های ۱۱-۱۱ الف و ب وارد می شوند و O نقطه ای از صفحه آنها باشد.



شکل ۱۱-۱۱ ب



شکل ۱۱-۱۱ الف

OAB را عمود بر نیروها رسم می کنیم تا راستاهای آنها را در نقطه‌های A و B قطع کند.

برایند R (که مساوی $P+Q$ است) به موازات P و Q است، و بر نقطه C از AB طوری وارد می شود که

$$P \cdot AC = Q \cdot CB$$

در شکل ۱۱-۱۱ الف، مجموع جبری گشتاورهای P و Q حول O برابر است با

$$\begin{aligned}
 & P \cdot OA + Q \cdot OB \\
 &= P(OC - AC) + Q(OC + CB) \\
 &= (P + Q)OC - P \cdot AC + Q \cdot CB \\
 &= (P + Q)OC \\
 &= \text{گشتاور } R \text{ حول } O
 \end{aligned}$$

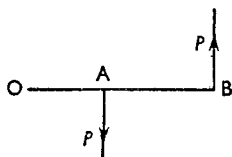
در شکل ۱۱-۱۱ ب، مجموع جبری گشتاورهای P و Q حول O برابر است با

$$\begin{aligned}
 & P \cdot OA - Q \cdot OB \\
 &= P(OC + AC) - Q(BC - OC) \\
 &= (P + Q)OC + P \cdot AC - Q \cdot BC \\
 &= (P + Q)OC \\
 &= \text{گشتاور } R \text{ حول } O
 \end{aligned}$$

۱۴.۱۱. اگر نیروها تشکیل یک زوج بدهند برابند وجود ندارد و قضیه صادق نیست. در این حالت به آسانی می‌توان ثابت کرد که مجموع گشتاورهای نیروهایی که تشکیل یک زوج نیرو را داده‌اند، حول هر نقطه‌ای که در صفحه این نیروها واقع باشد، مقداری است ثابت.

فرض می‌کنیم P ، P زوج نیرویی باشد که مطابق شکل ۱۱-۱۲ وارد شده‌اند و O نقطه‌ای از صفحه این دو نیرو باشد.

OAB را عمود بر این دو نیرو رسم می‌کنیم تا راستاهای آنها را در A و B قطع کند.



شکل ۱۱-۱۲

مجموع گشتاورها حول O برابر است با

$$\begin{aligned}
 & P \cdot OB - P \cdot OA \\
 &= P(OB - OA) \\
 &= P \cdot AB
 \end{aligned}$$

یعنی بستگی به محل نقطه O ندارد.

حاصل ضرب $P \cdot AB$ ، که در آن P بزرگی هر یک از نیروهای زوج است، و AB

فاصله قائم میان نیروهاست، گشتاور زوج نامیده می‌شود.

باید توجه داشت که گشتاور یک زوج برابر است با گشتاور هر یک از دو نیروی زوج حول هر نقطه‌ای که بر راستای نیروی دیگر واقع است و بسته به جهت دوران زوج، ممکن است مثبت یا منفی باشد.

۱۵.۱۱. واضح است که قضیه وارینیون را می‌توان برای هر چند نیرو که دارای یک برآیند باشند، تعمیم داد. زیرا قضیه برای هر دو نیرویی که تشکیل زوج نیرو نمی‌دهند صادق است. بنابراین برای برآیند این دو نیرو و نیروی دیگر، اگر با هم تشکیل زوج ندهند، صادق است. همین‌طور برای برآیند دو نیروی اخیر با نیروی دیگر با همان شرایط صادق است. پس قضیه برای آخرین نیرو و برآیند بقیه نیروها صادق است و می‌توان اصل گشتاورها را به صورت زیر بیان کرد:

اگر چند نیروی واقع در یک صفحه بزرگ جسم صلب وارد شوند و دارای برآیند باشند، مجموع جبری گشتاورهای آنها حول هر نقطه‌ای، واقع در صفحه نیروها، برابر است با گشتاور برآیندشان حول این نقطه.

۱۶.۱۱. اگر دستگاهی از نیروهای واقع در یک صفحه در حال تعادل باشند، برآیندشان صفر است، و بنابراین گشتاور آنها حول هر نقطه باید صفر باشد.

پس، وقتی که یک دستگاه نیروهای واقع در یک صفحه در حال تعادل باشند، مجموع جبری گشتاورهای آنها حول هر نقطه واقع در صفحه آنها صفر است.

لزوماً عکس این مطلب درست نیست. زیرا گشتاور نیرو نسبت به هر نقطه‌ای که بر راستای نیرو واقع است صفر است، پس گشتاور یک دستگاه نیروهای واقع در یک صفحه، حول هر نقطه‌ای که بر راستای نیروی برآیند واقع است صفر است. بنابراین وقتی که می‌گوییم مجموع گشتاورهای یک دستگاه نیروهای واقع در یک صفحه حول یک نقطه صفر است، لازم نیست که آن دستگاه به حال تعادل باشد، چه ممکن است که این نقطه بر راستای برآیند دستگاه واقع باشد.

تمرین ۲۰.۱۱

۱ - ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر ۸ cm است. نیروهای ۲، ۴ و ۸ نیوتون در امتداد اضلاع AB، BC و CA اثر می‌کنند. گشتاور این دستگاه نیروها را حول هر یک از رئوس مثلث تعیین کنید.

۲ - چهار نیرو که بزرگی آنها ۳، ۴، ۵ و ۶ نیوتون است به ترتیب در امتداد اضلاع مربعی به ضلع 20 cm و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت اثر می‌کنند. گشتاورهای این نیروها را حول: (الف) مرکز مربع، (ب) محل تلاقی نیروهای 3 N و 6 N به دست آورید.

۳ - در امتداد اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع 2 m نیروهای ۴، ۵ و ۶ نیوتون به ترتیب در جهت‌های BC ، CA و AB اثر می‌کنند. مجموع گشتاورهای این نیروها را حول نقطه تلاقی میانه‌های این مثلث تعیین کنید.

۴ - نیروهای ۲، ۴، ۲ و ۴ نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع AB ، CB ، DC و DA از مربع $ABCD$ به ضلع 3 m اثر می‌کنند. مجموع گشتاورهای این نیروها را حول: (الف) مرکز مربع، (ب) نقطه A ، به دست آورید.

۵ - بر یک خط افقی از چپ به راست به ترتیب نقاط A ، B ، C و D قرار گرفته‌اند. فاصله هر یک از این نقاط از نقطه مجاور 1 m است. بر B نیرویی برابر 2 N و عمود بر AD به طرف پایین اثر می‌کند. بر C نیرویی برابر 4 N به طرف بالا طوری اثر می‌کند که با جهت CD زاویه 30° می‌سازد. بر D نیرویی معادل یک نیوتون عمود بر AD به طرف بالا اثر می‌کند. مجموع گشتاورهای این نیروها را حول (الف) A ، (ب) C تعیین کنید.

۶ - نیروهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع BC ، CD ، DE ، EF و FA از یک شش ضلعی منظم وارد می‌شوند. اگر طول ضلع این شش ضلعی 2 cm باشد، مجموع گشتاورهای نیروها را حول: (الف) مرکز شش ضلعی، (ب) A تعیین کنید.

۱۷۰۱۱. اصل گشتاورها اهمیت فوق‌العاده دارد و پیوسته در بقیه کتاب از آن استفاده خواهد شد. در این بخش، مورد استفاده آن را در چند حالت ساده در نظر می‌گیریم، که در آن میله‌ای صلب بر تکیه گاههایی قرار دارد یا حول لولایی می‌چرخد و بر آن علاوه بر نیروی وزن، نیروهای دیگری وارد می‌شوند.

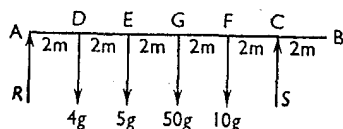
به جای آنکه مجموع جبری گشتاورها را برابر صفر بگیریم، غالباً بهتر است که مجموع جبری گشتاورهایی را که در یک جهت حول نقطه‌ای اثر می‌کنند با مجموع جبری گشتاورهایی که در جهت مخالف حول آن نقطه اثر می‌کنند برابر بگیریم.

باید در اینجا توجه داشت که اصل گشتاورها و نتیجه‌هایی را که از آن به دست می‌آید، و بعداً در این بخش ذکر خواهد شد، می‌توان به طرد تجربی تحقیق کرد، و آن با اعمال

نیروهای معین بر یک جسم صلب، نظیر یک میله، و اندازه گیریهای مناسب امکانپذیر است. همان طور که در بنده ۱-۵ پیشنهاد شد، اصل گشتاورها را می توان به عنوان مبنای استاتیک به کار برد و در واقع علم استاتیک از این نقطه شروع به گسترش کرده است.

مثال ۱: میله یکنواخت AB، به طول ۱۲ مترو جرم ۵۰ kg بر روی دو پایه قرار دارد. یکی از پایه ها در A و دیگری در دو متری B است. وزنه های ۵، ۴ و ۱۰ کیلوگرمی به ترتیب در ۲ متری، ۴ متری و ۸ متری از A متصل شده اند. نیروهای را تعیین کنید که بر پایه ها فشار می آورند.

حل: فرض می کنیم C (شکل ۱۱-۱۳) محل پایه دیگر است و G مرکز ثقل میله است و D، E، F و نقطه هایی هستند که وزنه ها به آنها متصل شده اند، و عکس العملهای در A و B برابر R و S نیوتون هستند.



شکل ۱۱-۱۳

وزن میله برابر ۵۰ g N است و بر G وارد می شود. وزنهایی که بر D، E، F وارد می شوند به ترتیب ۴ g، ۵ g و ۱۰ g هستند. حول A گشتاور می گیریم،

$$\begin{aligned} 10S &= 4g \times 2 + 5g \times 4 + 50g \times 6 + 10g \times 8 \\ &= (8 + 20 + 300 + 80)g \\ &= 408g \end{aligned}$$

$$\therefore S = 408g = 399.8$$

حول C گشتاور می گیریم،

$$\begin{aligned} 10R &= 10g \times 2 + 50g \times 4 + 5g \times 6 + 4g \times 8 \\ &= (20 + 200 + 30 + 32)g \\ &= 282g \end{aligned}$$

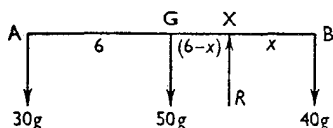
$$\therefore R = 282g = 276.4$$

چون می دانیم که مجموع R و S باید مساوی مجموع همه وزنها (حتی

وزن میله) باشد، ممکن بود که R را با تفریق کردن S از مجموع وزنها (یعنی 69 g) به دست آوریم. اما عملاً بهتر است که هریک از عکس‌العملها را جداگانه به دست آوریم و از این واقعیت که مجموع آنها باید برابر مجموع وزنها باشد برای تحقیق درستی جوابهای به دست آمده استفاده کنیم، چه اگر اشتباهی در محاسبات عکس‌العمل اول رخ داده باشد، هر دو جواب غلط خواهند بود.

مثال ۲: میله یکنواختی است به طول 12 m و جرم 50 kg . وزنه‌های 30 و 40 کیلوگرمی به دو انتهای میله متصل شده‌اند. در چه نقطه‌ای از میله باید پایه‌ای قرار داد تا میله به طور افقی قرار گیرد؟

حل: فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۱-۱۴) نمایش میله و G مرکز ثقل آن باشد. نقطه مطلوب X ، نقطه‌ای است که گشتاورهای وزنه‌های 30 ، 40 ، و 50 کیلوگرم، حول آن به حال تعادلند. بنابراین باید در X بر میله نیرویی برابر R اعمال شود و میله را نگاه دارد. R باید قائم و برابر 120 g N باشد.



شکل ۱۱-۱۴

فرض می‌کنیم BX برابر x متر باشد. حول X گشتاور می‌گیریم،

$$40x = 50(6-x) + 30(12-x) \\ = 300 - 50x + 360 - 30x$$

$$\therefore 120x = 660$$

$$\therefore x = 5.5\text{ m}$$

محل X را می‌توانیم با تعیین گشتاورهای همه نیروها حول یکی از دو انتهای میله به دست آوریم.

پس، حول B گشتاور می‌گیریم،

$$Rx = 50\text{ g} \times 6 + 30\text{ g} \times 12 \\ = (300 + 360)\text{ g}$$

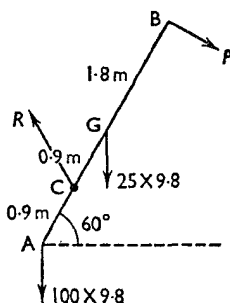
$$\therefore 120x = 660$$

$$\therefore x = 5.5\text{ m}$$

مثال ۳: میله یکنواخت AB، به طول $3/6 \text{ m}$ و جرم 25 kg در نقطه‌ای به فاصله $5/9 \text{ m}$ از A لولا شده است. وزنه‌ای به جرم 100 kg از A آویزان است. چه نیرویی باید بر B و در جهت عمود بر میله وارد شود تا میله به حال تعادل طوری قرار گیرد که A زیر B باشد و زاویه AB با افق برابر 60° باشد؟

حل: فرض می‌کنیم G (شکل ۱۱-۱۵)، نقطه وسط میله و C محل لولا باشد. فرض می‌کنیم عکس‌العملی که در لولا بر میله وارد می‌شود R نیوتون باشد. میله هنگامی به حال تعادل است که مجموع گشتاورهای وزن میله که به طور قائم بر G وارد می‌شود و نیروی P نیوتون که بر B عمود بر AB وارد می‌شود، حول نقطه C برابر گشتاور نیروی 980 N حول C باشد. برای به دست آوردن گشتاورهای نیروها حول C باید فاصله‌های قائم‌راستهای آنها را از C تعیین کنیم.

فاصله قائم‌راستای 980 N برابر است با $5/45 \text{ m}$ با $5/9 \cos 60^\circ = 5/45 \text{ m}$ و این برابر فاصله راستای نیروی 245 N نیز هست.



شکل ۱۱-۱۵

فاصله قائم‌راستای P از C برابر است با $2/7 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \therefore 2/7P + 245 \times 5/45 &= 980 \times 5/45 \\ \therefore 2/7P &= 735 \times 5/45 \\ \therefore P &= 122.5 \end{aligned}$$

تمرین ۳۰۱۱

۱ - میله‌ای یکنواخت به طول $1/8 \text{ m}$ و جرم 10 kg به طور افقی بر دو پایه در دو انتهای خود قرار دارد. اگر وزنه‌ای به جرم 3 kg به نقطه‌ای در $1/2 \text{ m}$ از یکی

از دو انتهای میله متصل شود، تعیین کنید که چه نیرویی بر پایه‌ها فشار می‌آورد.

۲ - میله یکنواخت AB به طول 10 m و جرم 40 kg بر روی دو پایه قرار دارد. یکی از پایه‌ها در A و دیگری در 2 m متری B است. اگر وزنه‌ای به جرم 20 kg به 6 m متری نقطه A به میله متصل شود، نیروهایی را که بر پایه‌ها فشار می‌آورد تعیین کنید.

۳ - دو نفر وزنه‌ای به جرم 100 kg را که از میله‌ای سبک آویزان است حمل می‌کنند. بلندی میله $2/4\text{ m}$ است و هر یک از دو انتهای میله بر روی شانه یکی از دو نفر قرار دارد. وزنه از نقطه‌ای از میله آویزان شده است که به یکی از دو نفر $5/6\text{ m}$ نزدیکتر است. نیرویی که بر شانه هر یک از دو نفر فشار می‌آورد چقدر است؟

۴ - میله یکنواختی است به طول 3 m متر که به یکی از دو انتهای آن وزنه‌ای به جرم 25 kg آویزان است. این میله حول نقطه‌ای که در $5/9\text{ m}$ متری این انتهاست در وضع افقی قرار دارد. وزن میله را تعیین کنید.

۵ - از میله AB به طول $1/8\text{ m}$ ، وزنه‌های 1 kg ، 2 kg ، 3 kg و 4 kg آویزانند. جرم میله 3 kg است. دو انتهای این میله بر روی دو پایه واقع است. وزنه‌های مذکور به ترتیب در $5/3\text{ m}$ ، $5/6\text{ m}$ ، $5/9\text{ m}$ و $1/2\text{ m}$ از A آویزانند. نیروهایی را که بر پایه‌ها فشار می‌آورند تعیین کنید.

۶ - وزنه‌های 1 kg ، 2 kg ، 3 kg و 4 kg از میله یکنواختی به طول $1/5\text{ m}$ متر که جرم آن 3 kg است آویزانند. فاصله‌های این وزنه‌ها از یکی از دو انتها به ترتیب $5/3\text{ m}$ ، $5/6\text{ m}$ ، $5/9\text{ m}$ و $1/2\text{ m}$ هستند. محل نقطه‌ای را پیدا کنید که میله حول آن نقطه به حال تعادل خواهد بود.

۷ - بزرگی و راستای براینده نیروهای متوازی 3 kg ، 6 kg و 8 kg واحد را که در یک جهت و نیروی 12 kg واحد را که در جهت مخالف به ترتیب بر نقاط A ، B ، C و D وارد می‌شوند تعیین کنید. نقاط A ، B ، C و D بر یک استقامت واقعند و $AB = 1\text{ m}$ ، $BC = 3\text{ m}$ ، $CD = 5\text{ m}$.

۸ - میله AB به طول 3 m و جرم 3 kg در A و نقطه‌ای دیگر بر روی دو پایه قرار دارد. وزنه‌ای به جرم 1 kg به AB آویزان است. وزنه‌های 5 kg و 4 kg به ترتیب در 1 m متری و 2 m متری B آویزانند. اگر نیرویی که بر پایه A فشار می‌آورد 40 N باشد، پایه دیگر در کجا واقع است؟

۹ - میله یکنواخت سنگینی به طول $3/6\text{ m}$ و جرم 30 kg با دو نخ قائم به وضع افقی آویزان است. هر یک از این نخ‌ها فقط می‌توانند حداکثر، کششی برابر 196 N تحمل

کنند. در چه فاصله‌ای از مرکز می‌توان وزنه‌ای به جرم $7/5 \text{ kg}$ آویزان کرد بی‌آنکه هیچ يك از نخها پاره شوند.

۱۰- میله یکنواخت AB به جرم 3 kg و طول 75 cm بر روی دو پایه C و D ، که به فاصله‌های 10 cm و 60 cm از A واقعند، قرار دارد، بر نقاط E و F که به ترتیب به فاصله‌های 20 cm و 50 cm از A واقعند، به ترتیب وزنه‌هایی به جرم 7 kg و 2 kg آویزان می‌کنیم. عکس‌العملهایی را که در C و D وارد می‌شوند و گشتاور همه نیروهایی را که در طرف راست نقطه وسط میله وارد می‌شوند، حول این نقطه تعیین کنید.

۱۱- میله‌ای یکنواخت، به طول $1/8 \text{ m}$ و جرم 1 kg است. دو انتهای این میله بر روی دو پایه قرار دارد و میله در وضع افقی است. هر يك از پایه‌ها حداکثر می‌تواند وزنه‌ای به جرم 6 kg را تحمل کند و بیشتر از آن را نمی‌تواند تحمل کند. تعیین کنید در چه قسمتی از میله می‌توان وزنه‌ای به جرم $8/5 \text{ kg}$ قرار داد، بدون آنکه پایه‌ها از هم بپاشند.

۱۲- مسافری به وزن W در داخل اتوبوسی است که فاصله میان فنرهای عقبی آن با فنرهای جلویی آن برابر b است. ثابت کنید که اگر این مسافر، در داخل اتوبوس، مسافتی برابر a جلو برود، وزنی معادل $W \frac{a}{b}$ از روی فنرهای عقبی به فنرهای جلویی منتقل می‌شود.

۱۳- میله یکنواختی به طول $0/6 \text{ m}$ و جرم 17 kg با دو نخ قائم آویزان است. یکی از نخها در $7/5 \text{ cm}$ از یکی از دو انتها بسته شده است و حداکثر می‌تواند وزنه‌ای به جرم 9 kg تحمل کند. نخ دیگر، که حداکثر می‌تواند وزنه‌ای به جرم 10 kg تحمل کند، در 10 سانتیمتری انتهای دیگر بسته شده است. اکنون وزنه‌ای به جرم $1/7 \text{ kg}$ به میله متصل می‌کنیم. حدود محلهایی را که این وزنه را می‌توان به میله متصل کرد بدون آنکه نخها پاره شوند، تعیین کنید.

۱۴- نیروهای متقارب 10 ، 3 ، 7 واحد که در يك صفحه واقعند، به طور قائم به طرف بالا وارد می‌شوند. فاصله این نیروها از نقطه ثابت O ، که در صفحه آنها واقع است، به ترتیب 5 ، 9 ، $-$ ، 2 متر است. فاصله‌ها از چپ به راست نقطه O مثبت فرض شده‌اند. نیرویی برابر 20 واحد به طور قائم و به طرف پایین بر نقطه O وارد می‌شود. برایندها را تعیین کنید. اگر نیرویی که از O می‌گذرد برابر 30 واحد شود، برایندها چقدر خواهد شد؟

۱۵- مرکز ثقل میله AB به طول $a+b$ و وزن W در فاصله a از A است. این میله بر روی لبه‌های دو چاقوی متوازی که به فاصله c از یکدیگرند و لبه‌های آنها در همان صفحه افقی میله است قرار دارد. دو جزء میله که خارج از هر لبه چاقو است با هم برابرند. ثابت کنید که نیروهایی که بر لبه‌های چاقوها فشار وارد می‌آورند به ترتیب برابرند با

$$\frac{(b-a+c)W}{2c} \quad \text{و} \quad \frac{(a-b+c)W}{2c}$$

۱۶- میله یکنواخت سنگینی به جرم 10 kg و طول $1/2 \text{ m}$ در وضعی متقارن بر روی دو پایه که به فاصله $0/9 \text{ m}$ از یکدیگرند قرار دارد. اکنون وزنه‌ای به جرم 2 kg به یکی از دو انتهای میله آویزان می‌کنیم. نیرویی را که بر هر یک از دو پایه فشار وارد می‌آورد تعیین کنید.

۱۷- میله افقی سبکی به طول 30 cm بر روی دو پایه قائم، که هر یک به فاصله $7/5 \text{ cm}$ از یک انتهای میله است، قرار دارد. به هر یک از دو انتهای میله وزنه‌ای به جرم 16 kg آویزان است. چه وزنه‌هایی به دو انتها آویزان کنیم تا نیرویی که بر یکی از پایه‌ها فشار می‌آورد دوبرابر و نیرویی که بر پایه دیگر فشار می‌آورد نصف نیرویی باشد که از طرف وزنه 16 kg وارد می‌شد.

۱۸- ۴ متر از تخته چوبی به طول 12 متر و جرم 100 kg بیرون از لبه پشت بام است. چه وزنه‌ای باید بر روی انتهای دیگر چوب قرار داد تا شخصی به جرم 75 kg بتواند بدون آنکه چوب به طرف پایین شیب پیدا کند روی چوب قدم بزند؟

۱۹- تیر افقی ABCD بر روی دو پایه در B و C قرار دارد. $AB=BC=CD$. معلوم شده است که اگر وزنه‌ای به جرم p کیلوگرم از A یا وزنه‌ای به جرم q کیلوگرم از D آویزان شود، تیر تعادل خود را از دست می‌دهد. جرم تیر آهن را تعیین کنید و ثابت کنید که مرکز ثقل آن AD را به نسبت $2p+q$ به $p+2q$ تقسیم می‌کند.

۲۰- طول تیر یکنواخت AB برابر $1/8 \text{ m}$ و جرم آن 24 kg است. این تیر بر روی دو پایه قائم در C و D قرار دارد. CD برابر $0/9 \text{ m}$ است و نیرویی که بر C فشار می‌آورد دو برابر نیرویی است که بر D فشار می‌آورد. طولهای AC و DB را، به فرض اینکه A به C نزدیکتر است تا به D، تعیین کنید.

۲۱- تیر یکنواختی که در وضعی افقی قرار دارد، در نقطه‌ای به فاصله $0/6 \text{ m}$ از یک انتها بر روی پایه‌ای قرار دارد و به این انتها وزنه‌ای به جرم 10 kg آویزان است.

نیروی که بر تکیه گاه فشار می آورد برابر 300 N است. جرم و طول تیر را تعیین کنید.

۲۲- میله سنگین $ABGCD$ ، که جرم آن 12 kg و مرکز ثقل آن G است، با دو نخ که به B و C متصل هستند آویزان است. هر یک از این دو نخ فقط می تواند وزن میله را تحمل کند. $AB = 5\text{ cm}$ ، $BG = 7/5\text{ cm}$ ، $GC = 10\text{ cm}$ و $CD = 7/5\text{ cm}$ است. کشش نخها را، هنگامی که وزنه هایی به جرمهای M_1 و M_2 کیلوگرم به ترتیب از A و D آویزان است، تعیین کنید، و مقدار M_1 و M_2 را هنگامی که هر دو نخ در حال پاره شدن هستند به دست آورید.

۲۳- میله یکنواختی به طول $3/6\text{ m}$ و جرم 25 kg بر روی دو پایه قرار دارد. فاصله هر پایه از یک انتها برابر فاصله پایه دیگر از انتهای دیگر است. حداکثر فاصله این دو پایه را هنگامی تعیین کنید که شخصی به جرم 77 kg بتواند در هر جای میله بدون آنکه خطر چرخش میله وجود داشته باشد بایستد.

۲۴- تیغه مسطح یکنواختی به شکل شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ می تواند آزادانه در صفحه خودش که قائم است، حول مرکز O دوران کند. جرمهای 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 کیلوگرم به ترتیب به رئوس A ، B ، C ، D ، E و F متصل شده اند. برای آنکه دستگاه به حال تعادل باشد انحراف AD از خط قائم مکان چقدر است؟

۲۵- میله افقی سبکی است به طول 6 m . بر سه نقطه از میله که به ترتیب $5/9\text{ m}$ ، $2/1\text{ m}$ و $4/5\text{ m}$ از یک انتها قرار دارند سه وزنه 10 کیلوگرمی آویزان می کنیم. بر نقطه وسط این میله نیرویی برابر 49 N به طرف بالا وارد می شود. بر ایند این نیروهای متوازی را که بر میله وارد می شوند تعیین کنید، و اگر میله در دو انتهای خود بر روی پایه هایی قرار گیرد، نیرویی را که بر هر پایه فشار وارد می آورد نتیجه بگیرید.

۱۸۰۱۱. اهرم

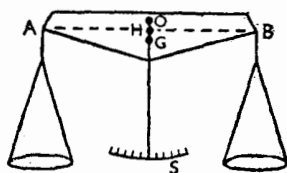
اهرم اساساً از میله صلبی تشکیل یافته است که می تواند حول نقطه ای ثابت به نام تکیه گاه بچرخد. همان طور که قبلاً اشاره شد ($10-5$)، اصل اهرم به وسیله ارشمیدس ($287-212$ ق. م.) شناخته شده بود و تا قرن شانزدهم، تا وقتی که متوازی الاضلاع نیروها کشف شد، اصل اساسی استاتیك بود.

این اصل به طور ساده اصل گشتاورهاست، یعنی وقتی که اهرم به حال تعادل است مجموع جبری گشتاورهای نیروهایی که بر آن وارد می شوند حول تکیه گاه برابر صفر است.

اکنون به چند مورد عملی اهرم توجه خواهیم کرد.

۱۹.۱۱. ترازو

ترازو تشکیل شده است از شاهین محکمی که به دو انتهای آن کفه‌ها آویزانند (شکل ۱۱-۱۶). در این شکل دو انتهای شاهین را با خط نقطه‌چین AB به هم وصل کرده ایم. تکیه گاه شاهین نقطه O است و کفه‌ها به نقاط A و B آویزانند. شاهین طوری ساخته شده است که G ، مرکز ثقل، زیر خط AB و O ، تکیه گاه، خیلی نزدیک به AB است به طوری که وقتی که شاهین افقی قرار می گیرد، G و H (نقطه وسط AB) بر خط قائمی واقعند که از O می گذرد. بنابراین وقتی که شاهین افقی است، وزن کفه‌ها و محتویاتش با فواصل مساوی بر تکیه گاه اثر می کنند. این مطلب با این گفته که بازوهای ترازو با هم برابرند، و نکته بسیار مهمی است، بیان می شود.



شکل ۱۱-۱۶

عقربه‌ای که محکم به شاهین چسبیده است و بر AB عمود است، حول صفحه مدرج S دوران می کند و نشان می دهد که چه موقعی شاهین افقی است. وزنه‌های کفه‌ها و متعلقاتش (نخ و...) باید مساوی باشند. ما اکنون نشان خواهیم داد که، هنگامی که این شرایط برقرار باشد، شاهین فقط هنگامی می تواند به وضع افقی بایستد که وزنه‌های متساوی در کفه‌ها قرار گیرند، و اگر وزنه‌ها نامتساوی باشند، شاهین زاویه معینی با افق می سازد. نقاط A ، B ، O ، G و H در شکل ۱۱-۱۷ برای وضعیتی مشخص شده اند که شاهین AB با افق زاویه θ می سازد.

وزن هر یک از کفه‌ها $P =$

فرض می کنیم:

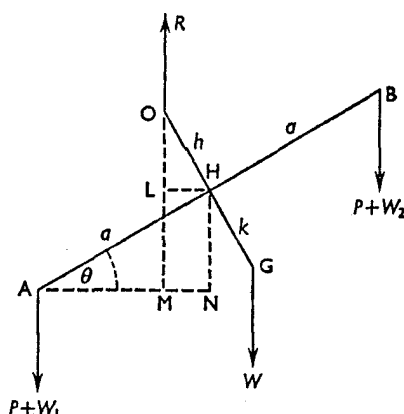
وزن شاهین $W =$

وزن وزنه‌های درون کفه‌ها W_1 و W_2

$$a = \text{طول هریک از بازوها (AH = BH = a)}$$

$$h = \text{OH}$$

$$k = \text{HG}$$



شکل ۱۱-۱۷

نیروهایی که بر شاهین اثر می کنند،

$P+W_1$ و $P+W_2$ ، قائم به طرف پایین و مؤثر بر نقاط A و B،

W ، قائم به طرف پایین و مؤثر بر G،

عکس العمل R ، قائم به طرف بالا و مؤثر بر O.

در شکل داریم $\angle LOH = \theta$ ، $AN = a \cos \theta$ ، $LH = h \sin \theta$ و فاصله G از

خط قائمی که از H می گذرد برابر است با $k \sin \theta$.

فاصله $(P+W_1)$ از O برابر است با $AM = a \cos \theta - h \sin \theta$

فاصله $(P+W_2)$ از O برابر است با $a \cos \theta + h \sin \theta$

فاصله W از O برابر است با $h \sin \theta + k \sin \theta$

گشتاور نیروها را حول O تعیین می کنیم. می توان نوشت:

$$(P+W_1)(a \cos \theta - h \sin \theta)$$

$$= W(h+k) \sin \theta + (P+W_2)(a \cos \theta + h \sin \theta)$$

$$\therefore \sin \theta [W(h+k) + (P+W_2)h + (P+W_1)a]$$

$$= \cos \theta [(P+W_2)a - (P+W_1)a]$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{(W_1 - W_2)a}{(W_1 + W_2 + 2P)h + W(h+k)}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که اگر وزن وزنه‌های داخل کفه‌ها با هم مساوی باشند، یعنی $W_1 = W_2$ باشد، θ صفر است و شاهین می‌تواند فقط دروضع افقی به‌حال تعادل بماند. اگر وزن وزنه‌ها با هم متفاوت باشند، شاهین زاویه معینی با افق خواهد ساخت. باید توجه کرد که اگر h و k هر دو صفر باشند، یعنی مرکز ثقل شاهین و مرکز آویز برهم و برخط AB منطبق باشند، وقتی که وزنه‌های مساوی در کفه‌ها قرار گیرد، شاهین می‌تواند در هر وضعیتی قرار گیرد و اگر وزن وزنه‌ها نامتساوی باشد، شاهین فقط به وضعیت قائم باقی می‌ماند.

۲۰۱۱. لازمۀ يك ترازوی خوب این است که:

(۱) درست، (۲) حساس، (۳) پایدار، (۴) محکم، باشد.

(۱) اگر بازوهای ترازو برابر، و وزن کفه‌ها نیز متساوی باشند، و اگر مرکز ثقل شاهین نقطه وسط شاهین باشد، و تکیه گاه برخط مستقیمی قرار گیرد که عمود بر شاهین است، در این صورت ترازو درست خواهد بود.

(۲) دريك ترازوی حساس، شاهین باید به‌ازای اختلاف کوچکی در اوزان دو کفه به‌قدر کافی نسبت به‌افق منحرف شود. با استفاده از نتیجه‌ای که در بند قبل به‌دست آمد،

$$\text{حساسیت ترازو باید نسبت } \frac{\operatorname{tg} \theta}{W_1 - W_2} \text{ باشد که مساوی است با}$$

$$\frac{a}{(W_1 + W_2 + 2P)h + W(h+k)}$$

این عبارت نشان می‌دهد که حساسیت ترازو با افزایش وزن کفه‌ها کاهش می‌یابد.

اما اگر $h = 0$ باشد، یعنی اگر تمام تیغه‌های کاردها دريك صفحه باشند، حساسیت

برابر $\frac{a}{Wk}$ می‌شود که مستقل از وزن کفه‌هاست.

این شرط معمولاً مورد نظراست، اما خمیدگی مختصری که در شاهین هست موجب می‌شود که نتوانیم این شرط را به‌طور درست فراهم کنیم.

برای وزنه‌های معلوم، حساسیت با a افزایش می‌یابد، یعنی با طول بازوها افزایش می‌یابد. نیز اگر W کاهش بیابد حساسیت افزایش پیدا می‌کند. بنابراین داشتن شاهینی بلند

و سبک مزیت دارد. سبک کردن شاهین منجر به کاهش استحکام شاهین می شود، و در ترازوهای بهتر به شاهین میله دیگری نصب می کنند.

کاهش k نیز موجب افزایش حساسیت می شود.

(۳) ترازو، هرچه زودتر به حال سکون و به وضع تعادل درآید، پایدارتر است. پایداری ترازو هنگامی بیشتر است که گشتاور نیروها حول O بزرگتر باشد؛ یعنی اگر وزن هریک از کفه ها w_1 باشد هرچه $[2(P + w_1)h + w(h + k)\sin\theta]$ بزرگتر باشد ترازو پایدارتر است. این شرط برای مقدار معلوم θ هنگامی برقرار است که h و k بزرگترین مقدار خود را داشته باشند.

چون وقتی که h و k کوچک باشند، حساسیت ترازو بیشتر است و هنگامی که h و k بزرگ باشند پایداری ترازو بیشتر است، نتیجه می شود که نمی توان در یک ترازو حساسیت زیاد و سرعت عمل در توزین را توأماً داشت.

۲۱.۱۱. اگر ترازو درست نباشد، و علت آن اختلاف وزن کفه ها باشد، می توان با قرار دادن کاغذ یا شن در کفه سبکتر یا با کار گذاشتن پیچ کوچکی در انتهای شاهین، و در نزدیکی نقاطی که کفه ها به آن آویزانند، خطای توزین را تصحیح کرد.

اگر بازوهای شاهین نابرابر باشند، هیچ تصحیحی از این نوع نمی تواند درست باشد. علت نادرست بودن ترازو هرچه باشد، وزن صحیح یک جسم را می توان از راه زیر به دست آورد:

جسم را در یک کفه ترازو قرار می دهیم و با ریختن شن یا سنگریزه در کفه دیگر تعادل را برقرار می کنیم.

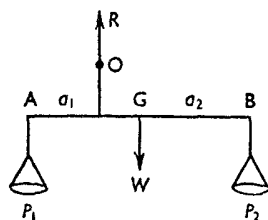
جسم را برمی داریم و به جای آن وزنه های معلوم می گذاریم تا با سنگریزه های طرف دیگر تعادل برقرار کنند.

وزن این وزنه ها باید مساوی وزن جسم باشد.

این روش را معمولاً دوشی بوددا می نامند.

۲۲.۱۱. توزین مضاعف

فرض می کنیم که طول بازوها برابر a_1 و a_2 و وزن کفه ها برابر P_1 و P_2 باشند و وزن شاهین به فاصله x از تکیه گاه O اثر کند (شکل ۱۱-۱۸)، اما شاهین، هنگامی که در کفه ها وزنه ای نیست، به حال افقی قرار می گیرد.



شکل ۱۱-۱۸

در این صورت

$$P_1 a_1 = W x + P_2 a_2 \quad (۱)$$

اکنون فرض می‌کنیم که در برابر وزن W_1 که در کفه P_1 قرار می‌دهیم باید وزن W_2 در کفه P_2 قرار دهیم تا تعادل برقرار شود. در این صورت نتیجه می‌شود:

$$(P_1 + W_1) a_1 = W x + (P_2 + W_2) a_2 \quad (۲)$$

اکنون W_1 را در کفه P_2 قرار می‌دهیم و وزن W_2 را که باید در کفه P_1 قرار دهیم تا تعادل برقرار شود پیدا می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$(P_1 + W_2) a_1 = W x + (P_2 + W_1) a_2 \quad (۳)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $W_1 a_1 = W_2 a_2$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود: $W_2 a_1 = W_1 a_2$

و از این معادله‌ها نتیجه می‌شود: $W_1^2 = W_2 W_3$

یا $W_1 = \sqrt{W_2 W_3}$

یعنی وزن صحیح جسم برابر است با واسطه هندسی W_2 و W_3 .

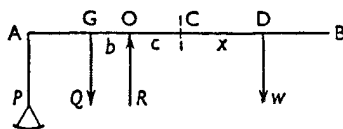
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_1}{W_3}$$

نسبت طول بازوها را به دست می‌دهد.

۲۳۰۱۱. قپان

قپان از میله سنگینی مانند AB (شکل ۱۱-۱۹) تشکیل شده است که بر تکیه گاه ثابتی مانند O، که به یکی از دو انتها نزدیکتر است، تکیه می‌کند.

به انتهای بازوی کوچکتر، کفه‌ای متصل شده است و جسمی را که منظور توزین آن است در این کفه می‌گذارند. در طول OB، که مدرج است، وزنه‌ای مانند w را می‌توان حرکت داد.



شکل ۱۱-۱۹

فرض می‌کنیم: وزن کفه $P =$

وزن میله که بر G وارد می‌شود $Q =$

$a = OA$

$b = OG$

فرض می‌کنیم C نقطه‌ای باشد که باید وزنه w در آنجا قرار گیرد تا وقتی که وزنه‌ای در کفه نیست، میله AB به‌طور افقی قرار گیرد و $OC = c$ باشد. در این صورت،

$$wc = Pa + Qb \quad (۱)$$

اگر در کفه وزن W قرار گیرد، وزنی که در نقطه D یعنی به‌فاصله x از C باشد، موجب تعادل می‌شود. در این صورت،

$$w(c+x) = (P+W)a + Qb \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $w x = W a$

پس اگر از C فاصله‌های a ، $2a$ ، $3a$ و غیره را نشانه بگذاریم، وزنه‌ای که در کفه قرار می‌گیرد اگر با w ، هنگامی که در نخستین نشانه است، به‌حال تعادل درآید، دارای وزن w است و اگر، هنگامی که w در دومین نشانه است، میله به‌حال تعادل درآید، وزن W برابر $2w$ است و همین‌طور با نشانه‌های دیگر می‌توان وزن جسم مورد نظر را تعیین کرد.

اگر $w = ۱ \text{ kg}$ باشد، هر یک از درجه‌ها، برحسب کیلوگرم، جرم وزنه‌ای را که در کفه است بیان می‌کند. می‌توان فاصله میان درجه‌ها را به‌قسمتهای کوچکتری تقسیم کرد و به‌این ترتیب جرمهای کمتر از کیلوگرم را نیز با این وسیله اندازه‌گیری کرد.

در فاصله a از C وزنه لغزان w با جرم ۱۰ kg که در کفه قرار گیرد تعادل برقرار می‌کند. در بسیاری از حالاتها به‌انتهای بازوی بلندتر میله‌ای متصل است و می‌توان وزنه‌های سوراخ شده‌ای را به‌این میله آویزان کرد.

در این حالت نیز C نقطه‌ای خواهد بود که وزنه لغزان w باید در آنجا قرار گیرد

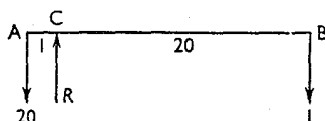
تا میله AB هنگامی که وزنه‌ای در کفه نیست به حال افقی بماند.

درجه بندی به همان شیوه پیشین انجام می‌گیرد، اما اگر w در C باشد، برای آنکه با وزن W که در کفه است تعادل برقرار شود باید وزنه‌ای برابر X در میله اضافی وارد کرد. در این صورت

$$X \cdot OB = W \cdot OA$$

به این طریق ممکن است وزنه کوچکی با وزنه بسیار بزرگی که در کفه است تعادل برقرار کند.

۲۴۰۱۱. اصل اهرم کاربردهای عملی بسیار دارد که در همه آنها هدف کلی، اعمال نیرویی بزرگ در یک نقطه به وسیله اعمال نیرویی کوچکتر در یک نقطه دیگر است.



شکل ۱۱-۲۰

بنابراین با میله AB ، که در C لولاشده است و در آن $BC = 20AC$ است (شکل ۱۱-۲۰)، وزن 20 N که در A اعمال می‌شود می‌تواند با وزن 1 N که در B اعمال می‌شود تعادل داشته باشد. اکنون اگر وزنه بسیار کوچکی در B اضافه شود، وزنه A از جایش بلند خواهد شد. قیچی مثالی از اهرمهای مضاعف از این نوع است.

اگر AB در A لولا شود، نیرویی برابر 1 N که در B به طرف بالا اعمال می‌شود، می‌تواند وزنه‌ای به جرم 21 N را که در C وارد می‌شود تحمل کند. تیری که یک انتهای آن روی زمین است و برای برداشتن تیرهای سنگین به کار می‌رود مثالی از این نوع اهرم است. فندق شکن مثالی از اهرم مضاعف از این نوع است و برای تولید نیروی شکننده‌ای در C به کار می‌رود.

اگر AB در A لولا شده باشد و نیرویی برابر F در C بر میله اعمال شود، این

نیرو می‌تواند بر نیرویی برابر F که در جهت مخالف در B اعمال می‌شود غلبه کند.

اما انتهای B مسافتی 21 بار بیشتر از مسافتی که C طی می‌کند، می‌پیماید. اهرمهایی از این نوع برای افزایش حرکت مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثلاً در رکاب چرخ خیاطی،

پا بر C نیرو وارد می کند و بر اثر آن، انتهای B حرکت قابل ملاحظه ای می کند و حال آنکه پا مسافت کوتاهی می پیماید.

تمرین ۴.۱۱

۱ - توضیح دهید که قبان را چگونه برای يك وزنه لغزنده درجه بندی می کنند و درجه صفر را در آن چگونه پیدا می کنند. وزنه لغزنده به جرم $g = 100$ است. اگر هنگامی که وزنه لغزنده روی صفر است و به انتهای بازوی کوچکتر قبان وزنه ای به جرم $kg = 4$ آویزان است با يك وزنه $g = 50$ که به انتهای بازوی بزرگتر آویزان می شود بتوان تعادل برقرار کرد، تعیین کنید فاصله میان درجه های قبان چه کسری از طول بازوی بزرگتر باشد، تا هر يك از درجه ها با وزنه لغزنده مذکور نمایشگر يك کیلوگرم باشد.

۲ - ثابت کنید که اگر تکیه گاه يك ترازو مستقیماً بالای مرکز ثقل نباشد، اما بازوها برابر باشند، با توزین جسم در دو کفه و تعیین واسطه عددی نتیجه ها می توان اندازه گیری درست انجام داد. از این گذشته نشان دهید که اگر بازوها نیز نابرابر باشند و مقدار اختلاف طول آنها برابر h و طول دو بازو روی هم برابر l باشد، نتیجه درست اندازه گیری با تعیین واسطه عددی منهای $\frac{1}{4}(W_1 - W_2)\frac{h}{l}$ به دست می آید که در آن W_1 و W_2 وزنه های ظاهری در دو حالت هستند و W_1 بزرگتر از W_2 است.

۳ - ماشین توزینی مطابق شرح زیر ساخته شده است: میله ABCD که در C لولا شده است و BC کوچکتر از CD است. میله های هم طول BF و DE از B و D آویزانند و انتهای آنها E و F به میله ای هم طول BD متصل شده است. مفصل های میله ها در B، D، E و F آزاد است. کفه ای به نقطه وسط FE متصل شده است. وزنه ای به وزن P می تواند در امتداد AC بلغزد. اگر هنگامی که وزنه ای در کفه نیست و ماشین به حال تعادل است، وزنه P در وضع M باشد، نشان دهید که ماشین را چگونه مدرج می کنند.

۴ - ترازویی يك جفت کفه دارد که متعادل نیستند. برای آنکه تعادل برقرار شود وزنه ای کوچک به یکی از کفه ها متصل می کنند. بقالی می خواهد با استفاده از این ترازو وزن معینی از يك جنس را به مشتری بفروشد. نشان دهید که اگر نصف آن جنس را در يك کفه و نصف دیگر را با کفه دیگر بکشد، جنس را به اندازه درست تحویل مشتری

خواهد داد.

۵ - میله یکنواختی به طول $m \frac{9}{10}$ حول میخ افقی ثابتی که در مرکزش C هست حرکت می کند. نخهایی به دو انتهای A و B از میله متصل شده اند و به ترتیب از درون حلقه های صیقلی ثابت A' و B' عبور می کنند و هر کدام از نخها در انتهای دیگر وزنه ای به جرم 7 kg حمل می کنند. A' به طور قائم در بالای C و B' به طور قائم در زیر C است و فاصله هریک از C برابر 45 cm است. وزنه ای به جرم x کیلوگرم در A به میله آویزان شده است. ثابت کنید که اگر میله به خواهد در حالتی، جز حالت قائم، ساکن بماند، x نباید از مقدار معینی کمتر باشد و برای آنکه میله در وضع افقی به حال تعادل بماند آن مقدار x را تعیین کنید.

۶ - ترازویی است که بازوهای سبکی با طولهای نابرابر دارد و کفه ها نیز وقتی که خالی هستند، اگرچه وزنه ای نابرابر دارند، به حال تعادل قرار نمی گیرند. این ترازو جرم جسمی را که معلوم و برابر a کیلوگرم است x کیلوگرم نشان می دهد و جرم جسمی را که معلوم و برابر b کیلوگرم است y کیلوگرم نشان می دهد. نشان دهید که جرم واقعی جسمی که با این ترازو z کیلوگرم به نظر می رسد برابر است با

$$\frac{bx - ay + (a - b)z}{x - y}$$

۷ - میله سنگین نایکنواختی به طول $m \frac{3}{4}$ می تواند هنگامی که به یک انتهای آن وزنه ای به جرم 2 kg آویزان می شود، حول نقطه وسطش به حال تعادل بایستد. اگر وزنه ای به جرم 6 kg از همین انتهای میله آویزان شود، میله حول نقطه ای که به فاصله $m \frac{3}{10}$ از مرکز است به حال تعادل می ایستد. جرم میله و محل مرکز ثقل آن را تعیین کنید. نشان دهید که این میله را چگونه می توان به عنوان چپانی که تکیه گاه متحرک دارد مدرج کرد. نیز نشان دهید که فاصله های درجه ها که از انتهای سنجیده می شوند که از آن انتها جرمها توزین می گردند، تشکیل یک تصاعد هارمونیک می دهند.

۸ - دو میله یکنواخت AB و BC که از یک ماده و دارای یک ضخامت هستند، در B محکم به یکدیگر متصل شده اند به طوری که زاویه ABC برابر 120° است. سپس این اهرم خمیده را در B لولا می کنند به طوری که بتواند آزادانه در یک صفحه قائم بچرخد. در وضع تعادل، BC افقی است. نشان دهید که اگر وزنه ای به C آویزان

شود به طوری که در وضع تعادل، AB افقی شود، جرم آن $\frac{3}{4}$ جرم BC است.

۹ - ABC اهرمی افقی است که در B ، نقطه وسطش، لولا شده است و در C کفه ای به وزن W به آن آویزان است. AD میله سبکی است که در A به اهرم و در D که

به طور قائم در زیر A است، به یک میله افقی FDE لولاشده است. میله FDE حول انتهای F آن که ثابت است می تواند آزادانه حرکت کند. وزن این میله W_1 است و مرکز ثقل آن به فاصله d از F است و $FD = c$. نشان دهید که چگونه این میله را با وزن متحرک w برای وزنهای متغیر W که در کفه C می گذارند درجه بندی می کنند. اگر هرسانتی متر از درجه بندی نشان دهنده 200 g باشد و $w = 100\text{ g}$ باشد، مقدار c را تعیین کنید. در این حالت رابطه میان W_1 و W را هنگامی که $d = 2\text{ cm}$ است و درجه صفر در دو سانتیمتری F است تعیین کنید.

نیروهایی که در يك صفحه اند و بريك جسم صلب وارد می شوند

۱۰۱۲. جسم صلبی که تحت اثر سه نیرو است

ابتدا به مسائلی توجه خواهیم کرد که در آنها فقط سه نیرو بريك جسم صلب اثر کرده اند.

اگر يك جسم صلب تحت اثر سه نیرو که در يك صفحه واقعند به حال تعادل باشد، دستگاهی این سه نیرو یا باید همگی با هم متوازی باشند یا در يك نقطه یکدیگر را قطع کنند.

فرض می کنیم نیروها P ، Q و R باشند. اگر سه نیرو متوازی نباشند، دوتای از آنها، مثلاً P و Q باید در نقطه ای مانند O یکدیگر را قطع کنند.

در این صورت برآیند P و Q باید نیرویی باشد که از O می گذرد.

اما چون سه نیرو در حال تعادلند، این برآیند باید با R متعادل باشد.

چون R باید مساوی و در خلاف جهت برآیند P و Q و در همان راستا باشد،

بنابراین راستای آن باید از O بگذرد.

اگر نیروها همگی متوازی باشند، برآیند هر دوتای از آنها باید مساوی و در خلاف

جهت نیروی دیگر باشد و راستای آن نیز با راستای سوم باید یکسان باشد.

۲۰۱۲. از قضیه قبل مشاهده می شود که، جز در حالتی که سه نیرو متوازی هستند، می توانیم

دو سهایی را به کار ببریم که در باره نیروهایی به کار می بردیم که بريك نقطه مادی اعمال می شوند. یعنی می توانیم قضیه لامسی، یا روش ترسیمی مثلث نیروها را به کار ببریم.

نیز می توانیم نیرو را به دو نیروی عمود بر هم تجزیه کنیم. در بعضی از حالتها ممکن است تعیین گشتاورها حول نقطه ای مناسب سریعتر باشد. در همه حالتها، رسم شکلی که سه نیرو را، چه متوازی باشند و چه در يك نقطه برخورد کنند، نشان دهد بسیار اهمیت دارد.

۳۰۱۲. نکته‌های زیر را، که بعضی از آنها را قبلاً متذکر شده‌ایم، باید به دقت به خاطر سپرد، زیرا اهمیت اساسی دارند:

(۱) وزن جسم به طور قائم و به طرف پایین و بر مرکز ثقل وارد می‌شود.

(۲) وقتی که جسمی بر يك سطح صیقلی قرار دارد، عکس‌العمل جسم، عمود بر سطح است.

(۳) وقتی که میله‌ای بر يك میخ صیقلی قرار می‌گیرد، عکس‌العمل میخ بر میله عمود بر میله است.

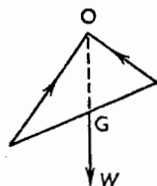
(۴) کشش در سراسر يك نخ سبک یکسان است، و این کشش هنگامی که نخ از روی يك قرقره یا میخ صیقلی عبور کند تغییری نمی‌کند. اگر قرقره ناصاف باشد، کشش نخ در دو طرف قرقره متفاوت خواهد بود.

(۵) برابند دو نیروی متساوی، زاویه میان آن دو نیرو را نصف می‌کند. پس، وقتی که نخ از روی يك میخ صیقلی عبور می‌کند، نیرویی که بر میخ فشار می‌آورد نیمساز اجزای نخ در دو طرف میخ است.

(۶) وقتی که جسم صلبی، آزادانه از نقطه ثابتی مانند O آویزان شده است، مرکز ثقل G جسم باید بر خط قائمی که از O می‌گذرد قرار گیرد.

برایند عکس‌العمل در O باید با وزن جسم متعادل شود و برای اینکه چنین چیزی ممکن باشد باید دو نیرو هم‌راستا باشند. این نتیجه، چه O نقطه‌ای در داخل جسم باشد، مانند شکل ۱۲-۱، و چه جسم با دوتکه نخ به O متصل شده باشد، مانند شکل ۱۲-۲، صادق است. اگر نیروهای دیگری بر جسم اثر کنند، G لزوماً در زیر O و بر خط قائمی که از O می‌گذرد نخواهد بود.

ملاحظات فوق، که همراه با این واقعیت در نظر گرفته شوند که هنگامی که فقط سه نیروی غیرمتوازی وجود دارند، آن سه نیرو باید در يك نقطه برخورد کنند، ما را قادر می‌سازند که شکل درستی رسم کنیم که وضع جسم را نشان دهد. این مطلب را با مثالهای



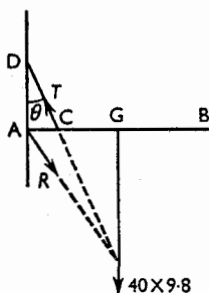
شکل ۲-۱۲



شکل ۱-۱۲

زیر روشن می کنیم.

مثال ۱: میله یکنواخت AB به طول ۶ m و جرم ۴۰ kg است. انتهای A که میله حول آن می تواند آزادانه بچرخد، به دیوار قائمی متصل است. به وسیله ریسمانی که یک انتهای آن به نقطه ای در ۱/۲۵ متری A به میله بسته شده و انتهای دیگر آن به نقطه ای از دیوار که بالای A است کوبیده شده است، میله در وضعی افقی قرار دارد. اگر کشش ریسمان از وزن و زنه ۱۲۰ kg تجاوز نکند، نشان دهید که ارتفاع نقطه ای که ریسمان در آن نقطه به دیوار کوبیده شده است از A نباید کمتر از $1\frac{2}{3}$ m باشد.



شکل ۳-۱۲

حل:

فرض می کنیم G (شکل ۳-۱۲) مرکز میله، C و D نقاط اتصال ریسمان با میله و دیوار باشند.

فرض می کنیم $AD = x$ متر و زاویه $\theta = \angle ADC$ باشد. در این صورت

$$\cot \theta = \frac{x}{1/25} = \frac{4}{5}x$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{1}{1 + \frac{16}{25}x^2}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{5}{\sqrt{25 + 16x^2}}$$

عکس العمل R نیوتون که بر میله در A اثر می کند باید از نقطه تلاقی کشش T ، که در C وارد می شود، و وزن میله بگذرد.
برای میله حول A گشتاور می گیریم. اگر کشش ریسمان T نیوتون باشد، چنین خواهیم داشت:

$$T \cdot x \sin \theta = 3 \times 40 \times 9/8$$

$$\therefore T = \frac{120 \times 9/8}{x \sin \theta}$$

اما T نباید بزرگتر از $120 \times 9/8$ باشد و بنابراین

$$\frac{120}{x \sin \theta} \geq 120$$

$$\therefore x \sin \theta \leq 1$$

$$\therefore 5x \leq \sqrt{25 + 16x^2}$$

$$\therefore 25x^2 \leq 25 + 16x^2$$

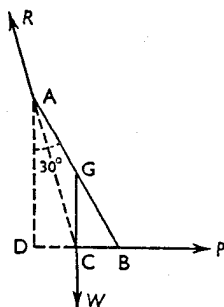
$$x \leq \frac{5}{3}m$$

پس

یعنی x نباید کوچکتر از $\frac{1}{3}m$ باشد.

مثال ۲: میله سنگین یکنواخت AB ، به وزن W ، از A به نقطه ثابتی لولا شده است. آن را با نیروی افقی P به يك طرف می کشانیم، به طوری که میله با خط قائم زاویه 30° بسازد. بزرگی نیروی P و عکس العمل لولا را حساب کنید.

حل: فرض می کنیم G (شکل ۱۲-۴) نقطه وسط میله باشد. وزن W به طور قائم و



شکل ۴-۱۲

به طرف پایین وارد می شود.

فرض می کنیم خطوط قائمی که از A و G می گذرند، راستای P را به ترتیب در C و D قطع کنند. در این صورت راستای عکس العمل R در A باید از C ، نقطه تلاقی P و W ، بگذرد.

دوش (الف). برای میله حول A گشتاور می گیریم. خواهیم داشت:

$$P \cdot AD = W \cdot CD$$

$$CD = \frac{1}{4} AB \sin 30^\circ \text{ و } AD = AB \cos 30^\circ \quad \text{اما}$$

$$\therefore P = W \frac{\frac{1}{4} AB}{\frac{\sqrt{3}}{4} AB} = \frac{\sqrt{3}}{6} W$$

نیز اگر X و Y مؤلفه های افقی و قائم R باشند،

$$X = P = \frac{\sqrt{3}}{6} W$$

$$Y = W$$

$$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2} = W \sqrt{\left(\frac{3}{36} + 1\right)} = W \sqrt{\frac{13}{12}}$$

اگر زاویه R با افق برابر θ باشد،

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

دوش (ب). اضلاع مثلث ADC به ترتیب به موازات نیروهای W ، P و R است و

بنابراین می توانند به عنوان مثلث نیروها مورد استفاده قرار گیرند.

$$\therefore \frac{P}{DC} = \frac{R}{AC} = \frac{W}{AD}$$

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \text{ و } CD = \frac{1}{4} AB \quad \text{و مانند بالا}$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{16}\right) AB^2 \quad \text{نیز}$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{13}}{4} AB$$

$$\therefore P = W \frac{\frac{1}{4} AB}{\frac{\sqrt{3}}{2} AB} = \frac{\sqrt{3}}{6} W$$

$$R = W \frac{\frac{\sqrt{13}}{4} AB}{\frac{\sqrt{3}}{2} AB} = W \sqrt{\frac{13}{12}} \quad \text{و}$$

$$\text{tg } \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} AB}{\frac{1}{4} AB} = 2\sqrt{3} \quad \text{نیز}$$

مثال ۳: انتهای A از میله سنگین و یکنواخت AB به دیوار قائم صیقلی تماس دارد،

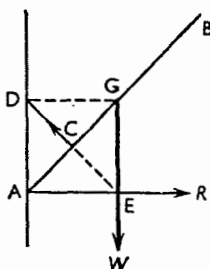
و انتهای نخ به نقطه C از میله محکم شده است، به طوری که $AC = \frac{1}{3} AB$

است. انتهای دیگر نخ به نقطه ای از دیوار که به طور قائم بالای A است محکم شده است. اگر میله در وضعی قرار گیرد که با قائم زاویه بسازد، طول نخ را تعیین کنید.

حل: خط AB را طوری رسم می کنیم که با دیوار زاویه بسازد (مطابق شکل ۱۲-۵) و فرض می کنیم G نقطه وسط آن باشد.

چون دیوار صیقلی است، عکس العمل در A عمود بر دیوار، یعنی افقی است.

فرض می کنیم که راستای این عکس العمل، راستای وزن را در E قطع کند. در این



شکل ۵-۱۲

صورت، چون تنها نیروهایی که بر میله وارد می‌شوند، این عکس‌العمل و وزن میله و کشش نخ هستند، این نیروها باید در یک نقطه تلاقی کنند. پس امتداد نخ باید از E بگذرد. EC را وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دیوار را در نقطه D قطع کند. در این صورت D باید نقطه اتصال نخ به دیوار باشد و CD طول نخ باشد.

اما چون GEA و EAD زاویه‌های قائمه‌اند و C نقطه وسط AG است، شکل AEGD مستطیل خواهد بود و AG و ED قطرهای آن هستند.

∴

$$CD = AC$$

یعنی طول نخ برابر $\frac{1}{2}$ طول میله است.

کشش نخ و عکس‌العمل در A را می‌توان با تجزیه آنها به مؤلفه‌های قائم و افقی یا با استفاده از مثلث ADE، به عنوان مثلث نیروها، پیدا کرد. این دو نیرو بستگی به زاویه انحراف میله نسبت به خط قائم دارند، که این زاویه هر مقداری کوچکتر از 90° می‌تواند داشته باشد.

یادداشت. بدیهی است که اگر میله، مطابق شکل ۵-۱۲، طوری قرار گیرد که انتهای B میله روبه بالا باشد، نقطه‌ای که نخ به میله بسته می‌شود میان A و G خواهد بود. زیرا خط واصل میان E و این نقطه باید دیوار را، در نقطه‌ای که نخ به دیوار بسته می‌شود، قطع کند و مسلماً اگر C بر روی G یا بالای G باشد، چنین چیزی غیرممکن است.

اگر نخ میان G و B یا در B به میله بسته شود، در این صورت B باید، به طوری که در مثال بعد می‌بینیم، پایینتر از A قرار گیرد.

مثال ۴: انتهای A از میله یکنواخت AB بر دیوار صیقلی قائمی تکیه کرده است. به انتهای دیگر این میله نخ به طول l متصل است و نخ به نقطه ای از دیوار که به طور قائم در بالای A است بسته شده است. نشان دهید که اگر میله طوری قرار گیرد که بادیوار زاویه θ بسازد، در این صورت

$$\cos^2 \theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2}$$

حل : چون دیوار صیقلی است، عکس العمل R در A (شکل ۱۲-۶) افقی است. اما راستای نخ باید از نقطه ای بگذرد که راستای وزن با راستای R تلاقی می کنند و چنین چیزی، جز آنکه B در زیر A باشد، غیرممکن است. پس AB را به طرف پایین رسم می کنیم و فرض می کنیم که G نقطه وسط آن باشد. فرض می کنیم خط قائمی که از G می گذرد راستای R را در D قطع کند. BD را وصل می کنیم و آن را امتداد می دهیم تا دیوار را در C قطع کند. در این صورت BC معرف نخ و $BC = l$ است.

فرض می کنیم $AC = h$ و در این صورت $DG = \frac{1}{2}h$ است، زیرا G وسط AB و GD موازی AC است. در مثلث AGD،

$$\cos \theta = \frac{GD}{AG} = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}a} \quad (1)$$

در مثلث ACB،

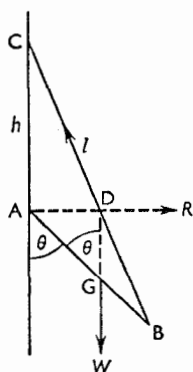
$$\cos CAB = \frac{h^2 + a^2 - l^2}{2ah}$$

$$\cos CAB = -\cos \theta \quad \text{اما}$$

$$\therefore -\cos \theta = \frac{h^2 + a^2 - l^2}{2ah}$$

از رابطه (۱) $h = a \cos \theta$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$-\cos \theta = \frac{a^2 \cos^2 \theta + a^2 - l^2}{2a^2 \cos \theta}$$



شکل ۶-۱۲

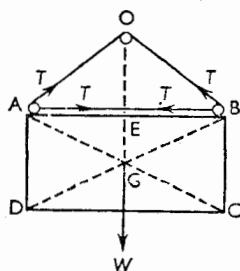
$$\therefore -2a^2 \cos^2 \theta = a^2 \cos^2 \theta + a^2 - l^2$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2}$$

بازهم، کشش نخ و عکس‌العمل R را در A می‌توان با تجزیه آنها به مؤلفه‌های افقی و قائم یا با استفاده از مثلث CAD به عنوان مثلث نیروها، پیدا کرد.

مثال ۵: تخته‌ای است به شکل مستطیل و به ابعاد $1/8 \text{ m}$ و $1/2 \text{ m}$. این تخته با نخ‌ی به طول $4/8 \text{ m}$ طوری آویزان شده است که اضلاع بزرگ آن افقی است. نخ از درون حلقه‌هایی صیقلی که به گوشه‌های بالایی تخته نصب شده و از روی یک میخ صیقلی می‌گذرد. کشش نخ را و نیز نیرویی را که بر هر حلقه فشار می‌آورد تعیین کنید. در صورتی که می‌دانیم وزن تخته برابر W است.

حل : فرض می‌کنیم $ABCD$ (شکل ۱۲-۷) نشان‌دهنده تخته و O وضع میخ باشد و حلقه‌ها به A و B نصب شده باشند.



شکل ۷-۱۲

چون نخ پیوسته است فقط از روی سطوح صیقلی می‌گذرد، کشش T در سراسر آن یکسان است.

برایند دو کشش در O نیمساز زاویه AOB است و باید با وزن W که به طور قائم بر G ، مرکز ثقل تخته، وارد می‌شود تعادل داشته باشد. پس G باید به طور قائم در زیر O باشد.

اگر خط OG را در E قطع کند، $AE = ۰/۹ \text{ m}$ است.

$$OA = OB \text{ و } AO + OB = ۳ \text{ m} \quad \text{نیز}$$

$$\therefore AO = ۱/۵ \text{ m}$$

$$\therefore OE = \sqrt{۲/۲۵ - ۰/۸۱} = ۱/۲ \text{ m}$$

اگر زاویه $\theta = \angle AOE$ باشد، در این صورت با تجزیه در امتداد قائم،

$$۲T \cos \theta = W$$

$$\cos \theta = \frac{۴}{۵}$$

$$\therefore T = \frac{۵}{۸} W \quad \text{و}$$

نیروی R که در A بر حلقه فشار می‌آورد برایند دو نیروی T است که زاویه

میان آنها $\angle OAE = \frac{۳}{۵}$ است و می‌دانیم که $\cos \angle OAE = \frac{۳}{۵}$.

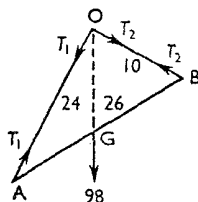
$$\therefore R^2 = T^2 + T^2 + ۲T^2 \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱۶}{۵} T^2 = \frac{۱۶}{۵} \times \frac{۲۵}{۶۴} W^2$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{۵}}{۲} W$$

جهت R نیمساز زاویه $\angle OAE$ است.

مثال ۶: میله سنگین یکنواختی است به طول ۲۶ cm و جرم ۱۰ kg که به کمک دو نخ، به طولهای ۲۴ cm و ۱۰ cm از يك نقطه ثابت آویزان شده است. زاویه‌ای را که میله با خط قائم می‌سازد و کششهای نخها را تعیین کنید.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۲-۸) نمایشگر میله و O نقطه آویز باشد. وزن میله ۹۸ N است.



شکل ۱۲-۸

چون فقط سه نیرو بر میله اثر می کنند، راستای وزن باید از O بگذرد، یعنی G، نقطه وسط میله، باید به طور قائم در زیر O باشد.

فرض می کنیم $\angle OAB = \theta$

$$24^2 + 10^2 = 26^2 \quad \text{چون}$$

است، زاویه AOB قائمه است و

$$GO = GA = GB$$

$\therefore$

$$\angle AOG = \theta$$

کششهای OA و OB را T_1 و T_2 نیوتون فرض می کنیم. با تجزیه OA و OB خواهیم داشت،

$$T_1 = 98 \cos \theta = \frac{12}{13} \times 98 = 90.5$$

$$T_2 = 98 \sin \theta = \frac{5}{13} \times 98 = 37.7$$

مثال ۷: میله ای است که مرکز ثقل آن، آن را به دو جزء a و b تقسیم می کند. این میله در داخل کره ای صیقلی در وضعی قرار دارد که با افق زاویه می سازد. نشان دهید که اگر زاویه آن با افق برابر θ باشد زاویه مرکزی قوسی از کره که دو انتهای آن، دو انتهای میله است، برابر 2α باشد، در این صورت

$$\tan \theta = \frac{b-a}{b+a} \tan \alpha$$

حل : فرض می کنیم، AB (شکل ۱۲-۹)، میله و C مرکز کره باشد. چون کره صیقلی

$$S(a+b)\sin(90^\circ - \alpha) = W a \cos \theta$$

$$\therefore S = W \frac{a \cos \theta}{(a+b) \cos \alpha}$$

با تعیین گشتاور حول B چنین خواهیم داشت،

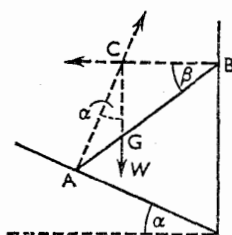
$$R(a+b)\sin(90^\circ - \alpha) = W b \cos \theta$$

$$\therefore R = W \frac{b \cos \theta}{(a+b) \cos \alpha}$$

مثال ۸: در یک صفحه قائم، میله‌ای که یکنواخت نیست طوری قرار دارد که A، انتهای پایینی میله، بر صفحه صیقلی که زاویه آن با افق برابر α است قرار دارد و B، انتهای بالایی میله، بر دیوار قائم صیقلی تکیه دارد. اگر G مرکز ثقل میله باشد و β زاویه انحراف میله نسبت به افق باشد، نشان دهید که

$$\frac{AG}{GB} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)}$$

حل: فرض می‌کنیم عکس‌العمل‌های در A و B، که بر صفحه و دیوار عمودند، در نقطه C تلاقی کنند (شکل ۱۰-۱۲). در این صورت G باید به طور قائم در زیر C باشد.



شکل ۱۰-۱۲

اما $\angle CAG = 90^\circ - \beta - \alpha$ و $\angle ACG = \alpha$ ، $\angle CBG = \beta$

$$\frac{AG}{\sin \alpha} = \frac{CG}{\sin CAG} = \frac{CG}{\cos(\alpha + \beta)}$$

پس

$$\frac{GB}{\sin 90^\circ} = \frac{CG}{\sin \beta}$$

و

$$\therefore \frac{AG}{GB} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)}$$

یادداشت. در بسیاری از این مسائل، نتیجه از طریق هندسه و از روی شکل به دست می آید. البته باید سه نیرو طوری ترسیم شوند که در یک نقطه تلاقی کنند.

تمرین ۱۰۱۲

- ۱ - میله یکنواختی می تواند آزادانه حول لولایی که به یک انتهای آن نصب شده است بچرخد. به انتهای دیگر این میله نیرویی افقی و برابر نصف وزن میله وارد می شود و میله را از حالت قائم منحرف می کند. زاویه انحراف میله را از خط قائم تعیین کنید.
- ۲ - اگر در مسئله ۱، نیروی افقی سه چهارم وزن میله باشد، زاویه انحراف میله از خط قائم و نیز عکس العمل لولا را تعیین کنید.
- ۳ - A، انتهای بالایی نردبان AB، بردیوار صیقلی قائمی تکیه کرده است. B، انتهای پایینی نردبان، در یک سوراخ قرار دارد. خط قائمی که از G می گذرد (G مرکز ثقل نردبان و بار روی آن است) خطی افقی را که از A رسم می شود در K قطع می کند. همین خط افقی، خط قائمی را که از B می گذرد در L قطع می کند. ثابت کنید که مثلث BKL را می توان به عنوان مثلث نیروها، برای وزن و عکس العملهای در A و B، به کار برد.
- ۴ - تیر یکنواخت AB به وزن W می تواند حول لولایی که در A نصب شده است، در یک صفحه قائم بچرخد. B، انتهای دیگر تیر به نخ می محکم شده است و نخ از روی قرقره C، که به طور قائم در بالای A است، می گذرد، به طوری که $AC = AB$ است. کشش نخ را برای آنکه تیر با افق زاویه 60° بسازد تعیین کنید. نیز جهت و بزرگی عکس العمل لولا را تعیین کنید.
- ۵ - AB میله یکنواختی است به وزن W، که می تواند حول یک محور افقی صیقلی که در A ثابت است، حرکت کند. B به نخ سبکی متصل است که از روی قرقره C که به طور قائم بالای A است می گذرد. به انتهای دیگر نخ جسمی به وزن P آویزان است. با به کار بردن مثلث نیروها، ثابت کنید که در وضع تعادل

$$CB = 2 \frac{P}{W} \cdot AC$$

- ۶ - میله یکنواخت سنگین AB به نقطه ثابت A واقع بردیواری صیقلی لولا شده است و در وضعی افقی و به موازات دیوار نگاه داشته شده است. برای این کار نخ

سیک به انتهای B آن بسته شده است و انتهای نخ به نقطه P، واقع بر خط LM، که فصل مشترک دیوار و سقف است، متصل شده است. ثابت کنید که برای اوضاع مختلف P، بر روی خط LM (طول نخ به اندازه ای گرفته می شود که میله همیشه افقی باشد)، کشش نخ متناسب با طول BP است.

۷ - انتهای P از میله ای در یک گودال قرار دارد. نخ را به نقطه Q از میله می بندیم و انتهای دیگر نخ را به نقطه R، که به طور قائم بالای گودال است، متصل می کنیم. ثابت کنید که اگر خط قائم مکانی که از مرکز ثقل می گذرد، QR را در S قطع کند، مثلث PRS برای وزن، کشش نخ و عکس العمل گودال، مثلث نیروها محسوب خواهد شد.

۸ - میله یکنواختی به طول m ۳ به کمک نخ به طول m ۵ که از روی میخی صیقلی عبور کرده است به طور افقی نگاه داشته شده است. نخ به دو انتهای میله متصل شده است. اگر جرم میله ۷ kg باشد، کشش نخ را تعیین کنید.

۹ - میله یکنواخت AB به جرم ۱۰ kg در A به طور صیقلی لولا شده است. میله در صفحه ای قائم طوری قرار دارد که انتهای آن بر دیوار صیقلی قائمی تکیه کرده است. اگر میله با دیوار زاویه ۴۰ درجه بسازد، نیروی فشاری را که بر دیوار وارد می کند و نیز بزرگی و جهت عکس العمل در A را تعیین کنید.

۱۰ - تیغه یکنواختی به وزن W به شکل مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه ABC است که در B قائمه است و از A به نقطه ثابتی لولا شده است و طوری قرار دارد که AC قائم است و C بالای A است. تعادل به کمک نخ افقی که به C متصل است برقرار شده است. کشش نخ و جهت و بزرگی عکس العمل در A را تعیین کنید.

۱۱ - تیغه یکنواختی به وزن W، که به شکل مثلث متساوی الاضلاع ABC است، از رأس A به نقطه ثابتی لولا شده است و حول آن می تواند آزادانه در یک صفحه قائم بچرخد. این تیغه طوری قرار دارد که AB قائم است و B بالای A است و رأس C با یک دیوار قائم صیقلی تماس دارد. عکس العمل میان تیغه و دیوار، و بزرگی و جهت عکس العمل A را تعیین کنید.

۱۲ - انتهای A از میله ACB به وزن W بر دیوار صیقلی قائمی تکیه کرده است و به کمک نخ که به نقطه C از این میله بسته شده است، انتهای B به طرف بالا قرار دارد. انتهای دیگر نخ به نقطه D از دیوار که همتراز با B است متصل شده است. اگر زاویه انحراف CD نسبت به دیوار ۳۰° باشد، کشش نخ و عکس العمل دیوار را

تعیین کنید و ثابت کنید که $AC = \frac{1}{3}AB$.

۱۳ - میله یکنواخت AB به حال تعادل است و با افق زاویه α می سازد. A، انتهای بالایی میله، بريك میخ صیقلی تکیه کرده است و B، انتهای دیگر میله، به كمك نخي سبك، به نقطه C همتر از A بسته شده است. ثابت کنید که β ، زاویه ای که نخ با افق می سازد، از معادله زیر به دست می آید:

$$tg \beta = 2tg \alpha + cotg \alpha$$

$$AC = \frac{AB}{\cos \alpha (1 + 2tg^2 \alpha)} \quad \text{و نیز}$$

۱۴ - میله یکنواخت سنگینی است که طول آن برابر با قطر جام نیمکره ای شکل صیقلی است. محور این نیمکره ثابت و قائم است. يك انتهای این میله در جام و انتهای دیگر آن خارج از جام است. ثابت کنید که زاویه انحراف این میله با افق در حدود $32^\circ 32'$ است.

۱۵ - کره ای به جرم ۵ kg و به شعاع ۶۳ cm به كمك نخي به طول ۲۴ cm از نقطه ای واقع بر دیواری قائم و صیقلی آویزان شده است. کشش نخ را تعیین کنید.

۱۶ - طول تیر پرچی ۱۲ m و جرم آن ۱۲۰ kg است. يك سر آن به حلقه ای گردان واقع بر روی زمین متصل شده است. این تیر به كمك ریسمانی که به بالاترین نقطه آن متصل شده است راست می شود. اگر هنگامی که تیر پرچم با افق زاویه 50° می سازد، انحراف ریسمان نسبت به افق 20° باشد، از راه نمودار یا از راه دیگر، کشش ریسمان و بزرگی و جهت عكس العمل حلقه را پیدا کنید.

۱۷ - میله یکنواخت AB، به وزن $2W$ و طول l ، می تواند آزادانه حول يك لولای صیقلی که در A، انتهای بالایی آن است بچرخد. به انتهای B این میله، نیرویی افقی وارد می شود، به طوری که میله در حالت تعادل می ماند و انتهای B از امتداد قائم A به فاصله a است. ثابت کنید که عكس العمل لولا برابر است با

$$W \left[\frac{4l^2 - 3a^2}{l^2 - a^2} \right]^{1/2}$$

۱۸ - بلوکی به شکل مکعب به كمك دو سیم هم طول، که به دو نقطه متقارن از وجه بالایی آن متصل شده است، آویزان است. سردیگر هر دو سیم به يك نقطه متصل شده است. نشان دهید که اگر طول سیمها را کوتاه کنیم کشش سیمها افزوده می شود. اگر جرم بلوك ۲۰۰۰ kg و طول هريك از وجوه آن ۹/۰ m باشد، و دو نقطه ای که سیمها

به بلك متصل شده‌اند $m/6$ از هم فاصله داشته باشند، کوتاهترین طول ممكن را برای سیمها پیدا کنید. می‌دانیم که توانایی هریک از سیمها در برابر پاره شدن $15000N$ است.

۱۹ - ورقه مدور یکنواختی است به وزن W . مرکز آن C است و صفحه آن قائم است. این ورقه می‌تواند در صفحه خودش حول محوری افقی که از نقطه A ، واقع بر محیط آن، می‌گذرد آزادانه حرکت کند. خط AC باید نسبت به امتداد قائم زاویه معین α بسازد. برای این منظور این ورقه را از نقطه B ، واقع بر محیط آن، برمیخی صیقلی تکیه می‌دهند. وضع نقطه B را طوری پیدا کنید که نیرویی که برمیخ فشار می‌آورد حداقل شود و این نیروی حداقل را تعیین کنید.

۲۰ - قرقره یکنواخت مدوری، به شعاع a و وزن W ، که می‌تواند آزادانه در یک صفحه قائم حرکت کند در نقطه P از حلقه کوچک صیقلی ثابتی عبور کرده است. نقطه Q از قرقره، به وسیله نخ انعطاف‌ناپذیری به طول l به نقطه ثابت O که به‌طور قائم بالای P است متصل شده است. ثابت کنید که در حالت تعادل کشش نخ برابر است با $\frac{W(l+a)}{PO}$ ، به شرط آنکه $PO > l$ است.

۲۱ - قاب عکسی به جرم 5 kg از یک میخ به وسیله نخ به طول $m/5$ آویزان است. دو انتهای نخ به دو حلقه از قاب عکس که به فاصله $m/4$ از یکدیگر بسته شده است. کشش نخ را تعیین کنید.

۲۲ - نردبان یکنواختی است به جرم 20 kg که با امتداد قائم زاویه 25° می‌سازد. یک انتهای آن بر دیوار صیقلی قائمی تکیه دارد و انتهای دیگر آن بر زمین افقی ناصافی تکیه کرده است. صفحه قائمی که از نردبان می‌گذرد، عمود بر دیوار است. عکس‌العملهای دیوار و زمین را تعیین کنید.

۲۳ - بر سطح صیقلی شیب‌داری که زاویه آن با افق برابر α است، کره‌ای به شعاع a و وزن W قرار دارد. به نقطه‌ای از این کره، نخ به طول l بسته شده است. انتهای دیگر نخ به نقطه‌ای از سطح شیب‌دار بسته شده است. ثابت کنید که کشش نخ برابر است با

$$\frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$$

۲۴ - میله یکنواخت AB می‌تواند در صفحه‌ای قائم حول انتهای A ، که ثابت است، بچرخد و این میله به وسیله نخ که به نقطه B متصل شده است طوری نگاه داشته

شده است که با خط قائم زاویه θ می سازد. جهت نخ را طوری تعیین کنید که کشش آن به حداقل ممکن برسد و در این حالت عکس العمل لولا را تعیین کنید.

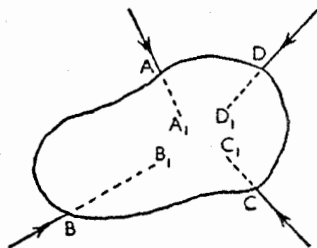
۲۵ - تیغه ای است به شکل مثلث متساوی الاضلاع که به دو رأس آن دو نخ متصل شده است. امتداد نخها از مرکز ثقل تیغه می گذرد و یکی از دو نخ به طور افقی است و کشش آن 5 N است. کشش نخ دیگر و وزن تیغه را تعیین کنید.

۲۶ - میله یکنواختی به طول 3 m و جرم 20 kg بر دو سطح صیقلی شیب دار که زاویه ی یکی با افق، 30° و زاویه ی دیگری با افق 60° است تکیه کرده است. تعیین کنید هنگامی که میله به حال تعادل است با چه نیروهایی بر دو سطح فشار می آورد و زاویه ی میله با افق چقدر است.

۴.۱۲. جسم صلبی که تحت اثربیش از سه نیرو است

اکنون حالتی عمومی را در نظر می گیریم که بیشتر از سه نیروی واقع در يك صفحه بر جسم صلب وارد می شوند. این نیروها لزومی ندارد که متقارب باشند.

با استفاده از اصل انتقال پذیری نیرو، نقطه اثر هر نیرو را می توان هر نقطه ای از راستای نیرو گرفت. مثلاً اگر چهار نیرو در نقاط A, B, C, D و A_1, B_1, C_1, D_1 بر يك جسم صلب، مطابق شکل ۱۱-۱۲، اثر کنند، می توان فرض کرد که نقاط اثر آنها عبارتند از A_1, B_1, C_1, D_1 که بر راستای چهار نیرو واقعند. بنابراین نتیجه می شود که شکل و اندازه جسم اهمیت ندارد، بلکه آنچه دارای اهمیت است بزرگی و اوضاع نسبی نیروهاست.



شکل ۱۱-۱۲

بنابراین شرایط تعادل فقط بستگی به نیروها دارد و به جسم بستگی ندارد. به همین دلیل است که غالباً از شرایط تعادل يك دستگاه نیرو گفتگو به عمل می آید، بدون آنکه از جسمی که نیروها بر آن وارد شده اند ذکر ی بشود.

گاهی تعیین براینند چند نیرو که بر اضلاع يك مربع یا يك چندضلعی وارد شده‌اند مورد نظر است. اضلاع شكل صرفاً راستاهای نیروها را مشخص می‌کند و لزومی ندارد که جسم دارای چنان شکلی باشد. شكل جسم هرچه باشد، به شرط آنکه جسم صلب باشد براینند تفاوتی نمی‌کند.

از قضیه‌ای که در بند بعد مطرح می‌کنیم، ابتدا شرایط تعادل را نتیجه می‌گیریم. روش عموماً در بند ۱۲-۲۱ خواهد آمد.

۵.۱۲. دستگاه غیرمخصوصی از نیروهای هم‌صفحه که بر يك جسم صلب اثر می‌کنند، و در حال تعادل نیستند، می‌توانند به يك نیرو یا يك زوج نیرو تبدیل شوند.

همیشه می‌توانیم سه نیرو، مثلاً P ، Q و R ، را به دو نیرو تبدیل کنیم. زیرا همیشه می‌توانیم P را با Q یا R ترکیب کنیم. مگر آنکه P با هر يك از آنها تشکیل زوج بدهد. در این حالت Q و R مساوی، متوازی و هم‌سو هستند (زیرا هر يك از آنها در خلاف جهت P است)، بنابراین Q و R می‌توانند با هم ترکیب شوند.

اگر نیروی دیگری از دستگاه را با دو نیرویی که از ترکیب P ، Q و R به دست آمده است در نظر بگیریم، باز هم می‌توانیم سه نیرو را به دو نیرو تبدیل کنیم و بدیهی است که با تکرار این کار، می‌توان دستگاه نیروها را به دو نیرو تبدیل کرد، که اگر در حال تعادل نباشند، باید یا زوج نیرو تشکیل دهند یا بدیهی است که به يك نیرو تبدیل شوند.

۶.۱۲. اگر دستگاه به يك نیرو تبدیل شود، آن را معمولاً با R نمایش می‌دهند؛ اگر دستگاه به يك زوج نیرو تبدیل شود، گشتاور آن را به G نمایش می‌دهند.

بدیهی است که تبدیل هر دستگاه نیروها به يك یا چند نیرو، تغییری در مجموع مؤلفه‌ها در هیچ جهت نمی‌دهند، زیرا با ترکیب هر دو نیرو، مؤلفهٔ براینند برابر است با مجموع مؤلفه‌های دو نیرو. پس با کاهش دستگاه نیروها، مجموع مؤلفه‌های دو نیروی اخیر در هر جهت برابر است با مجموع مؤلفه‌های نیروهای اولیه در آن جهت، و نیز برابر است با مؤلفهٔ نیروی مجرد براینند R که دستگاه نیروها سرانجام به آن تبدیل شده است. اگر دستگاه به يك زوج تبدیل شود، مجموع مؤلفه‌های نیروهای اولیه در هر جهت باید صفر باشد.

به همین ترتیب با عمل کاهش دادن يك دستگاه نیروها، در مجموع گشتاورها حول هر نقطه تغییری حاصل نمی‌شود؛ گشتاور R یا گشتاور زوج حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای نیروها که به طور جداگانه حول آن نقطه تعیین شده باشد (بند ۱۱-۱۳ را ببینید).

آشکار است که R از نظریه‌ی زوجی جهت به کمک بردار مجموع دستگاه نیروها تعیین می‌شود. اگر بردار مجموع، صفر باشد، $R = 0$ خواهد بود. در این صورت دستگاه، به طور کلی به یک زوج باگشتاور G کاهش می‌یابد. اگر علاوه بر آن $G = 0$ باشد، دستگاه در حال تعادل خواهد بود.

۷.۱۲. شرایط تعادل

اگر R برابر صفر باشد، مؤلفه‌اش در هر جهت می‌بایستی برابر صفر باشد؛ به طور معکوس برای آنکه یقین حاصل شود که R صفر است، باید بدانیم که مؤلفه‌هایش در دو جهت متفاوت صفرند. اگر بدانیم که مؤلفه‌اش فقط در یک جهت صفر است، این جهت بر جهت R عمود است، اما اگر مؤلفه‌اش در یک جهت دیگر نیز صفر باشد، در این صورت R می‌بایستی برابر صفر باشد.

نیز اگر مؤلفه‌های R در دو جهت دلخواه برابر صفرند، مجموعه‌های مؤلفه‌های نیروهای جداگانه در این دو جهت می‌بایستی صفر باشند.

چون گشتاور یک زوج نسبت به همه نقاط صفحه‌اش یکسان است، مشاهده می‌شود که اگر G صفر باشد، مجموع گشتاورهای نیروهای جداگانه دستگاه حول هر نقطه از صفحه خودشان می‌بایستی صفر باشد.

برعکس، اگر مجموع گشتاورهای نیروها حول هر نقطه از صفحه‌اشان برابر صفر باشد، دستگاه نمی‌تواند به یک زوج کاهش پیدا کند.

اما باید توجه داشت که وقتی که مجموع گشتاورها حول یک یا دو نقطه برابر صفر است، دلیل بر این نیست که دستگاه در حال تعادل است، زیرا ممکن است این دو نقطه بر راستای نیروی برابند قرار داشته باشند. اما اگر مجموع گشتاورها حول سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت صفر باشد، در این صورت دستگاه به حال تعادل است، زیرا نمی‌تواند به یک نیرو یا یک زوج نیرو کاهش پیدا کند.

شرایط لازم برای آنکه یک دستگاه نیرو به حال تعادل باشد به این قرار است:

(۱) مجموع مؤلفه‌ها در هر جهت دلخواه باید برابر صفر باشد.

(۲) مجموع گشتاورها نسبت به هر نقطه دلخواه باید برابر صفر باشد، اما برای

آنکه یقین پیدا کنیم که نیروها در حال تعادل هستند، وجود هر یک از این

شرایط به طور جداگانه، کافی نیست.

۸.۱۲. ساده‌ترین مجموعه شرایطی که می‌توان با برقرار بودن آنها، یقین حاصل کرد که

نیروها به حال تعادلند به شرح زیر است:

(۱) مجموعهای مؤلفه‌های نیروها در هر دو جهت دلخواه می‌بایستی برابر صفر باشد.

(۲) مجموع جبری گشتاورهای نیروها نسبت به هر نقطه دلخواه که در صفحه آنها واقع است باید برابر صفر باشد.

صورت دیگر شرط (۱) این است که بردار مجموع همه نیروها می‌بایستی برابر صفر باشد.

شرط (۱) اطمینان می‌دهد که دستگاه نمی‌تواند به یک نیروی مجرد کاهش پیدا کند، و شرط (۲) اطمینان می‌دهد که دستگاه نمی‌تواند به یک زوج کاهش پیدا کند. آشکار است که شرایط (۱) و (۲) در واقع معادل با سه شرط هستند. مجموعه دیگری از شرایط که قبلاً در بالا ذکر کردیم این است که مجموعهای گشتاورهای نیروها نسبت به هر سه نقطه‌ای که در یک خط مستقیم واقع نیستند باید برابر صفر باشد. این شرط نیز معادل با سه شرط است.

۹.۱۲. در حل مسئله‌های استاتیک با مجموعه نیروهایی که در حال تعادلند سروکار داریم، و بنابراین می‌توانیم از هر یک از مجموعه‌های شرایطی که در بالا ذکر کردیم استفاده کنیم. بر طبق قاعده‌ای که در زیر شرح می‌دهیم سه معادله به دست می‌آوریم که به نیروها و زاویه‌های مجهول مربوطند:

(الف) مجموع جبری مؤلفه‌های همه نیروها را در جهت مناسبی برابر صفر می‌گیریم.

(ب) مجموع جبری مؤلفه‌های همه نیروها را در جهت مناسب دیگر (عموماً عمود بر جهتی که در (الف) گفتیم) برابر صفر می‌گیریم.

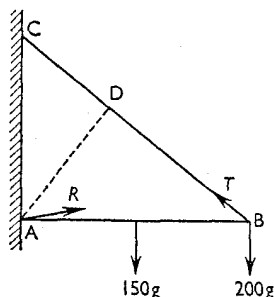
(پ) مجموع جبری گشتاورهای نیروها را نسبت به نقطه دلخواهی از صفحه آنها برابر صفر می‌گیریم.

یادداشت. جهتایی که در (الف) و (ب) انتخاب می‌شوند عموماً، اما نه همیشه، افقی و قائم هستند. نقطه‌ای که گشتاورها را حول آن تعیین می‌کنند طوری انتخاب می‌شود که حتی الامکان روی بیشتر نیروها واقع باشد، یعنی نقطه‌ای را انتخاب می‌کنند که بیشتر نیروها از آن نقطه می‌گذرند.

۱۰.۱۲. روشی که برای به‌دست آوردن معادلات در بند قبل بیان کردیم در مثالهای زیر به‌کار برده شده است.

باید توجه داشت که در بسیاری از حالتها، میان طولها و زاویه‌ها، رابطه‌هایی هندسی وجود دارند که معادله‌های بیشتری، علاوه بر معادله‌هایی که از تجزیه و گشتاور گرفتن به‌دست می‌آیند، به‌ما می‌دهند. در بعضی از مسائل، به‌کار بردن اصول مکانیک چندان دشوار نیست، اما برای به‌دست آوردن نتیجه مطلوب، اطلاعات هندسی و مثلثاتی مورد لزوم است.

مثال ۱: میله یکنواخت و سنگینی به جرم 150 kg و به طول $4/5 \text{ m}$ به دیوار قائمی لولا شده است. به انتهای دیگر میله، نخ بسته شده است و انتهای دیگر نخ، در $3/6$ متری بالای لولای میله به دیوار بسته شده است، به طوری که میله افقی است. از این انتهای میله وزنه‌ای به جرم 200 kg آویزان است. کشش نخ و نیروی فشاری را که بر میله وارد می‌شود تعیین کنید.



شکل ۱۲-۱۲

حل : فرض می‌کنیم که 150 kg و 200 kg (۱۲-۱۱) میله را نشان بدهد، AC دیوار و BC نخ باشد.

چون $AB = 4/5 \text{ m}$ و $AC = 3/6 \text{ m}$

$$\sin ABC = \frac{4}{\sqrt{41}} \text{ و } BC = \frac{9\sqrt{41}}{10} \text{ m}$$

اگر AD عمودی باشد که از A بر BC رسم می‌شود،

$$AD = AB \sin ABC = \frac{18}{\sqrt{41}} \text{ m}$$

نیروهایی که بر میله اثر می کنند در شکل نشان داده شده اند، R عکس العملی است که در لولای A وارد می شود و T ، نیرویی است که در B وارد می شود و برابر با کشش نخ است.

نسبت به A گشتاور می گیریم، زیرا R حذف می شود. خواهیم داشت:

$$\frac{18}{\sqrt{41}}T = 150g \times \frac{4/5}{2} + 200g \times 4/5$$

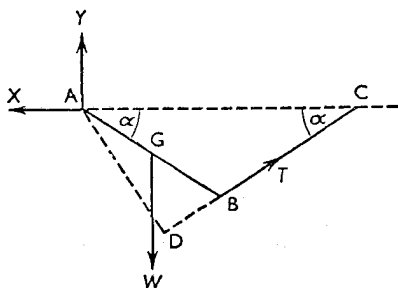
$$\therefore T = \frac{275 \times 9/8 \times 4/5}{18} \sqrt{41} = 673/75 \sqrt{41} \text{ N}$$

تنها نیروهای افقی که بر میله اثر می کنند عبارتند از مؤلفه های افقی کشش نخ و عکس العمل در A . این مؤلفه ها باید مساوی و در خلاف جهت یکدیگر باشند، و نیروی فشاری که بر میله وارد می شود برابر با یکی از آنهاست.

بنابراین نیرویی که بر میله فشار می آورد برابر است با

$$\begin{aligned} T \cos ABC &= 673/75 \sqrt{41} \times \frac{5}{\sqrt{41}} \\ &= 3368/75 \text{ N} \end{aligned}$$

مثال ۲: انتهای میله یکنواختی به وزن W به یک لولا متصل شده است، و انتهای دیگر با نخ نگاهداری می شود که یک طرف آن به میله و طرف دیگر آن به نقطه ای همسطح لولا متصل شده است. زاویه هایی که میله و نخ با افق می سازند یکسان است. کشش نخ و عکس العمل در لولا را تعیین کنید.



شکل ۱۲-۱۳

حل : فرض می کنیم AB (شکل ۱۲-۱۳) نشان دهنده میله، G نقطه وسط، و BC

نخ، و AC امتداد افقی باشد.

فرض می‌کنیم $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ و $AB = l$ باشد.

در این صورت $AC = 2l \cos \alpha$ و اگر AD عمودی باشد که از A بر BC

رسم شده است، خواهیم داشت: $AD = 2l \cos \alpha \sin \alpha$.

پس اگر T کشش نخ باشد و حول A گشتاور بگیریم،

$$T \cdot 2l \cos \alpha \sin \alpha = W \frac{l}{2} \cos \alpha$$

$$T = \frac{W}{4 \sin \alpha} \quad \text{یا}$$

اگر X و Y مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل در A باشند، در این

صورت با تجزیه عکس‌العمل در امتداد افقی:

$$X = T \cos \alpha = \frac{W \cos \alpha}{4 \sin \alpha}$$

و با تجزیه در امتداد قائم،

$$Y = W - T \sin \alpha = \frac{3}{4} W$$

اگر R برآیند عکس‌العمل در A باشد،

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{W}{4} \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$$

اگر θ زاویه R با افق باشد،

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \operatorname{tg} \alpha$$

مثال ۳: تیری که انتهای آن روی زمین قرار دارد، به کمک دو ریسمان به‌طور قائم

نگهداری شده است. یک انتهای هریک از این دو ریسمان به زمین و به فاصله‌های

d از دو طرف پای تیر، متصل شده است. این دو ریسمان در ارتفاعهای a و b

به تیر محکم شده‌اند و کشش طوری تنظیم شده است، که عکس‌العمل قائم زمین

دو برابر وزن تیر است. ثابت کنید که عکس‌العمل کل زمین با امتداد قائم زاویه‌ای

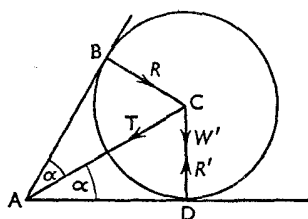
برابر θ می‌سازد، به طوری که

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{4} d \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

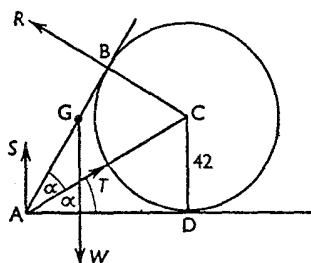
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X}{2W} = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

مثال ۴: غلتکی به شعاع ۴۲ cm روی زمین قرار دارد. تخته چوب یکنواختی به طول ۶۰ cm برای غلتک تکیه کرده است. یک انتهای تخته چوب بر زمین است و انتهای دیگر تخته چوب کمی از غلتک بالاتر رفته است. تخته چوب بر محور غلتک عمود است. نخ به طول ۷۰ cm به محور غلتک و به آن انتهای تخته چوب که روی زمین متصل است، با این کار از لغزش غلتک و تخته چوب جلوگیری کنیم. ثابت کنید که کشش نخ ۵/۱۸ وزن تخته چوب است.

یادداشت. به اصطلاح میان اجسام و زمین یا میان خودشان اشاره ای نشده است. اما چون گفته ایم که از لغزش آنها به کمک نخ جلوگیری شده است، باید فرض کنیم که سطوح تماس صیقلی هستند. در واقع، مسئله، در غیر این صورت، نامعین است.



شکل ۱۲-۱۵ ب



شکل ۱۲-۱۵ الف

حل : فرض می کنیم C (شکل ۱۲-۱۵) مرکز غلتک، D نقطه تماس غلتک با زمین، AB تخته چوبی که در B با غلتک تماس دارد، G نقطه وسط تخته چوب، و زاویه CAD برابر α باشد.

چون $AC = 70 \text{ cm}$ و $CD = 42 \text{ cm}$

$$AD = \sqrt{70^2 - 42^2} = 56 \text{ cm}$$

$$\therefore AB = 56 \text{ cm}$$

شکل ۱۲-۱۵ الف نیروهایی را نشان می دهد که بر تخته چوب وارد می شوند و

شکل ۱۲-۱۵ ب نیروهایی را نشان می دهد که بر غلتک وارد می شوند.

عکس العمل R تخته چوب در نقطه تماس با غلتک در امتداد شعاع CB است، و W وزن تخته چوب در امتداد قائمی است که از G می‌گذرد. برای تخته چوب، نسبت به A گشتاور می‌گیریم، تا عکس العمل S زمین و کشش T حذف شوند. خواهیم داشت:

$$56R = W \times 30 \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{7}{25} \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{اما}$$

$$\therefore R = W \frac{30 \times 7}{56 \times 25} = \frac{3}{20} W$$

نیروهایی که مایلند غلتک را در امتداد افقی حرکت دهند مؤلفه‌های افقی R و کشش T نخ هستند. چون این نیروها باید مساوی و مخالف یکدیگر باشند خواهیم داشت:

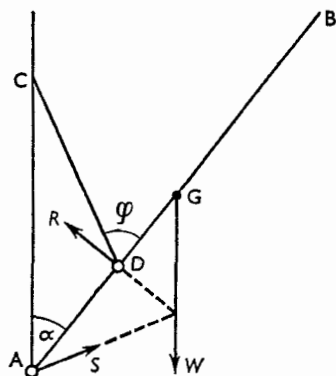
$$T \cos \alpha = R \sin 2\alpha$$

$$\therefore T = 2R \sin \alpha = 2 \times \frac{3W}{20} \times \frac{3}{5} = 0.18W$$

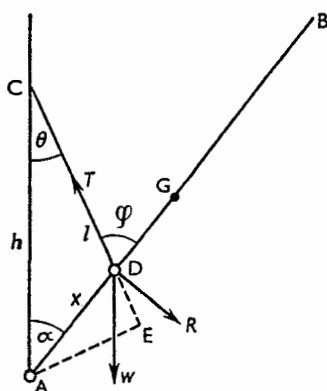
مثال ۵: میلهٔ یکنواختی به وزن W و طول $2a$ می‌تواند حول A ، یک انتهای خودش، آزادانه بچرخد. این میله به وسیلهٔ نخ‌ی نگاهداری می‌شود که یک انتهای آن به نقطه‌ای که به طور قائم بالای A و به فاصلهٔ h از A است متصل شده است و انتهای دیگر آن به حلقه‌ای صیقلی به وزن W متصل شده است و میله از این حلقه عبور کرده است. نشان دهید که در وضع تعادل، نخ با امتداد قائم زاویه‌ای برابر θ می‌سازد به طوری که $Wal(h \cos \theta - l) = w(l^2 - 2lh \cos \theta + h^2)^{3/2}$

حل : فرض می‌کنیم C (شکل ۱۲-۱۶) انتهای بالایی نخ، D محل حلقه، G نقطهٔ وسط میله و زاویهٔ CAD برابر α ، زاویهٔ CDG برابر φ و $AD = x$ باشد. AE (شکل ۱۲-۱۶ الف) را عمود بر CD رسم می‌کنیم، در این صورت $AE = h \sin \theta$ ؛ فرض می‌کنیم کشش نخ برابر T باشد.

شکل ۱۲-۱۶ الف نیروهایی را نشان می‌دهد که بر حلقه وارد می‌شوند، و شکل ۱۲-۱۶ ب نیروهایی را نشان می‌دهد که بر میله وارد می‌شوند. S عکس‌العملی است که در لولا بر میله وارد می‌شود. بر حلقه و بر میله نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت R عمود بر میله وارد می‌شوند.



شکل ۱۶-۱۲ ب



شکل ۱۶-۱۲ الف

برای حلقه، با تجزیه نیرو در امتداد AB و در امتداد عمود بر AB، چنین خواهیم داشت:

$$T \cos \varphi = w \cos \alpha \quad (۱)$$

$$T \sin \varphi = w \sin \alpha + R \quad (۲)$$

تنها برای میله با گرفتن گشتاور نسبت به A خواهیم داشت:

$$Rx = W a \sin \alpha \quad (۳)$$

T را از (۱) و R را از (۳) به دست می‌آوریم و در معادله (۲) می‌گذاریم. خواهیم داشت:

$$w \cos \alpha \tan \varphi = w \sin \alpha + W \frac{a}{x} \sin \alpha$$

$$\therefore wx (\cos \alpha \tan \varphi - \sin \alpha) = w a \sin \alpha$$

$$\therefore wx \sin (\varphi - \alpha) = W a \sin \alpha \cos \varphi$$

$$\therefore wx \sin \theta = W a \sin \alpha \cos \varphi$$

اما بر طبق شکل،

$$\frac{x}{\sin \theta} = \frac{l}{\sin \alpha}$$

$$wx^2 = W a l \cos \varphi$$

پس

نیز بر طبق شکل،

$$DE = x \cos \varphi = h \cos \theta - l$$

$$W a l (h \cos \theta - l) = wx^3$$

پس

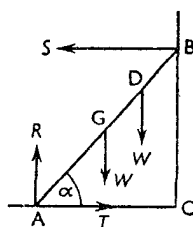
که می‌توان نتیجه مطلوب را از آن به‌دست آورد، زیرا داریم:

$$x^2 = h^2 - 2hl \cos \theta + l^2$$

یادداشت. علاوه بر معادله (۳) می‌توانستیم با تجزیه نیرو در امتداد میل و در امتداد عمود بر میل دو معادله دیگر به‌دست آوریم. این دو معادله امکان تعیین بزرگی و جهت S را برای ما فراهم می‌کردند.

مثال ۶: نردبانی با افق زاویه α می‌سازد و یک انتهای آن بر زمینی صیقلی و افقی و انتهای دیگر آن بر دیواری صیقلی و قائم قرار دارد. انتهای پایینی نردبان به وسیله نخ به محل تلاقی دیوار و زمین متصل شده است. کشش نخ و عکس‌العمل دیوار و زمین را تعیین کنید. نیز کشش نخ را برای هنگامی تعیین کنید که شخصی که وزنش برابر وزن نردبان است، تا سه چهارم طول نردبان از نردبان بالا رفته است.

حل: فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۲-۱۷) نردبان، C محل تلاقی دیوار و زمین، و G نقطه وسط نردبان باشد.



شکل ۱۲-۱۷

چون سطوح صیقلی هستند، عکس‌العمل‌های در A و B بر زمین و دیوار عمودند. این عکس‌العمل‌ها را R و S می‌نامیم.

فرض می‌کنیم وزن نردبان که در امتداد قائم است و از G می‌گذرد برابر W و کشش نخ برابر T باشد.

با تجزیه در امتداد قائم: (۱) $R = W$

با تجزیه در امتداد افقی: (۲) $S = T$

با گشتاور گرفتن نسبت به B ,

$$T \cdot AB \sin \alpha = R \cdot AB \cos \alpha - W \frac{AB}{2} \cos \alpha \quad (۳)$$

R را میان (۱) و (۳) حذف می کنیم:

$$T \sin \alpha = W \cos \alpha - \frac{1}{2} W \cos \alpha$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} W \cot \alpha$$

$$S = T = \frac{1}{2} W \cot \alpha \quad \text{از (۲):}$$

وقتی که آن شخص در نقطه D است، که $AD = \frac{3}{4} AB$ ، معادلات (۱) و (۳) چنین می شوند.

$$R = W + W = 2W$$

$$T \cdot AB \sin \alpha = R \cdot AB \cos \alpha - W \frac{AB}{2} \cos \alpha - W \frac{AB}{4} \cos \alpha \quad \text{و}$$

$$\therefore T \sin \alpha = 2W \cos \alpha - \frac{3}{4} W \cos \alpha$$

$$\therefore T = \frac{5}{4} W \cot \alpha$$

تمرین ۲۰۱۲

۱ - میله سنگین AB به طول $۲/۴$ m و به جرم ۲۰ kg در A ، به نقطه ای واقع بر یک دیوار قائم، لولا شده است. این میله به وسیله زنجیری که به B متصل شده است به طور افقی قرار دارد. انتهای دیگر زنجیر به نقطه ای از دیوار که در $۱/۵$ متری بالای A است متصل شده است. اگر در $۱/۸$ متری از A وزنه ای به جرم ۱۰ kg به میله آویزان باشد، کشش زنجیر و بزرگی و جهت عمل A را میان میله و دیوار حساب کنید.

۲ - میله یکنواخت ACB به طول $۱/۸$ m و به جرم ۴ kg می تواند آزادانه حول لولای C که در $۰/۶$ متری A است بچرخد. به کمک نیروی قائمی که سوی آن به طرف پایین و بزرگی آن ۴۹ N است و بر A وارد می شود و نیرویی افقی که بر B وارد می شود میله را به وضعی نگاه می دارند که با خط قائم زاویه ۴۵° می سازد،

و A در سمت پایین است. بزرگی نیرویی که بر B وارد می‌شود و بزرگی و جهت عکس‌العمل لولای C را تعیین کنید.

۳ - میله سنگین و یکنواختی به وزن W از یک نقطه به وسیله دو نخ با طولهای مساوی آویزان است. هریک از نخها به یک انتهای میله متصل شده‌اند. وزنه‌ای به وزن W در نیمه‌راه میان مرکز میله و یک انتهای میله به میله آویزان است. ثابت کنید

$$\frac{2W + 3w}{2W + w}$$

که نسبت کششهای نخها برابر است با

۴ - دری به ارتفاع $2/25$ m به دو لولا که به فواصل 25 cm از بالا و از پایین در هستند متصل است. جرم در 18 kg و مرکز ثقل آن در $67/5$ cm از خط واصل میان لولاهاست. کل نیرویی را که بر هر لولا وارد می‌شود تعیین کنید. فرض می‌شود که هر لولا نصف وزن در را تحمل می‌کند.

۵ - دری از دو لولای A و B آویزان است. مرکز ثقل آن G است و خط قائمی که از G می‌گذرد، خطی افقی را که از B می‌گذرد در K قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر تمام وزن در را لولای A تحمل کند، مثلث ABK را می‌توان به عنوان مثلث نیروها به کاربرد و از روی آن عکس‌العملهای در A و B را حساب کرد. نیز این ترسیم را هنگامی که وزن در به‌طور متساوی میان A و B تقسیم شود تکمیل کنید.

۶ - دو انتهای میله یکنواختی بر روی دو سطح صیقلی شیبدار قرار دارد. یکی از سطوح با افق زاویه 30° و دیگری با افق زاویه 60° می‌سازد. وزنه‌ای که وزن آن دو برابر وزن میله است می‌تواند در طول میله بلغزد. وضع وزنه لغزنده را هنگامی که میله در وضع افقی است تعیین کنید.

۷ - دو انتهای نردبان صیقلی یکنواخت، یکی بر سطح افقی و دیگری بر دیواری قائم است. این نردبان به وسیله نخي نگاهداری می‌شود که یک انتهای آن به یک پله نردبان، که در $\frac{1}{4}$ طول نردبان از طرف پایین است، متصل شده است و انتهای دیگر آن به نقطه‌ای از پای دیوار که مستقیماً به‌طور قائم در زیر انتهای بالایی نردبان است متصل شده است. نشان دهید که اگر پایین و بالای نردبان از پای دیوار به ترتیب در فاصله‌های a و b باشند، نسبت عکس‌العملهای P و Q که به ترتیب میان نردبان و زمین و نردبان و دیوار است بر طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{Q}{P} = \frac{3a}{5b}$$

۸ - نردبانی به طول 3 m و جرم $17/5\text{ kg}$ از انتهای A بردیوار صیقلی قائمی تکیه کرده است. B انتهای دیگر نردبان بر روی زمین و به فاصله $1/8\text{ m}$ از پای دیوار است. به کمک ریسمانی افقی که به B متصل است، نردبان را در این وضع نگاه می‌دارند. اگر مرکز ثقل نردبان در $1/2\text{ m}$ از B باشد، کشش نخ را تعیین کنید. نیز بزرگی و جهت نیرویی را که باید بر A اعمال کرد تا نردبان بدون کمک ریسمان در همان وضع بماند تعیین کنید.

۹ - تخته چوب یکنواخت AB به طول $1/8\text{ m}$ و وزن معلوم، به طور افقی بر روی دو میخ C و D قرار دارد، به طوری که $AC = BD = 20\text{ cm}$ است. تخته چوب $A'B'$ که از هر نظر مشابه AB است بر روی تخته چوب اول قرار دارد، به طوری که A' در $27/5$ سانتیمتری A است. نیروهای فشاری R_1 و R_2 را که بر C و D وارد می‌شوند تعیین کنید. اکنون طوری که تعادل بازم برقرار بماند، نیروی قائمی برابر P بر A' اعمال می‌کنیم. اگر نیروهای فشاری که این بار بر C و D وارد می‌شوند به ترتیب R'_1 و R'_2 باشند، نشان دهید که

$$\frac{R'_1 - R_1}{R_2 - R'_2} = \frac{75}{19}$$

۱۰ - مرکز ثقل يك ظرف نیمکره‌ای شکل بر روی شعاعی از آن قرار دارد که ظرف نسبت به آن تقارن دارد و این شعاع را به نسبت m و n تقسیم می‌کند. اگر ظرف از طرف منحنی آن بر روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه θ می‌سازد قرار گیرد و آن سطح به قدری ناصاف باشد که از لغزش ظرف جلوگیری کند، زاویه امتداد دوره ظرف را با افق تعیین کنید. معلوم شده است که وقتی که θ تقریباً برابر 25° است، صفحه دوره ظرف به طور قائم قرار می‌گیرد. نسبت $\frac{m}{n}$ را تعیین کنید.

۱۱ - شخصی می‌خواهد يك غلتك صیقلی به قطر 50 cm و جرم 100 kg را از روی حاشیه يك جدول که بلندی آن 10 cm است بکشد. غلتك را در هر وضع که باشد، در چه جهت بکشد تا با کمترین کوشش از حاشیه جدول بالا برود. نشان دهید که حداکثر نیروی لازم 784 N است.

۱۲ - می‌خواهند يك غلتك را که وزن آن W و شعاع آن r است و مرکز ثقل آن بر روی محورش واقع است از پله‌ای به بلندی $\frac{1}{4}r$ بالا بکشند. نیرویی که بردسته وارد می‌شود مستقیماً بر محور غلتك وارد می‌شود. بهترین جهت برای کشیدن دسته

چيست؟ نیرویی را که برای به حرکت در آوردن غلتک در این جهت وارد می کنند با نیرویی مقایسه کنید که برای به حرکت در آوردن غلتک در امتداد افقی وارد می کنند. آیا در غلتک تمایلی برای لغزش بر روی پله یا زمین وجود دارد؟

۱۳- به دو انتهای میله یکنواخت AB ، به طول 0.9 m و جرم 2 kg ، دو انتهای نخ به طول 1.5 m متصل شده اند. نخ از حلقه ی صیقلی O که به دیوار صیقلی قائمی متصل است عبور کرده است. میله که انتهای A از آن در زیر قائم نقطه O بر دیوار تکیه کرده است، در صفحه ای قائم که عمود بر دیوار است قرار دارد. ثابت کنید که اگر OA برابر 0.6 m باشد، میله به حال تعادل خواهد بود، و نشان دهید که کشش نخ برابر $14/7 \text{ N}$ است.

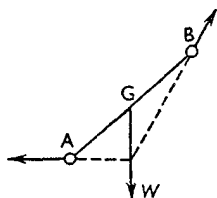
۱۴- به تیر تلگرافی شش سیم بسته شده است. سه سیم به طرف جنوب می رود، دو سیم به طرف شمال شرقی می رود و یک سیم به طرف مغرب می رود. اگر همه سیمها در یک صفحه افقی باشند و کششی هر یک 900 N باشد، تعیین کنید چه فشاری بر تیر وارد می شود. سیمها هر یک در 12 متری بالای زمین هستند و تیر را با مهاری که یک طرف آن به 9 متری بالای تیر متصل شده و طرف دیگر آن در $4/5$ متری از پای تیر بر زمین تکیه دارد محکم می کنند. اگر تیر تمایل به افتادن نداشته باشد، کششی این مهار را تعیین کنید.

۱۵- جرم تیغه مثلث شکل ABC ، که در آن زاویه های B و C هر یک 45° هستند، برابر 3 kg است. این تیغه از نقطه وسط ضلع BC آویزان شده است. وزنه های 2 kg و 8 kg به ترتیب از نقاط A و B و وزنه $M \text{ kg}$ از C آویزان است. اگر ضلع BC با خط قائم زاویه 60° بسازد، مقدار M را تعیین کنید.

۱۱-۱۲ میله های مفصل دار

اکنون مسائلی را بررسی خواهیم کرد که شامل دو یا چند جسم صلب است، و مخصوصاً، حالتی را که در آن چند میله سنگین به طور صیقلی با هم مفصل شده اند. فشارهایی را که بر ماده میله ها وارد می شود در نظر نخواهیم گرفت. در مسائل معمولی مربوط به تعادل میله های سنگین مفصل دار، فقط نیروهایی را که بر مفصلها وارد می شوند در نظر خواهیم گرفت (و البته وزن میله را نیز به حساب می آوریم)، یعنی تعادل میله ها را تحت اثر اوزان آنها و نیروهایی که در انتهای آنها به وسیله لولاها وارد می شود مورد نظر قرار می دهیم.

۱۲۰۱۲. میله سنگین AB (شکل ۱۲-۱۸) را که آزادانه در A و B مفصل شده است در نظر می گیریم.



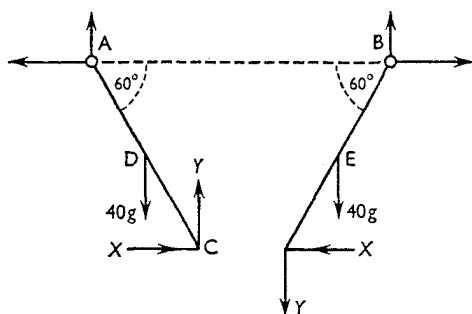
شکل ۱۲-۱۸

امتداد نیروی وزن آن قائم و از مرکز ثقل G می گذرد، و آشکار است که برای آنکه تعادل برقرار شود باید بر A و B نیروهایی وارد شوند. این نیروها ممکن است در امتداد قائم یا در امتداد دیگری مثلاً امتدادی که در شکل نشان داده شده است باشند. یعنی در هر صورت امتداد آنها باید از نقطه ای واقع بر روی راستای نیروی وزن بگذرد.

در هیچ حالتی این نیروها نمی توانند در امتداد میله وارد شوند (مگر آنکه میله قائم باشد). اما اگر میله سبک باشد، در این صورت نیروهایی که بر دوانتهای میله وارد می شوند و میله را به حال تعادل نگاه می دارند می بایستی برابر و در سوی مخالف یکدیگر باشند و در امتداد میله وارد شوند.

غالباً دانش آموزان میان حالت های مربوط به مسائل میله های سنگین با حالت های مربوط به مسائل میله های سبک اشتباه می کنند. در حالت های مربوط به میله های سنگین، تنها امتدادی که نیروها نمی توانند بر انتهای میله وارد شوند، امتداد میله است. معمولاً مؤلفه های افقی و قائم نیرویی را که به وسیله لولا بر میله وارد می شود در نظر می گیریم، و برای آنکه این مؤلفه ها را در نمودار به طور آشکار نشان دهیم، بهتر است که میله ها را متلاقی رسم نکنیم بلکه میان میله ها فاصله ای بگذاریم.

۱۳۰۱۲. مثال ۱: دو میله مشابه و یکنواخت AC و CB به طور صیقلی در C مفصل شده اند، و انتهای دیگر این میله ها به دو نقطه همراز A و B متصل شده اند. اگر جرم هر میله g ۴۰ باشد و امتداد هر میله با افق زاویه ۵۰° بسازد، نیرویی را که لولای C وارد می کند تعیین کنید.



شکل ۱۲-۱۹

حل : فرض می‌کنیم E، D (شکل ۱۲-۱۹) نقاط وسط میله‌ها باشند و بنابراین اوزان میله‌ها به‌طور قائم از D و E می‌گذرند.

فرض می‌کنیم مؤلفه‌های افقی و قائم نیرویی که لولای C بر میله AC وارد می‌کند به ترتیب X و Y باشند. نیرویی که از طرف لولا بر BC وارد می‌شود دارای مؤلفه‌هایی با همین بزرگی است، اما جهت آن مؤلفه‌ها در جهت عکس مؤلفه‌های X و Y مربوط به میله AC است. این نیروها و نیروهایی که در تکیه گاه‌های A و B بر میله‌ها وارد می‌شوند در شکل نشان داده شده‌اند. فرض می‌کنیم طول هر یک از میله‌ها برابر l باشد. برای AC نسبت به A گشتاور می‌گیریم،

$$Xl \sin 60^\circ + Yl \cos 60^\circ = 40g \frac{l}{2} \cos 60^\circ$$

$$\therefore X \lg 60^\circ + Y = 20g \quad (1)$$

برای BC نسبت به B گشتاور می‌گیریم،

$$Xl \sin 60^\circ - Yl \cos 60^\circ = 40g \frac{l}{2} \cos 60^\circ$$

$$\therefore X \lg 60^\circ - Y = 20g \quad (2)$$

از معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $Y = 0$ است.

پس عکس‌العمل C فقط مشتمل بر نیروی افقی X نیوتون است که مقدار آن چنین به‌دست می‌آید:

$$X \operatorname{tg} 60 = 20g$$

$$\therefore X = \frac{196}{\sqrt{3}} = \frac{196}{3} \sqrt{3}$$

یادداشت. چون تمام دستگاه نسبت به قائمی که از C می گذرد قرینه است، ممکن بود بدون نوشتن معادله ها، نتیجه بگیریم که Y می بایستی برابر صفر باشد. روشن است که برطبق شکل ۱۲-۱۹ فقط اگر Y برابر صفر باشد، نیروهایی که بر دوميله وارد می شوند مشابه خواهند بود، در غیر این صورت تقارن از میان خواهد رفت.

مثال ۲: دوميله یکنواخت AB و AC با طولهای متساوی و اوزان W و W' از دو لولای همتر از B و C در یک صفحه قائم آویزان شده اند. دوميله به طور صیقلی در انتهای A به یکدیگر متصل شده اند. ثابت کنید که مؤلفه افقی عکس العمل A برابر $\frac{1}{4}(W+W')\frac{a}{h}$ است، که در آن ۲a برابر فاصله BC است و h ارتفاع BC از A است. نیز مؤلفه قائم عکس العمل را تعیین کنید.

حل: فرض می کنیم E, D (شکل ۱۲-۲۰) نقاط وسط میله ها، و X و Y مؤلفه های افقی وقائم عمل لولای A بر میله ها باشد.

این نیروها می بایستی در جهت های مخالف یکدیگر بر دو میله باشند، اما چه آنها را در جهت هایی مطابق شکل نشان دهیم چه در جهت های مخالف آن نشان دهیم تفاوتی نخواهد کرد. اگر آنها را در جهت های مخالف جهت هایی که واقعاً اثر می کنند نشان بدهیم مقادیر منفی برای آنها به دست خواهیم آورد.

فرض می کنیم زاویه ABC برابر α باشد. در این صورت $\angle ACB = \alpha$. فرض می کنیم طول هریک از میله ها برابر l باشد. برای AB گشتاورها را نسبت به B تعیین می کنیم، خواهیم داشت:

$$Xl \sin \alpha + Yl \cos \alpha = W \frac{l}{2} \cos \alpha$$

$$\therefore X \operatorname{tg} \alpha + Y = \frac{1}{2} W \quad (1)$$

برای AC گشتاورها را نسبت به C تعیین می کنیم، خواهیم داشت:

$$Xl \sin \alpha - Yl \cos \alpha = W' \frac{l}{2} \cos \alpha$$

$$\therefore X \operatorname{tg} \alpha - Y = \frac{1}{2} W' \quad (2)$$

از جمع (۱) و (۲)،

$$2X \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\rho} (W + W')$$

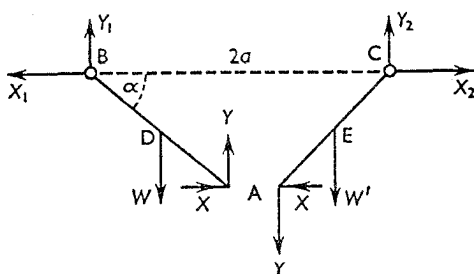
$$\therefore X = \frac{1}{\rho} (W + W') \cot \alpha$$

$$\therefore X = \frac{(W + W')a}{2h} \quad \text{چون } \cot \alpha = \frac{a}{h} \text{ است،}$$

(۲) را از (۱) کم می‌کنیم:

$$2Y = \frac{1}{\rho} (W - W')$$

$$Y = \frac{1}{\rho} (W - W') \quad \text{یا}$$



شکل ۱۲-۲۰

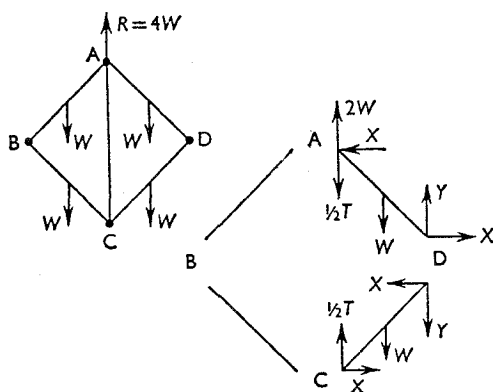
یادداشت. چهار معادله دیگری که از تجزیه در امتدادهای افقی و قائم برای میله AB و میله BC به دست می‌آوریم، این امکان را فراهم می‌کند که X_1 ، Y_1 و X_2 ، Y_2 مؤلفه‌های عکس‌العملهای میله‌ها را در لولاهای B و C تعیین کنیم.

مثال ۳: چهارچوبه مربعی شکل ABCD از چهار میله سنگین و یکنواخت که به هم مفصل شده‌اند تشکیل شده است و دستگاه از مفصل A آویزان است و برای آنکه چهارچوبه به شکل مربع باقی بماند، مفصلهای A و C را با یک نخ به هم مربوط می‌کنند. کشش نخ و بزرگی و جهت عمل را در هریک از مفصلهای B یا D تعیین کنید.

حل : نموداری مطابق شکل ۱۲-۲۱ رسم می کنیم و میان A، B، C و D فاصله هایی می گذاریم. تمام نیروهایی که بر AD و CD وارد می شوند همانهایی هستند که نشان داده ایم؛ از تقارن معلوم می شود که مجموعه نیروهای مشابهی بر AB و BC وارد می شوند.

فرض می کنیم مؤلفه های افقی وقائم عمل لولای D بر AD به ترتیب X و Y باشند. عکس العملی که بر CD وارد می شود مشتمل بر مؤلفه هایی مساوی با مؤلفه های AD، اما در جهتهایی مخالف با آنهاست.

نیروهایی که بر AD وارد می شوند عبارتند از نیروهای X ، Y که بر D وارد می شوند، وزن W و چند نیروی دیگر که بر A وارد می شوند. چون نیرویی که از تکیه گاه A بر تمام دستگاه وارد می شود برابر $4W$ است، از روی قرینه معلوم می شود که نیرویی برابر $2W$ بر AD و نیرویی برابر $2W$ بر AB وارد می شود. به همین طریق، نیروی $\frac{1}{2}T$ ، برابر با نصف کشش نخ، در A، به طرف پایین بر AD وارد می شود. از این گذشته در لولای A عکس العملی وجود دارد که مؤلفه قائم آن، به سبب تقارن، صفر است و مؤلفه افقی آن می بایستی برابر X و در جهتی باشد که در شکل نشان داده شده است، زیرا تنها نیروی افقی دیگری که بر AD وارد می شود X است که بر D اثر می کند.



شکل ۱۲-۲۱

$$2W + Y = W + \frac{1}{2}T \quad (۱)$$

و اگر l طول میله باشد و نسبت به A گشتاور بگیریم، خواهیم داشت:

$$Xl \cos 45^\circ + Yl \sin 45^\circ = W \left(\frac{1}{2} l \sin 45^\circ \right)$$

$$\therefore X + Y = \frac{1}{2}W \quad (۲)$$

نیروهایی که بر CD وارد می‌شوند عبارتند از X و Y ، که بر D مطابق

شکل وارد می‌شوند، وزن W ، کشش $\frac{1}{2}T$ که به طرف بالا مطابق آنچه در فوق

شرح دادیم وارد می‌شود، و عکس‌العمل در لولای C . مؤلفه قائم این عکس‌العمل برطبق تقارن برابر صفر است، و مؤلفه افقی آن می‌بایستی برابر X و در جهتی باشد که نشان داده‌ایم، زیرا تنها نیروی افقی دیگری که بر CD در D وارد می‌شود X است.

با تجزیه در امتداد قائم،

$$\frac{1}{2}T = W + Y \quad (۳)$$

و با گرفتن گشتاور نسبت به C ، خواهیم داشت،

$$Xl \cos 45^\circ - Yl \sin 45^\circ = W \left(\frac{1}{2} l \cos 45^\circ \right)$$

$$\therefore X - Y = \frac{1}{2}W \quad (۴)$$

از (۲) و (۴) نتیجه می‌شود که $Y = 0$ و $X = \frac{1}{2}W$ است. (در اینجا

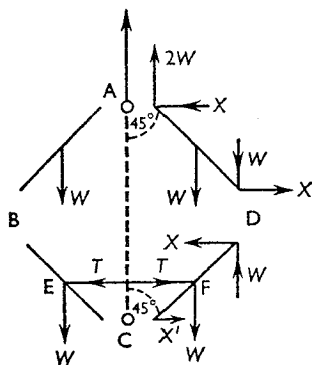
نمی‌توانستیم پیش‌بینی کنیم که Y برابر صفر خواهد بود).

از (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم که $T = 2W$ است.

مثال ۴: چهار میله متشابه و یکنواخت آزادانه به یکدیگر مفصل شده‌اند و تشکیل یک لوزی داده‌اند. این لوزی از مفصل A آویزان است و به کمک میله‌ای که وزن آن ناچیز است و به نقاط وسط میله‌های BC و CD مفصل شده است، به شکل مربع درمی‌آید. مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل‌های مفصل‌های B و D را تعیین کنید.

حل: چون EF وزن ندارد، نیروهایی که به کمک میله‌ها در E و F بر آن وارد می‌شوند

می بایستی در امتداد طول آن و مساوی و در خلاف جهت یکدیگر باشند (شکل ۱۲-۲۲). نیز چون اگر میله EF نبود، شکل جمع می شد یعنی B و D به طرف داخل شکل حرکت می کردند، آشکار است که در میله EF نیروی فشاری برابر T وجود دارد.



شکل ۹۲-۲۲

چون نیرویی که تمام دستگاه را تحمل می‌کند و بر A وارد می‌شود برابر $2W$ است، از روی تقارن معلوم می‌شود که از تکیه‌گاه A بر AD نیروی $2W$ و بر AB نیروی $2W$ وارد می‌شود.

مؤلفه قائم عکس العمل AD در مفصل A بر طبق تقارن برابر صفر است؛ مؤلفه افقی را با X نشان می‌دهیم. در مفصل دیگدر، مؤلفه افقی عکس العملی که بر AD وارد می‌شود نیز می‌بایستی برابر X و در جهتی باشد که نشان داده‌ایم، و مؤلفه قائم می‌بایستی برابر W و به طرف پایین باشد. برای میله AD نسبت به A گشتاور می‌گیریم. اگر l طول AD باشد، خواهیم داشت:

$$Xl \cos \varphi \Delta^\circ = Wl \sin \varphi \Delta^\circ + W \left(\frac{1}{\varphi} l \sin \varphi \Delta^\circ \right)$$

$$\therefore X = \frac{3}{2}W$$

بنابراین مؤلفه‌های قائم و افقی عکس‌العمل در A برابرند با W و

$\frac{3}{2}W$ ، و به سبب تقارن در B نیز نیروهایی مشابه وارد می‌شوند.

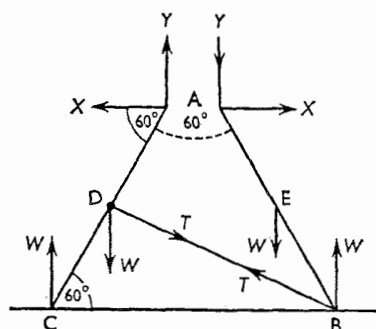
اگر نیروی فشاری EF را از ما خواسته بودند، می‌توانستیم آن را با گرفتن گشتاور برای CD نسبت به C به دست آوریم. نتیجه می‌شد

$$T \frac{l}{2} \cos 45^\circ + W \frac{l}{2} \sin 45^\circ = \frac{3}{2}W \cdot l \cos 45^\circ + W \cdot l \sin 45^\circ$$

$$\therefore \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}W = \frac{3}{2}W + W$$

$$\therefore T = 4W$$

مثال ۵: دو میله مشابه و سنگین AB و AC در A به یکدیگر به طور صیقلی مفصل شده‌اند. B به یک يك نخ به نقطه وسط AC متصل شده است. نقاط B و C از میله‌ها بر روی سطح افقی صافی قرار دارند. اگر زاویه $BAC = 60^\circ$ باشد، کشش نخ را بر حسب وزن میله‌ها تعیین کنید.



شکل ۱۲-۲۳

حل : فرض می‌کنیم D (شکل ۱۲-۲۳) نقطه وسط AC، و E نقطه وسط AB باشد. چون $AB = AC$ است و زاویه $BAC = 60^\circ$ است، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. پس BD عمود بر AC است.

چون میله‌ها هموزن و وزن هر یک از آنها برابر W است و راستاهای اوزان آنها از B و C به یک فاصله‌اند، در نتیجه عکس‌العمل‌های قائم در B و C هر یک برابر W خواهد بود.

(این نکته را می‌توانستیم با گرفتن گشتاور برای هردوميله نسبت به C و B نشان دهیم.)

فرض می‌کنیم T کشش نخ، و l طول هر میلیه باشد.
برای AC نسبت به A گشتاور می‌گیریم.

$$T \cdot \frac{l}{2} + W \cdot \frac{l}{4} = W \cdot \frac{l}{2}$$

$$\therefore \frac{T}{2} = \frac{W}{4} \Rightarrow T = \frac{W}{2}$$

اگر عکس‌العمل در A را لازم داشته باشیم، می‌توانیم آن را مطابق شرح زیر تعیین کنیم:

فرض می‌کنیم X و Y مؤلفه‌های افقی وقائم عمل لولای A بر AC باشد.
از تجزیه نیروهایی که بر AC وارد می‌شوند، در امتداد افقی،

$$X = T \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} W$$

از تجزیه نیروهایی که بر AC وارد می‌شوند، در امتداد قائم،

$$Y + W = W + T \sin 30^\circ$$

$$\therefore Y = \frac{1}{2} T = \frac{1}{4} W$$

برایند عکس‌العمل R در A چنین به دست می‌آید:

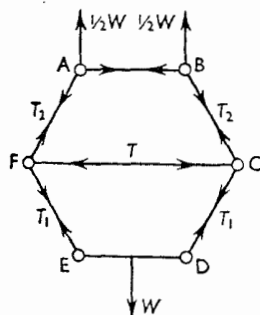
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = W \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} W$$

این برایند با امتداد افقی زاویه‌ای می‌سازد که

$$\text{Arctg} \frac{Y}{X} = \text{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ است یعنی } 30^\circ \text{ است.}$$

مثال ۶: شش میلیه مشابه بیوزن از انتهای خود به یکدیگر مفصل شده‌اند و تشکیل يك شش ضلعی منتظم ABCDEF را داده‌اند. میلیه AB به‌طور افقی نگاهداری شده است، و از نقطه وسط DE وزنه‌ای به وزن W آویزان است. برای آنکه شکل شش ضلعی به هم نخورد، آن را بامیلیه سبك CF به وضع خود نگاه می‌دارند. نیروی فشاری CF را تعیین کنید.

حل : فرض می‌کنیم ABCDEF (شکل ۱۲-۲۴) نشان‌دهنده داربست مورد نظر باشد.



شکل ۱۲-۲۴

چون میله‌ها سبک هستند و (جز ED) فقط تحت تأثیر نیروهای هستند که بر انتهای آنها وارد می‌شوند. نیروهای فشاری بر همه میله، جز ED، می‌بایستی در امتداد طول میله‌ها باشند.

فرض می‌کنیم کشش CD و EF برابر T_1 و کشش BC و FA برابر T_2 باشد. میله ED، تحت تأثیر وزن W و نیروهای T_1 که بر E در امتداد EF وارد می‌شود و T_2 که بر D در امتداد DC وارد می‌شود، به حال تعادل است. مؤلفه‌های قائم کششهای T_1 می‌بایستی وزن W را تحمل کنند، و بنابراین،

$$2T_1 \cos 30^\circ = W$$

$$\therefore T_1 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

بدیهی است نیروی فشاری قائم در A و در B برابر $\frac{W}{\sqrt{3}}$ است. پس با تجزیه در امتداد قائم برای لولای B داریم،

$$T_2 \cos 30^\circ = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore T_2 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

اگر نیروی فشاری CF برابر T باشد، با تجزیه در امتدادهای افقی و قائم برای لولای C خواهیم داشت،

$$T_1 \sin 60^\circ = T_2 \sin 60^\circ$$

$$T_1 = T_2 \quad \text{یا}$$

$$T = T_1 \cos 60^\circ + T_2 \cos 60^\circ \quad \text{و}$$

$$= \frac{W}{2\sqrt{3}} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

$$T = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

تمرین ۳.۱۲

- ۱ - سه میله یکنواخت متشابه هریک به وزن W به طور صیقلی به یکدیگر مفصل شده اند. به طوری که تشکیل يك مثلث متساوی الاضلاع را داده اند. اگر مثلث از نقطه وسط یکی از اضلاعش آویزان باشد، نیروهایی را که بر مفصلها وارد می شوند تعیین کنید.
- ۲ - مربع ABCD از چهار میله یکنواخت متشابه تشکیل شده است، که آزادانه به یکدیگر مفصل شده اند، و دستگاه از C پایینترین مفصل آویزان است. به کمک میله سبکی که C را به A متصل می کند، شکل دستگاه را ثابت نگاه می دارند. نیروی فشاری بر این میله و بزرگی و جهت عمل هریک از مفصلهای B یا D را تعیین کنید.
- ۳ - لوزی ABCD از چهار میله یکنواخت متشابه که آزادانه به یکدیگر مفصل شده اند تشکیل شده است. دستگاه از مفصل A آویزان است و برای آنکه شکل آن ثابت بماند و زاویه CAD برابر 30° باشد، A و C را به کمک نخ به یکدیگر متصل می کنند. کشش نخ و بزرگی و جهت عکس العمل را در B یا D تعیین کنید.
- ۴ - AB و BC دو میله یکنواخت و کاملاً متشابه هستند که وزن هریک برابر W است و در B آزادانه به یکدیگر مفصل شده اند. در این میله ها حلقه های کوچکی که وزن آنها قابل صرف نظر کردن است وجود دارد که موجب می شود انتهای A و C بدون اصطکاک بر روی يك سیم افقی ثابت حرکت کنند. میله ها طوری قرار دارند که تشکیل زاویه قائمه می دهند و B در زیر سیم است. برای آنکه مفصل B بالا نرود، میله صلبی که وزن آن ناچیز است نقاط وسط میله ها را به هم متصل کرده است. کششی که در این میله وجود دارد و عکس العملهای در A، B و C را تعیین کنید.
- ۵ - AB و BC دو میله هم طول هستند که آزادانه در B به یکدیگر مفصل شده اند. وزن AB برابر W و وزن BC برابر $2W$ است. این دو میله که بر یکدیگر عمودند در يك صفحه قائم قرار دارند و انتهای A و انتهای C میله ها در يك صفحه افقی هستند. چه نیروهای افقی باید بر A و C اعمال شود تا تعادل برقرار بماند؟

۶ - دو میله AB و BC به طولهای a مترو b متر از یک جنس و با یک سطح مقطع هستند و در B به طور آزاد به یکدیگر مفصل شده اند و از دو انتهای A و C که به دو نقطه همتر از متصل شده اند آویزان هستند. فاصله این دو نقطه چنان است که ABC قائمه است. اگر جرم هر متر از میله M کیلو گرم باشد، عکس العملهایی را که بر مفصل B و نقاط اتصال A و C وارد می شوند تعیین کنید.

۷ - نردبانهای یکنواختی که طول هر یک برابر a و وزن هر یک برابر W است، از انتهای بالایی به یکدیگر لولا شده اند. این نردبانها بر روی سطح افقی صافی قرار دارند. از یکی از پله های یکی از نردبانها وزنه ای برابر W آویزان است. فاصله این پله از پایین نردبان برابر b است. از لغزش این نردبانها به کمک نخ به طول $2c$ که انتهای پایینی آنها را به یکدیگر متصل کرده است، جلوگیری می کنند. نیروی فشار هر نردبان را بر زمین، و کشش نخ را تعیین کنید.

۸ - دو میله یکنواخت AB و BC که همجنس و با یک ضخامت ولی با طولهای متفاوتند به طور آزاد در B به یکدیگر مفصل شده اند. انتهای A و C در یک خط قائم ثابتند. نشان دهید که نیروی فشار در مفصل B که در امتداد BD وارد می شود، نیمساز زاویه ABC است و بزرگی آن برابر است با

$$\frac{1}{2} W \frac{BD}{AC}$$

که در آن W وزن دو میله است.

۹ - نردبانی به وزن $2W$ از دو قسمت تشکیل شده است که در بالا به یکدیگر مفصل شده اند. با یک ریسمان نقاط وسط دو نردبان را به یکدیگر متصل کرده اند به طوری

که وقتی که نخ محکم است، زاویه میان دو نردبان برابر $\frac{6}{13} \text{Arctg}$ است.

شخصی به وزن $5W$ از یک قسمت نردبان بالا می رود و پس از آنکه دوسوم طول آن را پیمود متوقف می شود. با صرف نظر کردن از اصطکاک میان نردبان و زمین، کشش ریسمان و عکس العمل را در لولا تعیین کنید.

۱۰ - دو تخته یکنواخت بردو دیوار متوازی و صیقلی تکیه کرده اند. انتهای پایینی این دو تخته بر روی کف صیقلی افقی با یکدیگر تماس دارند. ثابت کنید که اگر اوزان تخته ها w و w' و انحراف آنها نسبت به قائم برابر θ و θ' باشند، شرط تعادل عبارت است از

$$wtg\theta = w'tg\theta'$$

۱۱- دو صفحه سنگین با سطوح مستطیل شکل، که طول یکسان و عرض متفاوت دارند، در امتداد اضلاع متساوی خود با یکدیگر لولا شده‌اند و بر صفحه صیقلی افقی طوری قرار دارند که لولای آنها افقی و بالاترین قسمت باشد. با نخی که نقاط وسط کناره‌های پایینی را به یکدیگر متصل کرده است از لغزش این صفحه‌ها جلوگیری می‌کنند. اگر وزن این صفحه‌ها به ترتیب W_1 و W_2 و زاویه آنها نسبت به افق θ و φ باشد، ثابت کنید که عمل میان آنها در لولا با افق زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر است با

$$\frac{W_1 \tan \varphi - W_2 \tan \theta}{W_1 + W_2}$$

۱۲- AB، BC، CD، DE و EA پنج میله یکنواخت متساوی هستند که وزن هر يك برابر W است و انتهای آنها آزادانه به یکدیگر لولا شده‌اند. این داربست که به شکل يك پنج ضلعی منتظم است از مفصل A آویزان شده است و برای آنکه شکل آن بهم نخورد، نخ‌های سبکی A را به C و D متصل کرده است. عکس‌العمل‌های در B و E را تعیین کنید و نشان دهید که کشش در نرخ برابر است با $2W \cos 18^\circ$.

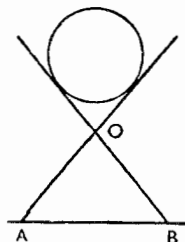
۱۳- سه میله متساوی AB، BC و CD و میله AD که طول آن دو برابر طول هر يك از میله‌های AB، ... است در نقطه‌های A، B، C و D به‌طور آزاد به یکدیگر لولا شده‌اند و این داربست از نقطه وسط BC آویزان شده است. اگر وزن هر يك از میله‌های متساوی برابر w و وزن میله بلندتر برابر $2w$ باشد، بزرگی‌های نیروهای راکه بر لولاها وارد می‌شوند تعیین کنید. نشان دهید که راستاهای نیروهای راکه بر A و B وارد می‌شوند در نقطه‌ای به فاصله $\frac{BC}{\sqrt{3}}$ در زیر BC با یکدیگر برخورد می‌کنند.

۱۴- داربستی از سه میله یکنواخت BC، CA و AB به طول‌های $\frac{1}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ متر تشکیل شده است. وزن هر متر از این میله‌ها 1 kg است. این سه میله با میخ‌های کوچک بیوزنی که به انتهای آنها متصل شده است به‌طور صیقلی به یکدیگر لولا شده‌اند. این داربست از نقطه‌ای مانند D که بر ضلع AB واقع است طوری آویزان شده است که AB افقی است و دستگاه به حال تعادل است. فاصله D را از نقطه وسط AB و نیروهای فشاری راکه بر لولاها وارد می‌شود تعیین کنید.

۱۵- AC و BC دو میله سبک هستند که به‌طور آزاد در C به یکدیگر مفصل شده‌اند، و A و B آزادانه به يك دیوار لولا شده‌اند، به‌طوری که AC افقی و زاویه

ACB برابر α است، و نقطه B در زیر قائم A است. وزنه‌ای به وزن W از C آویزان است. کشش AC و نیروی فشاری BC را تعیین کنید. ثابت کنید که اگر از نقطه وسط BC نیز وزنه‌ای به وزن W' آویزان شود، کشش AC برابر $\frac{1}{4}(W' + 2W)\cot\alpha$ خواهد شد.

۱۶- قرصی به شعاع a و وزن W مطابق شکل ۱۲-۲۵ میان دو میله‌ای قرار دارد که در O به طور آزاد به یکدیگر اسولا شده‌اند و انتهای A و B دوميله بر میزی افقی قرار دارند، و به کمک نخ AB به حال تعادل نگاه داشته شده‌اند؛ $OA = OB = c$ ، $\angle AOB = 2\alpha$ ؛ تمام شکل در صفحه‌ای قائم است. کشش نخ را تعیین کنید.



شکل ۱۲-۲۵

۱۷- AC و BA میله‌های سنگین یکنواختی هستند که جرم آنها به ترتیب ۶ kg و ۳ kg است، و به طور صیقلی در A به یکدیگر و به میله سبک دیگر BC لولاشده‌اند. لولاهای B و C به کمک نخ‌های قائمی نگاهداری می‌شوند، به طوری که BC افقی است و A در زیر BC است. طول عمودی که از A بر BC فرود می‌آید برابر ۰/۹ m است و پای عمود، طول BC را چنان تقسیم می‌کند که BC برابر ۰/۶ m و DC برابر ۱/۲ m است. ثابت کنید که عکس العمل در A افقی است؛ عکس العمل و نیز نیروی فشاری را که بر BC وارد می‌شود تعیین کنید.

۱۸- دوميله یکنواخت AB و BC از هر جهت به یکدیگر شبیه هستند و وزن هر یک برابر W است. این دوميله در B محکم به یکدیگر متصل شده‌اند، به طوری که ABC قائمه است. انتهای A آزادانه به نقطه ثابتی لولاشده است، به طوری که دو میله، در حال تعادل، آویزان هستند. اگر میله‌ها به طور آزاد در B لولاشوند، اما A و C به کمک نخ سبک انعطاف ناپذیری به یکدیگر مربوط شده باشند، که طول آن نخ به اندازه‌ای است که ABC قائم باشد، نشان دهید که کشش نخ برابر $\frac{3W}{2\sqrt{5}}$ است.

۱۹- AB و BC دو میله یکنواخت هستند که وزن آنها به ترتیب W و W' است. این دو میله به طور آزاد در B به یکدیگر لولا شده‌اند. انتهای A به نقطه ثابت A لولا شده است، و حال آنکه C می‌تواند بر روی یک سیم افقی حرکت کند. این سیم به وسیله حلقه‌ای صیقلی و کوچک که وزن آن ناچیز است از A می‌گذرد. نشان دهید که نیروی افقی که می‌بایستی بر C اعمال شود تا میله‌ها در وضعی قرار گیرند که زاویه‌های CAB و ACB به ترتیب θ و φ باشند و B در زیر A واقع شود، برابر است با

$$\frac{1}{4}(W+W')\cos\varphi\cos\theta \times \frac{1}{\sin(\theta+\varphi)}$$

۲۰- میله افقی ABC که وزن آن ناچیز است به طور افقی است و به لولای صیقلی A متصل شده است. وزنه‌ای برابر 100 kg از C آویزان است. این میله از نقطه وسط خود یعنی B به کمک میله محکم BD که وزن آن ناچیز است نگاه‌داشته شده است. انتهای D از میله BD به نقطه D، که در زیر قائم A است، به طور صیقلی لولا شده است به طوری که $AD = AB$. مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهای فشاری را که بر D و B وارد می‌شوند تعیین کنید.

۲۱- دو میله یکنواخت AB و BC به طولهای مساوی ولی با وزنه‌های متفاوت به طور آزاد در B به یکدیگر لولا شده‌اند. این دو میله در A و C به دو نقطه ثابت، که بريك راستای افقی قرار دارند و فاصله آنها طوری است که ABC قائمه است، لولا شده‌اند. نشان دهید که جهت عکس‌العمل B با امتداد میله BA زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر نسبت وزن AB به وزن BC است.

۲۲- دو میله یکنواخت AB و AC با وزنه‌های W_1 و W_2 و طولهای مساوی به طور صیقلی در A به یکدیگر لولا شده‌اند. B و C بر صفحه‌ای افقی واقعند و به کمک نخ انعطاف‌ناپذیری که B را به C وصل کرده است، این دو میله به حال تعادلند. وزنه‌ای به وزن w از نقطه‌ای واقع بر AC که به فاصله $\frac{3}{4}AC$ از A است آویزان می‌کنیم. ثابت کنید که کشش نخ برابر است با

$$\frac{1}{4}(W_1+W_2+\frac{1}{4}w)tg\frac{1}{4}A$$

۲۳- نردبانی از دو قسمت تشکیل شده است که طول هر قسمت برابر $1/85 \text{ m}$ است. این دو قسمت به وسیله طنابی به طول 70 cm ، که به نقاطی از آنها که به فاصله 40 cm از انتهای آزاد آنهاست، به یکدیگر متصل شده‌اند. جرم قسمتی از نردبان که دارای پله است 8 kg و جرم قسمت دیگر 2 kg است. شخصی به جرم 77 kg

بر روی پله‌ای ایستاده است که از بالای نردبان 45 cm فاصله دارد. فرض می‌شود که طناب به طور کامل کشیده شده است، و عکس‌العمل‌های میان نردبان و زمین قائم هستند. کشش طناب را تعیین کنید.

۲۴- دوميله AB و BC به طور صیقلی در B به یکدیگر لولا شده‌اند و C به نقطه‌ای از دیوار به طور صیقلی لولا شده است. طول ميله AB برابر $1/5 \text{ m}$ و جرم آن 10 kg است. طول ميله BC برابر $1/2 \text{ m}$ و جرم آن 5 kg است. دو ميله به کمک تیری که در زیر AB قرار داده‌اند به وضع افقی نگاه داشته شده‌اند. وضع تیر و عکس‌العمل C را تعیین کنید.

۲۵- دوميله AB و AC که طول هریک برابر $1/2 \text{ m}$ و جرم هریک برابر $1/5 \text{ kg}$ است به طور صیقلی در A به یکدیگر لولا شده‌اند. این دو ميله به طور متقارن بر روی کره صیقلی ثابتی به شعاع $5/3 \text{ m}$ قرار دارند، به طوری که بر خط قائم مکان مرکز کره و در بالای مرکز کره است. نشان دهید که زاویه میان دوميله، هنگامی که در حال تعادلند، قائمه است. بزرگی و عکس‌العمل را در مفصل تعیین کنید.

۲۶- ميله $2a$ یکنواختی به طول $2a$ و جرم m از انتهای پایینتر به نقطه ثابت O لولا شده است. یک انتهای نخ سبکی به نقطه ثابتی که در بالای خط قائم O و به فاصله $2a$ از O است متصل شده است. این نخ از روی شیار صیقلی انتهای بالایی و آزاد ميله می‌گذرد. در انتهای دیگر نخ وزنه‌ای به جرم M آویزان است. زاویه شیب قسمت بالایی نخ را با خط قائم در وضع تعادل تعیین کنید.

۲۷- استوانه مدوری در حال تعادل است. محور این استوانه افقی است. این استوانه در امتداد طول خود بر یک سطح شیبدار که زاویه آن با افق برابر α است تکیه کرده است. به کمک ميله AB ، که وزن آن برابر وزن استوانه است و در A به صفحه W زیر استوانه لولا شده است و در B بر استوانه مماس است، تعادل استوانه را برقرار می‌سازند. صفحه قائمی که از ميله می‌گذرد، سطح شیبدار را در خط بزرگترین شیب آن قطع می‌کند و از مرکز ثقل استوانه می‌گذرد. اگر همه سطوح صیقلی باشند و زاویه میان ميله و صفحه شیبدار برابر θ باشد، ثابت کنید که

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\theta}{5 - \cos 2\theta}$$

۲۸- دوميله AB و CD که وزن هریک برابر W و طول هریک برابر a است به طور صیقلی در O به یکدیگر لولا شده‌اند، به طوری که $OB = OD = b$. ميله‌ها در صفحه‌ای قائم قرار دارند و A و C بر روی یک میز صیقلی هستند، و انتهای

B و D به كمك نسخ سبکی به يكديگر متصل هستند. ثابت كنيد كه عكس العمل در مفصل برابر است با $\frac{aW}{2b} \tan \alpha$ كه در آن α زاویه شیب هريك از ميله ها با خط قائم است.

۱۴.۱۲. برآيند نیروهای واقع در يك صفحه

در بخش ۱۰ نشان داديم كه چگونه می توان برآيندچند نیرو را كه بريك نقطه وارد می شوند تعيين كرد. اکنون مسئله را در حالت كليتر، كه در آن نیروها بريك جسم صلب وارد می شوند، مورد توجه قرار می دهيم. بيشتر اوقات لازم است كه برآيند چند نیرو را كه بزرگی و راستای آنها معلوم است تعيين كنيم.

غالباً گفته نمی شود كه نیروها بر چه چیزی وارد می شوند، زیرا همان طور كه قبلاً اشاره كرديم، به شرط آنكه جسم را صلب فرض كنيم، برآيند نیروها مستقل از شكل و ابعاد جسم است.

برطبق قاعده، بهترين راه برای تعيين بزرگی برآيند، تجزيه نیروها در دو جهت متعامد و افزودن مؤلفه های هريك از اين جهتها به يكديگر است و سپس تركيب دوميؤلفه حاصل و تبديل آن به يك نیروی منفرد است.

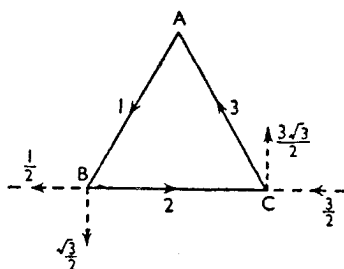
نسبت اين دوميؤلفه جهت برآيند را نشان می دهد. يعنی تانژانت زاويه ای است كه برآيند با يکی از دو جهتی می سازد كه نیروها در آن جهتها تجزيه شده اند.

برای تعيين وضع راستا، می توانيم يك نقطه از آن را پيدا كنيم يا اينكه در بعضی از حالاتها، ساده تر آن است كه نقاط تلاقی برآيند را با دو خط معلوم تعيين كنيم. روش اخير غالباً با تعيين گشته اورها بهتر به نتيجه مطلوب می رسد. هيچ روش کلی نبايد تنظيم كرد. كوتاه ترين روش برای به دست آوردن نتيجه های لازم، در حالاتهای مختلف به طور قابل توجهی متفاوت است.

در مثالهای زیر روشهای متفاوت به كار برده شده است.

مثال ۱: بزرگی، جهت و راستای برآيند سه نیرو را كه بزرگی آنها ۱، ۲ و ۳ واحد هستند و به ترتيب در امتداد اضلاع يك مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $2a$ وارد می شوند، تعيين كنيد.

حل: فرض می كنيم نیروهای ۱، ۲ و ۳ در امتداد اضلاع AB، BC و CA از مثلث



شکل ۱۲-۲۶

متساوی الاضلاع ABC ، مطابق شکل وارد شوند:

نیروها را در امتداد BC و در امتداد عمود بر BC تجزیه می‌کنیم.

مؤلفه نیروی ۱ که بر B وارد می‌شود و در جهت CB است برابر $\frac{1}{4}$ است، و مؤلفه همین نیرو که در امتداد عمود بر BC بر B به طرف پایین وارد می‌شود

برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

مؤلفه نیروی ۳ که بر C وارد می‌شود، در جهت CB برابر است با $\frac{3}{4}$ ، و

مؤلفه همین نیرو که در امتداد عمود بر BC بر C به طرف بالا وارد می‌شود برابر است با $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

مؤلفه‌هایی که در امتداد BC وارد می‌شوند با نیروی ۲ متعادل هستند و

تنها نیروهایی که باقی می‌مانند و متوازی و ناهمسو هستند نیروهای $\frac{\sqrt{3}}{2}$ در B و $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ در C هستند.

برای این نیروها برابر $\sqrt{3}$ است که به طرف بالا و عمود بر BC وارد

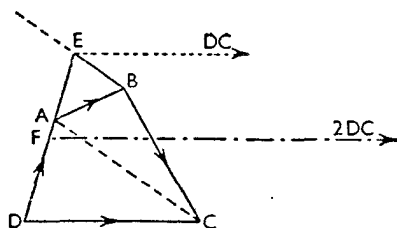
می‌شود، و نقطه اثر آن نقطه‌ای است مانند D که بر امتداد BC واقع است و برای آن این رابطه برقرار است:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}CD = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$$

$$3CD = BD \quad \text{یا}$$

$$CD = \frac{1}{2}BC = a \quad \text{یا}$$

مثال ۲: ABCD چهارضلعی معینی است. در امتداد اضلاع AB، BC، DC (ترتیب دورانی به هم خورده است)، و DA نیروهایی وارد می شوند که بزرگی هریک متناسب با ضلع هم راستای آن است. بزرگی و راستای برآیند را تعیین کنید.



شکل ۱۲-۲۷

حل: برآیند نیروهای AB، BC (شکل ۱۲-۲۷) برابر و موازی با AC است و بر نقطه B وارد می شود.

برآیند این نیرو و نیروی DA برابر و موازی با DC است و بر E وارد می شود که محل تلاقی امتداد DA و خطی است که از B به موازات CA رسم می شود.

اکنون دو نیروی موازی داریم که هریک برابر با DC است و یکی از آنها در امتداد DC وارد می شود و دیگری در امتدادی موازی با DC بر نقطه E وارد می شود.

برآیند آنها نیرویی است برابر با ۲DC که بر F، نقطه وسط DE وارد می شود.

ممکن بود مسئله را به این طریق نیز حل کرد:

بزرگی و جهت برآیند چهار نیرو بر طبق جمع برداری آنها تعیین می شود.

$$\begin{aligned}\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DC} + \vec{DA} &= \vec{DC} + (\vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= \vec{DC} + \vec{DC} \\ &= 2\vec{DC}\end{aligned}$$

بنابراین برآیند نیرویی است برابر با ۲DC و راستای آن را می توان با

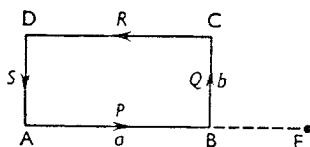
تعیین گشتاورها حول يك نقطه دلخواه، مثلاً نقطه D، تعیین کرد.

فرض می‌کنیم برآیند $\overrightarrow{DC}$ خط DA را در F قطع کند. گشتاور آن نسبت به D در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و برابر است با $4\Delta FDC$. اما گشتاور چهار نیروی مذکور نسبت به D نیز در جهت حرکت عقربه‌های ساعت هستند و برابرند با $2\Delta ABD + 2\Delta BCD$.

$$\begin{aligned}\therefore 4\Delta FDC &= 2(\Delta ABD + \Delta BCD) \\ &= 2(\text{مساحت چهارضلعی ABCD}) \\ &= 2\Delta EDC \quad \text{چون BE موازی CA است} \\ \therefore 4FD &= ED\end{aligned}$$

یعنی F نقطه وسط DE است.

مثال ۳: چهار نیروی P, Q, R, S در امتداد اضلاع مستطیل ABCD به ترتیب در جهت‌های AB، BC، CD و DA وارد می‌شوند. اگر $AB = a$ و $AD = b$ باشد، بزرگی برآیند مجموعه نیروها و فاصله A را از نقطه‌ای که برآیند اضلاع AB و AD را قطع می‌کند تعیین کنید.



شکل ۱۲-۲۸

حل: مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و در آن نیروها را مطابق شکل ۱۲-۲۸ نمایش می‌دهیم. نیروهای P و R معادل نیروی $P - R$ هستند که موازی AB است. البته فرض آن است که P مساوی R نیست. به همین طریق، اگر Q مساوی S نباشد، نیروهای Q و S معادل با نیرویی برابر $Q - S$ هستند که موازی BC است.

بنابراین بزرگی برآیند برابر است با

$$\sqrt{(P-R)^2 + (Q-S)^2}$$

اگر برآیند راستای AB را در نقطه‌ای مانند E به فاصله x از A قطع

کند، در این صورت، چون E بر راستای برابند قرار دارد، مجموع گشتاورهای نیروها نسبت به آن برابر صفر است،

$$\therefore Q(x-a) = Rb + Sx$$

$$\therefore x(Q-S) = Rb + Qa$$

$$\therefore x = \frac{Rb + Qa}{Q - S}$$

به همین طریق اگر برابند راستای DA را در نقطه F به فاصله y از A قطع کند، با گرفتن گشتاور نسبت به F، خواهیم داشت:

$$Py = Qa + R(b+y)$$

$$\therefore y(P-R) = Qa + Rb$$

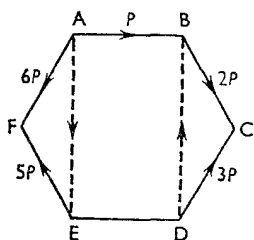
$$\therefore y = \frac{Qa + Rb}{P - R}$$

یادداشت: اگر P بزرگتر از R باشد (همان طور که در بالا فرض شد)، F در زیر A خواهد بود. اگر R بزرگتر از P باشد، مقدار بالا برای y منفی و F در بالای A خواهد بود.

اگر S بزرگتر از Q باشد، E به جای آنکه، مطابق شکل ۱۲-۲۸، در سمت راست A باشد در سمت چپ A خواهد بود.

اگر $R = P$ و $S = Q$ باشد، دستگاه به یک زوج تبدیل می شود که گشتاور آن برابر است با $Pb + Qa$.

مثال ۴: ABCDEF يك شش ضلعي منتظم است. نیروهای P ، $2P$ ، $3P$ ، $4P$ و $5P$ به ترتیب در امتدادهای AB، BC، DC، EF و AF وارد می شوند. نشان دهید که می توان نیرویی تعیین کرد که در امتداد ED وارد شود به طوری که شش نیرو معادل با یک زوج باشند و گشتاور زوج را تعیین کنید.



شکل ۱۲-۲۹

حل: شش ضلعی را رسم می‌کنیم و نیروها را مطابق شکل ۱۲-۲۹ در آن نمایش می‌دهیم.

دوش (الف) به فرض اینکه نیروهای معلوم دارای برابندی به موازات DE باشند با نیرویی که در امتداد ED وارد می‌شود تشکیل یک زوج خواهند داد.

اما مجموع مؤلفه‌های نیروها عمود بر ED برابر است با

$$5P \cos 30^\circ - 6P \cos 30^\circ - 2P \cos 30^\circ + 3P \cos 30^\circ = 0$$

نیز مجموع مؤلفه‌های نیروها در امتداد موازی با ED برابر است با

$$-5P \sin 30^\circ - 6P \sin 30^\circ + 2P \sin 30^\circ + 3P \sin 30^\circ = -2P$$

پس برابند پنج نیرو، نیرویی است به بزرگی $2P$ به موازات DE. نقطه اثر آن را می‌توان با تعیین گشتاورها نسبت به نقطه‌ای معین تعیین کرد.

فرض می‌کنیم که این برابند در فاصله x در بالای مرکز شش ضلعی و عمود بر ضلع شش ضلعی است و طول هریک از اضلاع برابر a است. نسبت به مرکز، گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$2P \cdot x = (-5P + 6P - P - 2P + 3P)a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = a \frac{\sqrt{3}}{4}$$

پس فاصله قائم برابند از ED برابر است با

$$a \frac{\sqrt{3}}{4} + a \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a \frac{\sqrt{3}}{4}$$

پس نیروی $2P$ که در امتداد ED وارد می‌شود، با پنج نیرو تشکیل زوجی می‌دهند که گشتاور آن $2P \frac{3a\sqrt{3}}{4}$ یا $\frac{3\sqrt{3}Pa}{2}$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

دوش (ب) نیروی $5P$ در امتداد EA معادل است با نیرویی برابر

$$5P \cos 30^\circ = 5P \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و در امتداد DE معادل است با نیروی $\frac{5P}{2}$.

نیروی $6P$ در امتداد AE معادل است با نیرویی برابر

$$6P \cos 30^\circ = 3P \sqrt{3}$$

و در امتداد BA معادل است با نیروی $3P \sin 30^\circ = 3P$.

نیروی $2P$ در امتداد BD معادل است با نیرویی برابر $2P \cos 30^\circ = P\sqrt{3}$

و در امتداد AB معادل است با نیروی $2P \sin 30^\circ = P$

نیروی $3P$ در امتداد DB برابر است با نیروی $3P \frac{\sqrt{3}}{2} = 3P \cos 30^\circ$ و در

امتداد ED برابر است با نیروی $3P \sin 30^\circ = \frac{3P}{2}$

به طور کلی، پنج نیرو در امتداد DE معادلند با نیرویی برابر

$$3P - P - P = P \quad \text{و} \quad \frac{5P}{2} - \frac{3P}{2} = P$$

و در امتداد AE معادلند با $P \frac{\sqrt{3}}{2}$ و در امتداد DB معادلند با $P \frac{\sqrt{3}}{2}$.

نیروهای P در امتداد DE و BA دارای برابری برابر $2P$ و به موازات

DE هستند که از مرکز شش ضلعی می گذرد، و نیروی $P \frac{\sqrt{3}}{2}$ در امتداد AE و DB

تشکیل زوجی می دهند که گشتاور آن $P \frac{\sqrt{3}}{2} a$ و در جهت حرکت عقربه های ساعت است.

بنابراین اگر نیروی $2P$ را در امتداد ED تولید کنیم، شش نیرو معادل با

دو زوج خواهند شد که گشتاورهای آنها به ترتیب $2P \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $Pa \frac{\sqrt{3}}{2}$ و هر دو

در جهت حرکت عقربه های ساعت هستند. پس گشتاور زوج برابند مساوی است با $\frac{3Pa\sqrt{3}}{2}$.

تمرین ۴۰۱۲

۱ - A، B، C سه نقطه واقع بر خط ABCD هستند، به طوری که $AB = BC = a$. نیروهای ۳، ۶ و ۴ نیوتون به ترتیب بر A، B و C در جهتهایی که با AD زاویه های 60° ، 120° و 270° می سازد وارد می شوند. نشان دهید که این نیروها به نیروی منفرد تبدیل می شوند و پیدا کنید که راستای این نیرو، خط AD را در کجا قطع می کند.

۲ - A، B، C و D چهار نقطه اند که به فاصله های متساوی و برابر $m/6$ از یکدیگر بر روی خط مستقیمی واقعند. بر A، B، D به ترتیب نیروهای ۲، ۳ و ۴ نیوتون عمود بر AD به طرف بالا وارد می شوند. نیرویی که بر C وارد می شود عمود بر AD

و به سوی پایین و برابر $9N$ است. نشان دهید که این دستگاه معادل با يك زوج است، و معلوم کنید که نیروی $3N$ در کجا باید وارد شود تا تعادل به وجود آید.

۳ - نیروهای 3 ، 3 و 5 نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع BA ، AC ، BC از يك مثلث متساوی الاضلاع که ارتفاع آن $1/2 m$ است وارد می شوند. فاصله A را از نقطه اثر برابند تعیین کنید.

۴ - $ABCD$ يك مربع است. E و F به ترتیب نقطه های وسط BC و CD هستند. بزرگی و جهت برابند نیروهای 2 ، 5 ، 10 ، 1 واحد را که به ترتیب به موازات جهتهای AB ، AE ، FA و AD وارد می شوند تعیین کنید.

۵ - ABC يك مثلث متساوی الاضلاع است. نیروهای 4 ، 2 ، و 1 واحد به ترتیب در امتدادهای اضلاع AB ، AC و BC در جهتهایی که با ترتیب حروف مشخص شده اند وارد می شوند. ثابت کنید که برابند آنها نیرویی است برابر $3\sqrt{3}$ واحد که در جهتی عمود بر BC وارد می شود، و نقطه تلاقی راستای این نیروی برابند را با BC تعیین کنید.

۶ - برابند نیروهای زیر را که در امتداد اضلاع مربع $ABCD$ وارد می شوند تعیین کنید: $21N$ در امتداد CD ، $15N$ در امتداد DA ، $3N$ در امتداد BA و $9N$ در امتداد CB ؛ و نشان دهید که راستای برابند، دوزلع از مربع را نصف می کند.

۷ - برابند نیروهای زیر را که در امتداد اضلاع مربع $ABCD$ وارد می شوند تعیین کنید: $11N$ در امتداد DA ، $7N$ در امتداد CB ، $19N$ در امتداد CD و $5N$ در امتداد BA ؛ و ثابت کنید که راستای برابند، ضلع AD را به دو قسمت وضع CD را به سه قسمت می کند.

۸ - AD ارتفاع مثلث ABC است که در آن $BC = 6$ ، $CA = 7$ ، $AB = 5$ است. نیرویی برابر $12N$ که در امتداد DA وارد می شود با نیروهای متوازی که بر B و C وارد می شوند تعادل پیدا کرده است. اگر همه نیروها به ترتیب حول A ، B ، C در يك جهت به يك اندازه بچرخند به طوری که همگی بر AB عمود شوند، ثابت کنید که برابند نیروها يك زوج خواهد شد. گشتاور این زوج را تعیین کنید.

۹ - $ABCD$ يك ذوزنقه است که در آن اضلاع متوازی AD و BC به نسبت 2 به 3 هستند و $AB = AD = DC$. بزرگی و وضع برابند این نیروها را تعیین کنید: $3P$ از B به طرف C ، P از B به طرف A ، $2P$ از D به طرف A ، $\frac{5}{4}P$ از D به طرف C .

۱۰ - نیروی واحدی در امتداد ضلع AB از مربع $ABCD$ وارد می شود. بزرگیها و جهتهای نیروهایی را که باید در امتداد سه ضلع دیگر وارد شوند تا دستگاه به حالت

تعدادل باشد تعیین کنید. براینده را درحالتهای زیر به دست آورید: (الف) جهت نیرو در امتداد BC معکوس می شود، (ب) جهتهای نیروهایی که در امتدادهای BC و AD وارد می شوند هردو معکوس می شوند.

۱۱- ABCD يك تخته مستطیل شکلی است که در آن $AB=DC=0.9\text{ m}$ ، $BC=AD=1/8\text{ m}$ است. نخي با نیروی ۱۵ واحد این تخته را در امتداد AD می کشد. نخ دیگری این تخته را در امتداد BC با نیرویی برابر ۲۵ واحد می کشد، و بالاخره نخ دیگری این تخته را در امتداد CD با نیروی ۱۶ واحد می کشد. تعیین کنید در امتداد AB چه نیرویی باید وارد کرد تا براینده از G، نقطه وسط مستطیل ABCD، بگذرد، و براینده را به طور کامل حساب کنید.

۱۲- ABCD مربعی است به ضلع a که بر روی تیغه ای رسم شده است. E و F نقطه هایی هستند که بر امتدادهای BA و BC که به ترتیب از A و C رسم می شوند قرار دارند، به طوری که $BE=3a$ ، $BF=3a$. مجموعه نیروهایی که بر تیغه وارد می شوند، از نیروهای زیر تشکیل شده اند: P در امتداد AB، ۲P در امتداد BC، ۳P در امتداد CD، ۴P در امتداد DA و $2\sqrt{2}P$ در امتداد EF. ثابت کنید که براینده این مجموعه، زوجی است با گشتاور Pa .

۱۳- نیروهای ۱، ۲، ۳، و ۴ نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع AB، BC، CD و DA از مربعی به ضلع ۱ متر وارد می شوند. فاصله مرکز مربع را از راستای براینده تعیین کنید. چه نیروی اضافی باید در امتداد قطر BD وارد کنیم تا تمام مجموعه دارای براینده باشد که از نقطه A می گذرد.

۱۴- مستطیل ABCD می تواند آزادانه در يك صفحه افقی حول مرکز خود، که ثابت است، بچرخد. نیروهای ۱، ۲، ۳ نیوتون به ترتیب در امتدادهای AB، BC و DC وارد می شوند. اگر $AB=0.3\text{ m}$ ، $BC=0.6\text{ m}$ باشد، تعیین کنید چه نیرویی باید در امتداد AD وارد کرد تا مستطیل ساکن بماند.

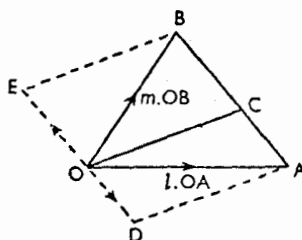
۱۵- تیغه مربع شکل ABCD بر يك میز صیقلی افقی قرار دارد و می تواند حول میخ صیقلی ثابتی بچرخد. این میخ بر قطر BC به نقطه ای ثابت شده است که این قطر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است و میخ به نقطه B نزدیکتر است تا به نقطه C. براین تیغه نیرویی برابر ۵ واحد در امتداد AD و نیرویی برابر ۳ واحد در امتداد CB وارد می شود. نیرویی را تعیین کنید که اگر بر A در جهت AB وارد شود، تیغه به حالت تعادل درمی آید. نیز نیروی فشاری را که بر میخ از طرف براینده نیروها وارد می شود تعیین کنید.

۱۶- نیروهای $3P$ ، $2P$ ، P ، $2P$ به ترتیب در امتداد اضلاع AB ، CB ، CD ، AD از مربع $ABCD$ و در جهتهایی که ترتیب حروف مطابق گفته بالا رعایت می شود وارد شده اند. بزرگی و راستای برآیند را تعیین کنید.

۱۵۰۱۲. برآیند دو نیرو که بر نقطه O در جهتهای OA و OB وارد می شوند و از نظر بزرگی با $l.OA$ و $m.OB$ مشخص می شوند، نیرویی است که از نظر بزرگی و جهت با نیروی $(l+m)OC$ مشخص می شود که C نقطه ای است واقع بر AB به طوری که $l.CA = m.CB$.

زیرا فرض می کنیم C (شکل ۱۲-۳۰)، AB را طوری تقسیم کند که $l.CA = m.CB$ باشد.

متوازی الاضلاعهای $OCAD$ و $OCBE$ را تکمیل می کنیم.



شکل ۱۲-۳۰

نیروی $l.OA$ برابر است با نیروهایی که با $l.OC$ و $l.OD$ نشان داده می شوند. نیروی $m.OB$ برابر است با نیروهایی که با $m.OC$ و $m.OE$ نشان داده می شوند.

پس نیروهای $l.OA$ و $m.OB$ معادل با نیرویی برابر $(l+m)OC$ و نیروهای $l.OD$ و $m.OE$ است.

اما $OD = CA$ و $OE = CB$ و $l.CA = m.CB$

پس دو نیروی اخیر، برابر و در سوی مخالف یکدیگرند و بنابراین با یکدیگر تعادل می کنند.

پس برآیند $l.OA$ و $m.OB$ با نیروی $(l+m)OC$ مشخص می شود.

برآیند دو نیرو با به کار بردن مفاهیم برداری برابر است با بردار مجموع آنها.

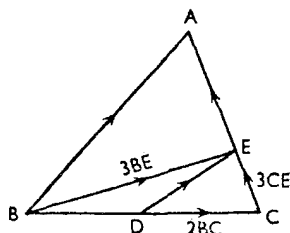
می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 l \cdot \overrightarrow{OA} + m \cdot \overrightarrow{OB} &= l(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}) + m(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}) \\
 &= (l+m)\overrightarrow{OC} + l \cdot \overrightarrow{CA} + m \cdot \overrightarrow{CB} \\
 &= (l+m)\overrightarrow{OC}, \text{ باشد } l \cdot \overrightarrow{CA} = m \cdot \overrightarrow{CB}
 \end{aligned}$$

و به شرط آنکه $l = m = 1$ باشد، خواهیم داشت $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$ که در آن $CA = CB$ است، یعنی برایند نیروهای OA و OB نیروی $2OC$ است که C نقطه وسط AB است. این را می‌توانستیم از این واقعیت، که در این حالت OC نصف قطر متوازی الاضلاع است که با OA و OB ساخته می‌شود، نیز تصدیق کنیم. در آن متوازی الاضلاع OA و OB اضلاع مجاور یکدیگرند.

مثال ۱: نیروهایی که با $2BC$ ، BA نشان داده می‌شوند در امتداد اضلاع مثلث ABC وارد می‌شوند. نشان دهید که برایند آنها $3DE$ است که در آن D وسط

BC و E نقطه‌ای است بر CA به طوری که $CE = \frac{1}{3}CA$.



شکل ۱۲-۳۱

حل: در شکل ۱۲-۳۱ برایند نیروهای $2BC$ و BA نیروی $3BE$ است، که در آن

E نقطه‌ای است واقع بر AC به طوری که $2CE = EA$ یعنی $CE = \frac{1}{3}CA$.

نیز $CA = 3CE$ ، و برایند نیروهای $3BE$ در امتداد BE و $3CE$ در امتداد CA نیرویی است برابر $3DE$ در امتداد DE ، که D نقطه وسط BC است. ممکن بود به طریق زیر نیز مسئله را حل کنیم:

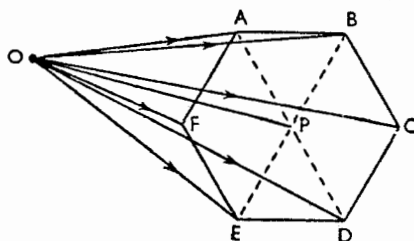
مجموع برداری سه نیرو برابر است با

$$2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BE} \quad \text{اگر } 2CE = EA \text{ باشد،} \\
 &= 3\overrightarrow{CE} + 3\overrightarrow{BE} \\
 &= 6\overrightarrow{DE} \quad \text{اگر } BD = DC \text{ باشد،}
 \end{aligned}$$

چون مجموع گشتاورهای سه نیروی مذکور نسبت به D برابر صفر است،
برایند آنها می بایستی از D بگذرد و بنابراین از نظر بزرگی، جهت و راستا با
نیروی $6\overrightarrow{DE}$ مشخص می شود.

مثال ۲: ABCDEF یک شش ضلعی منتظم است و O نقطه ای دلخواه است. ثابت کنید
که برایند نیروهایی که با OA, OB, OC, OD, OE, OF مشخص می شوند،
نیروی است برابر $6OP$ ، که در آن P مرکز دایره محیطی شش ضلعی است.



شکل ۱۲-۳۲

حل: در شکل ۱۲-۳۲، P نقطه وسط AD، BE و CF است. فرض می کنیم O
نقطه ای دلخواه باشد. آن را به P وصل می کنیم.

برایند نیروهایی که با OA و OD مشخص می شوند نیروی $2OP$ است.

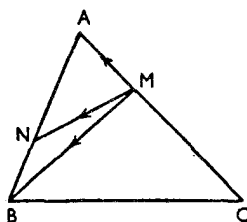
برایند نیروهایی که با OB و OE مشخص می شوند نیروی $2OP$ است.

برایند نیروهایی که با OC و OF مشخص می شوند نیروی $2OP$ است.

بنابراین برایند نیروهایی که با OA، OB، OC، OD، OE و OF

مشخص می شوند با $6OP$ مشخص می شود.

مثال ۳: M نقطه ای است که ضلع AC از مثلث ABC را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می کند،
به طوری که به نقطه A نزدیکتر باشد. N نقطه ای است که ضلع AD را به نسبت
۱ و ۲ تقسیم می کند، به طوری که به نقطه B نزدیکتر باشد. نیرویی را که از نظر
بزرگی و جهت با MN مشخص می شود به سه نیرو تجزیه کنید که هریک در امتداد



شکل ۱۲-۳۳

یکی از اضلاع مثلث وارد می شود.

حل: MB را وصل می کنیم (شکل ۱۲-۳۳).

چون N ضلع AB را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می کند، نیروی MN معادل است با نیروهای $\frac{2}{3}MB$ و $\frac{1}{3}MA$ که بر نقطه M وارد می شوند.

نیروی اخیر در امتداد CA و برابر $\frac{1}{9}CA$ است.

چون M ضلع AC را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می کند، نیروی MB برابر است با نیروهای $\frac{2}{3}AB$ و $\frac{1}{3}CB$ که بر B وارد می شوند.

پس نیروی $\frac{2}{3}MB$ برابر است با نیروهای $\frac{4}{9}AB$ و $\frac{2}{9}CB$ که بر B وارد می شوند.

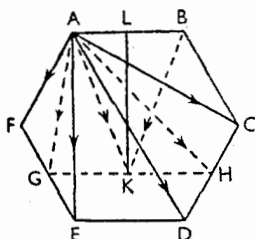
بنابراین نیروی MN معادل است با نیروهای

$$\frac{1}{9}CA, \quad \frac{2}{9}CB, \quad \frac{4}{9}AB$$

که در امتداد اضلاع مربوطه وارد می شوند.

مثال ۴: ABCDEF تیغه ای است مسطح به شکل يك شش ضلعی منتظم. از A و B نیروهایی به طرف چهار رأس دیگر وارد می شوند که از نظر بزرگی متناسب با فاصله آنها از رئوس است. ثابت کنید که برآیند آنها متناسب با AE و AF است. راستای برآیند را تعیین کنید.

حل: برآیند نیروهایی که متناسب با AF و AE است (شکل ۱۲-۳۴) برابر است با نیرویی که متناسب با AG است، که در آن G نقطه وسط EF است.



شکل ۱۲-۲۴

به همین طریق برابری نیروهایی که متناسب با AC و AD است نیرویی است که متناسب با $2AH$ است که H نقطه وسط CD است. برابری نیروهایی که متناسب با $2AG$ و $2AH$ است نیرویی است که متناسب با $4AK$ است، که K نقطه وسط GH است.

به همین طریق برابری نیروهایی که در امتدادهای BC ، BD ، BE ، BF وارد می‌شوند، نیرویی است متناسب با $4BK$.

بالاخره برابری نیروهای $4AK$ و $4BK$ با نیروی $8LK$ مشخص می‌شود

$$\text{که } L \text{ نقطه وسط } AB \text{ است و آشکار است که } LK = \frac{3}{4}AE.$$

پس برابری هشت نیرو، نیرویی است متناسب با $6AE$ و در امتداد LK وارد می‌شود.

به شیوه برداری می‌توان نوشت:

$$\vec{AF} + \vec{AE} + \vec{AD} + \vec{AC} = 2\vec{AG} + 2\vec{AH} = 4\vec{AK}$$

و برابری از A می‌گذرد.

نیز

$$\vec{BF} + \vec{BE} + \vec{BD} + \vec{BC} = 2\vec{BG} + 2\vec{BH} = 4\vec{BK}$$

و برابری از B می‌گذرد.

پس هشت نیرو معادل با نیروی $4AK$ در امتداد AK و نیروی $4BK$

در امتداد BK می‌شود که آن هم به نوبه خود معادل نیروی $8LK$ در امتداد LK است.

تمرین ۵۰۱۲

- ۱ - F و H به ترتیب نقطه‌های وسط اضلاع BC و DA از چهارضلعی $ABCD$ هستند. نشان دهید که اگر بريك نقطه دونیرو به موازات و برابر با AB و DC وارد شوند، برایندها نیرویی به موازات HF و برابر $2HF$ خواهد بود.
- ۲ - ABC يك مثلث و G محل تلاقی میانه‌های آن است. اگر O نقطه‌ای دلخواه از صفحه مثلث باشد، ثابت کنید که برایندها نیروهایی که با OA ، OB و OC مشخص شده‌اند نیرویی است که با OG ۳ مشخص می‌شود.
- ۳ - اگر O مرکز دایره محیطی و H ، محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC باشد، ثابت کنید که برایندها نیروهایی که با HA ، HB و HC نمایش داده می‌شوند، از نظر بزرگی و جهت با HO ۲ مشخص می‌شوند.
- ۴ - $ABCD$ يك چهارضلعی است، که در آن A و C رؤس متقابل هستند. دو نیرو بر A اثر می‌کنند، که از نظر بزرگی و جهت با AB و AD مشخص می‌شوند. دو نیرو نیز بر C وارد می‌شوند که از نظر بزرگی و جهت با CB و CD مشخص می‌شوند. نشان دهید که نیروی برایندها از نظر بزرگی و جهت با چهار برابر خط واصل میان نقاط وسط اقطار چهارضلعی مشخص می‌شود.
- ۵ - $ABCD$ يك چهارضلعی است. نیروهایی هستند که به‌طور کامل با خطوط AB ، BC ، AD و DC مشخص می‌شوند. ثابت کنید که برایندها از نظر بزرگی و جهت با AC ۲ مشخص می‌شود و راستای آن، BD را نصف می‌کند.
- ۶ - O نقطه‌ای دلخواه از صفحه مثلث ABC است و D ، E ، F نقطه‌های وسط اضلاع هستند. نشان دهید که مجموعه نیروهایی که با OA ، OB و OC مشخص می‌شوند معادلند با مجموعه نیروهایی که با OD ، OE و OF مشخص می‌شوند.
- ۷ - $ABCD$ يك چهارضلعی است، و O نقطه‌ای دلخواه از صفحه آن است. E ، F ، G ، H به ترتیب نقطه‌های وسط AB ، BC ، CD ، DA هستند. ثابت کنید که برایندها نیروهایی که با OA ، OB ، OC ، OD مشخص می‌شوند با OK ۴ مشخص می‌شود که در آن K وسط EG است.
- ۸ - نقطه P که بر محیط يك دایره واقع است به دو نقطه ثابت A و B که در دایره‌اند متصل می‌شود. نیروهای PA ، PB ۲، به ترتیب در امتدادهای PA و PB وارد می‌شوند، و برایندها از نظر جهت و بزرگی با PQ نمایش داده می‌شوند. مکان هندسی Q را هنگامی که P به دور دایره بچرخد تعیین کنید.

- ۹ - سه نیروی AB ، $2BC$ ، $2AC$ در امتداد اضلاع مثلث ABC و درجهتهایی که با حروف مشخص شده است وارد می‌شوند. برابند آنها را تعیین کنید و نتیجه بگیرید که اگر از وسط AB به نقطه‌ای از BC که BC را به نسبت ۱ و ۲ طوری تقسیم می‌کند که به C نزدیکتر باشد، خطی وصل کنیم این خط امتداد AC را در E قطع می‌کند، به طوری که $AC = CE$.
- ۱۰ - A و B نقطه‌های ثابتی هستند. P طوری حرکت می‌کند که برابند نیروهای PA و PB همیشه دو برابر نیروی PA باشد. مکان هندسی P را تعیین کنید.
- ۱۱ - نیروهایی با خطوطی نمایش داده می‌شوند که نقطه دلخواه P را بر رؤس یک چهارضلعی وصل می‌کنند. اگر برابند این نیروها بزرگی ثابتی داشته باشد، ثابت کنید که مکان P دایره است. مرکز این دایره و شعاع آن را تعیین کنید.
- ۱۲ - $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است و E نقطه‌ای است واقع بر AD . نقطه F واقع بر BC را چنان تعیین کنید که برابند نیروهایی که با AE و AF نمایش داده می‌شوند، در جهت AC باشد.
- ۱۳ - نیروهای متساوی $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$ در امتداد اضلاع مثلث ABC اثر می‌کنند. ثابت کنید که برابند آنها در امتداد ED وارد می‌شود و مساوی است با $4ED$ ، که D و E به ترتیب نقطه‌های وسط اضلاع BC و CA هستند.
- ۱۴ - O نقطه‌ای است واقع بر میانه‌ای از مثلث ABC . نیروهایی که از O به طرف A ، B و C وارد می‌شوند متناسب با فاصله O از این نقطه‌ها. ثابت کنید که برابند آنها از نظر بزرگی و جهت با $3OG$ نمایش داده می‌شود که در آن G مرکز جرم مثلث است.
- ۱۵ - نیروهایی که به طور کامل با AB ، CB ، CD و AD نمایش داده می‌شوند، در امتداد اضلاع چهارضلعی $ABCD$ وارد می‌شوند. ثابت کنید که برابند آنها به طور کامل با $4HK$ نمایش داده می‌شود، که در آن H و K به ترتیب نقطه‌های وسط AC و BD هستند.
- ۱۶ - ABC مثلثی است متساوی‌الاضلاع و G مرکز جرم آن است. نیروهای ۱، ۱، ۱، ۴، ۲، ۲، ۱ نیوتون و به ترتیب در امتداد BC ، CA ، AB ، AG ، BG ، CG وارد می‌شوند. بزرگی و جهت برابند آنها و فاصله A را از محل تلاقی این برابند با AB تعیین کنید.
- ۱۷ - ثابت کنید که برابند چند نیروی متقارب $l.OA$ ، $m.OB$ ، $n.OC$ ، ... برابر است با $OG(l+m+n+...)$ ، که در آن G مرکز ثقل جرمهایی است که متناسب با l ، m ، n ، ... هستند و به ترتیب در نقاط A ، B ، C ، ... قرار دارند.

۱۸- ABCD يك دوزنقه است که در آن AB موازی با DC است. نشان دهید که

نیروهایی که از نظر بزرگی، جهت و راستا با $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ نمایش داده می شوند، دارای برابندی هستند که از نظر بزرگی و جهت با $\overrightarrow{EF}$ نمایش داده می شوند، که E و F به ترتیب نقطه های وسط AB و CD هستند. نشان دهید که راستای برابند، امتداد BA را در نقطه ای به فاصله $\frac{1}{2}CD$ از A قطع می کند.

۱۹- نیروهایی هستند که از نظر بزرگی، جهت و راستا با $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BA}$ نمایش داده می شوند. راستای برابند آنها، AB را در F و AC را در E قطع می کند. نشان دهید که $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ ، $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB}$ و نیز نشان دهید که برابند می توان از نظر بزرگی و جهت با $\overrightarrow{FE}$ نمایش داد.

۲۰- اگر AD و BE میانه های مثلث غیر مشخص ABC باشند، نشان دهید که پنج نیرویی که از نظر بزرگی و جهت و راستا با $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{CA}$ ، $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{DA}$ نمایش داده می شوند دارای برابندی هستند که به طور کامل با $\overrightarrow{CH}$ نمایش داده می شود که در آن H نقطه ای است که AB را به نسبت ۳ و ۷ تقسیم می کند.

۲۱- نیروهایی هستند که از نظر بزرگی، جهت و راستا با $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BA}$ در يك متوازی الاضلاع نمایش داده می شوند. نشان دهید که برابند آنها از نظر بزرگی و جهت با $\overrightarrow{BD}$ نمایش داده می شود. راستای برابند را تعیین کنید.

۲۲- نقطه P بر صفحه مستطیل ABCD قرار دارد. نیروهایی که به طور کامل با $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{PA}$ ، $\overrightarrow{BP}$ ، $\overrightarrow{CP}$ ، $\overrightarrow{PD}$ نمایش داده می شوند در حال تعادلند. I را بر حسب m تعیین کنید.

ثابت کنید که P می تواند بر هر نقطه از خطی موازی با AB قرار گیرد. تعیین کنید این خط، AB را به چه نسبت هایی تقسیم می کند.

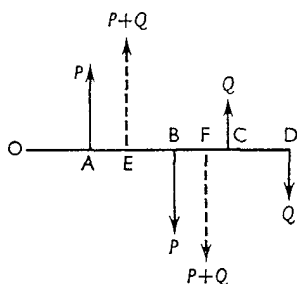
۱۶.۱۲. ترکیب زوجها

قبلاً دیدیم (بند ۱۱-۱۴) که گشتاور يك زوج نسبت به هر نقطه که در صفحه آن واقع است ثابت است. اکنون قضیه زیر را که، در به دست آوردن برابند چند زوج که در يك صفحه اند، به ما کمک می کند ثابت می کنیم.

دو زوج واقع در يك صفحه، معادل با زوجی هستند كه گشتاور آن برابر مجموع جبری گشتاورهای آن دو زوج است.

حالت (۱). هنگامی كه راستای همه نیروها متوازی است.

فرض می کنیم P, P, Q, Q نیروهای زوجهایی باشند كه وارد می شوند (شكل ۱۲-۳۵). خط راست OABCD را عمود بر راستاهای آنها رسم می کنیم تا نیروها را در A, B, C, D قطع کند.



شكل ۱۲-۳۵

نیروهای P و Q كه بر A و C وارد می شوند معادل با نیرویی هستند كه برابر $(P+Q)$ است و موازی آنهاست و در نقطه E واقع بر AC وارد می شود، به طوری كه $P \cdot AE = Q \cdot EC$.

نیروهای P و Q كه بر B و D وارد می شوند، معادل با نیرویی هستند كه برابر $(P+Q)$ است و موازی با آنهاست و در نقطه F واقع بر BD وارد می شود، به طوری كه $P \cdot BF = Q \cdot FD$ ، و این نیرو در جهت مخالف نیروی قبلی است. پس دو زوج معادل با يك زوج هستند.

نیز گشتاور زوج برایند

= مجموع گشتاورهای دو نیروی $P+Q$ كه در E و F وارد می شود، نسبت به O.

اما گشتاور $P+Q$ كه در E وارد می شود نسبت به O

= مجموع گشتاورهای P كه در A وارد می شود و Q كه در C وارد می شود، نسبت به O.

به همین طریق گشتاور $P+Q$ كه در F وارد می شود، نسبت به O

= مجموع گشتاورهای P كه در B وارد می شود و Q كه در D وارد می شود، نسبت به O.

پس گشتاور زوج برابند

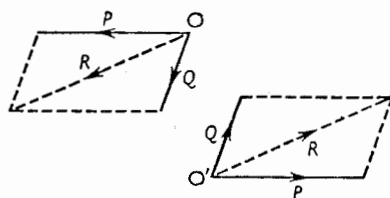
= مجموع گشتاورهای چهار نیروی زوج

= مجموع گشتاورهای زوجهای اولیه

حالت (۲). وقتی که راستای نیروها متوازی نیستند.

فرض می کنیم P, P, Q, Q نیروهای زوجا باشند، و فرض می کنیم که یکی از نیروهای P یکی از نیروهای Q را در O تلاقی کند (شکل ۱۲-۳۶)، و دومی در دیگر، در نقطه O' تلاقی کنند.

نیروهای P, Q که در O وارد می شوند می توانند با یکدیگر ترکیب شوند و نیروی منفردی مانند R تشکیل دهند و همین طور است نیروهای P و Q که در O' وارد می شوند. نیز این نیروهای منفرد، مساوی، موازی و در سوی مخالف یکدیگر خواهند بود، زیرا هر دو برابند نیروهای P و Q هستند که با زاویه یکسان، امار جهت های مخالف یکدیگر وارد می شوند.



شکل ۱۲-۳۶

پس دو زوج معادل با يك زوج منفرد هستند.

اما گشتاور این زوج برابند

= گشتاور R که در O' وارد می شود نسبت به O ،

= مجموع گشتاورهای P و Q که در O' وارد می شوند نسبت به O

= مجموع گشتاورهای زوجهای اولیه

این قضیه که برای دو زوج ثابت شد می تواند تعمیم پیدا کند و برای هر چند زوج که در يك صفحه اند تحقیق شود. نتیجه ای که به دست می آید این است که چند زوج واقع در يك صفحه معادل با زوجی هستند که گشتاور آن برابر است با مجموع جبری گشتاورهای زوجهای منفرد.

۱۷۰۱۲. از قضیه بند قبلی نکته‌های زیر استنتاج می‌شود:

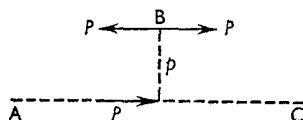
۱. دو زوج واقع در يك صفحه، که گشتاورهای آنها برابر و در سوی مخالف یکدیگرند، با یکدیگر متعادلند.

زیرا برایندها زوجی است که گشتاور آن صفر است و این بدان معنی است که نیروهای زوج، هر يك برابر صفر است، یا اینکه بازوی زوج برابر صفر است، و در حالت اخیر می‌بایستی از دو نیروی مساوی و ناهمسو که بر يك خط مستقیم واقعند تشکیل شده باشد، و بدیهی است که چنین دو نیرویی در حال تعادلند.

۲. هر دو زوجی که گشتاور آنها مساوی یکدیگر و در يك صفحه باشند با یکدیگر برابرند.

این نتیجه را می‌توان با وارونه کردن جهت‌های نیروهای یکی از زوج‌های متعادل مربوط به نکته (۱) به دست آورد.

۱۸۰۱۲. نیروی P که بر يك نقطه دلخواه از يك جسم صلب اثر می‌کند، ممکن است به موازات خودش جا به جا شود و بر نقطه دلخواه دیگری مانند B از جسم وارد شود. برای این کار باید زوجی تولید کرد که گشتاور آن Pp است، که در آن p فاصله عمودی است که از B بر راستای P رسم می‌شود. بر اثر این زوج، جسم نسبت به B در جهتی می‌چرخد که وقتی P بر A وارد می‌شد، جسم نسبت به B در آن جهت می‌چرخید.



شکل ۱۲-۳۷

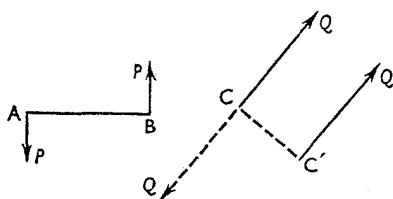
فرض می‌کنیم AC (شکل ۱۲-۳۷) راستای P باشد.

دو نیروی مساوی و ناهمسوی P را بر B طوری وارد می‌کنیم که راستای آنها از B بگذرد و به موازات AC باشد.

یکی از این نیروها، آنکه به طرف راست وارد می‌شود، نیروی اصلی P است که جا به جا شده است و در B اثر می‌کند.

نیروی دیگر با نیروی اصلی تشکیل يك زوج می دهد که گشتاور آن Pp است که در آن p فاصله عمود B از AC است.

۱۹-۱۲. مثال ۱: ثابت کنید که ترکیب يك زوج با نیرویی که در همان صفحه است برابر است با تغییر وضع راستای نیرو.



شکل ۱۲-۳۸

حل: فرض می کنیم زوج از دو نیروی P که در A و B اثر می کنند تشکیل شده باشد (شکل ۱۲-۳۸)، و فرض می کنیم که Q نیرویی باشد که بر C وارد می شود. ما می توانیم این زوج را با زوج دیگری که دارای همان گشتاور و در همان صفحه باشد جابه جا کنیم.

زوجی انتخاب می کنیم که بزرگی نیروهایش برابر Q باشند و یکی از آنها بر C و در جهت مخالف نیروی Q که قبلاً وارد شده بود، اثر کند. نیروی دیگر Q بر C' وارد خواهد شد، به طوری که CC' عمود بر جهت اولیه نیروهای Q است و

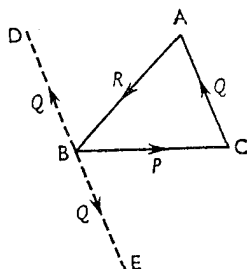
$$CC' = \frac{P}{Q} AB$$

اکنون دو نیرو داریم که در C با یکدیگر توازن پیدا کرده اند، و يك نیروی Q داریم که در C' وارد شده است.

بنابراین برایند باید در راستای Q به موازات خودش، به اندازه $\frac{M}{Q}$ که در آن M گشتاور زوج است، حرکت کند.

مثال ۲: اگر سه نیرو که از نظر بزرگی، جهت و راستا با اضلاع يك مثلث، که به ترتیب دورانی حروف در نظر گرفته شوند، مشخص می شوند، بريك جسم صلب وارد شوند، معادل بازو جی خواهند بود که گشتاور آن بادو برابر مساحت مثلث مشخص می شود.

حل: فرض می کنیم ABC (شکل ۱۲-۳۹) مثلث مفروض باشد و P ، Q ، R نیروها



شکل ۱۲-۳۹

باشند، به طوری که P ، Q و R به طور کامل به ترتیب با اضلاع BC ، CA و AB مشخص می شوند.

خط DBE را به موازات AC رسم می کنیم، و در B دو نیروی متساوی و ناهمسو، برابر Q ، و در جهت های BD و BE تولید می کنیم.

نیروهای P و R و نیروی Q که در جهت BD وارد می شوند به وسیله مثلث نیروها در حال تعادلند، زیرا عمده آنها بر B وارد می شوند.

بنابراین فقط دو نیرو باقی می ماند که هر یک برابر Q است و در راستای CA و BE وارد می شوند.

این دو نیرو تشکیل زوجی می دهند که گشتاور آن برابر است با Q ضرب در فاصله قائم B از CA .

نیز چون CA معرف Q است، این گشتاور با حاصل ضرب CA در فاصله قائم B از CA ، یعنی با دو برابر مساحت مثلث ABC ، مشخص می شود.

به بیان دیگر نیز می توانیم بگوییم که مجموع برداری سه نیرو، یعنی $\vec{CA} + \vec{BC} + \vec{AB}$ ، برابر صفر است. پس نیروها معادل با یک زوج هستند. گشتاور این زوج را می توان با تعیین گشتاورها، نسبت به هر نقطه دلخواه، مثلاً B ، به دست آورد. نتیجه ای مانند فوق به دست خواهد آمد.

مثال ۳: نیروهایی که از نظر بزرگی و جهت با $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$ ، $\vec{CD}$ ، $\vec{DA}$ مشخص می شوند، بر اضلاع یک چهارضلعی $ABCD$ وارد می شوند. نشان دهید که این نیروها، اگر $l = m$ باشد، یا اگر $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد، معادل با یک زوج هستند.

حل : اگر چهار نیرو به یک زوج تبدیل شوند، مجموع برداری آنها می بایستی برابر

صفر باشد. مجموع برداری برابر است با

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{lAB} + m\overrightarrow{BC} + l\overrightarrow{CD} + m\overrightarrow{DA} \\ &= l(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + (m-l)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) \\ &= (m-l)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) \end{aligned}$$

این مقدار هنگامی صفر است که یا $m=l$ باشد، یا $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = 0$ باشد. شرط اخیر هنگامی برقرار است که BC مساوی و موازی با AD باشد، یعنی $ABCD$ يك متوازی الاضلاع باشد.

آشکار است وقتی که این شرایط برقرار باشد، گشتاور چهار نیرو نسبت به هر نقطه، مثلاً D ، صفر نیست، و بنابراین نیروها به يك زوج تبدیل می شوند.

تمرین ۶.۱۲

- ۱ - میله یکنواخت AB به طول $2a$ و وزن W می تواند حول محور افقی صیقلی ثابتی که از A می گذرد بچرخد. اگر زوجی با گشتاور N بر آن وارد شود و آن را تا زاویه 30° نسبت به قائم بچرخاند، N را پیدا کنید.
- ۲ - میله یکنواخت AB به طول $3/6$ m و جرم 5 kg از انتهای A در وضعی افقی قلاب شده است. وزنه ای به جرم $2/5$ kg از انتهای B آویزان است. چه نیرو و زوجی بر میله باید وارد کرد تا میله محکم به قلاب بچسبد؟
- ۳ - نردبان یکنواختی به طول l و وزن W طوری قرار دارد که انتهای بالایی آن بريك دیوار قائم صیقلی تکیه کرده است و انتهای پایینی آن بريك سطح افقی صیقلی قرار دارد. شخصی به وزن W' بر روی نردبان و به فاصله l' از انتهای پایینی قرار دارد. نشان دهید که اگر از لغزش نردبان به کمک يك زوج جلوگیری کنیم، گشتاور زوج مساوی خواهد بود با

$$\left(\frac{1}{2}Wl + W'l'\right)\sin\theta$$

که در آن θ زاویه انحراف نردبان با قائم است.

- ۴ - ثابت کنید که دو زوج که نیروهای آنها هم صفحه اند، اگر گشتاورهای آنها از نظر بزرگی با یکدیگر مساوی ولی از نظر علامت با یکدیگر مخالف باشند، آن دو زوج در حال تعادل خواهند بود.

تبعاً مربع شکل یکنواخت $ABCD$ به وزن W به حال تعادل است به طوری

که گوشه A از آن، به وسیله نیروی افقی که بر C وارد می شود، بردیوار غیر صیقلی قائمی تکیه کرده است. نقطه B بالای نقطه A است. ثابت کنید که ضریب اصطکاک نمی تواند کمتر از واحد باشد، نیز انحراف AB را نسبت به قائم پیدا کنید.

۵ - میله خمیده سنگین و یکنواخت ABCD، که قسمتهای AB، BC، CD از آن، تشکیل سه ضلع یک مربع را می دهند، از A به نقطه ثابتی واقع بر دیواری صیقلی، به طور صیقلی لولا شده است و در صفحه قائمی عمود بر دیوار نگاهداری می شود، به طوری که بر اثر فشار دیوار بر D اضلاع AB و CD افقی باشند، و CD زیر AB باشد. عکس عملهای لولا را در A و دیوار را در D تعیین کنید.

نشان دهید که فشارهایی که بر میله در B و C وارد می شود، هریک از یک نیرو و یک زوج تشکیل شده است؛ عکس عملهای قسمتهای AB، DC را بر قسمت BC تعیین کنید، و تعادل BC را تحقیق کنید.

۶ - نیروهای $3P$ ، $4P$ ، و $5P$ به ترتیب در امتداد اضلاع مثلث قائم الزاویه ای که طول اضلاع آن به ترتیب $3m$ ، $4m$ ، و $5m$ است وارد می شود، به طوری که اگر از هر نقطه مثلث به این نیروها توجه شود، در جهت دورانی یکسانی هستند. نیروهایی را پیدا کنید که اگر به دو انتهای ضلع $5m$ تری و در امتدادهای عمود بر این ضلع وارد شوند با این نیروها به حال تعادل درخواهند آمد.

۷ - ABCDEF یک شش ضلعی منتظم است. نشان دهید که نیروهایی که به طور کامل با AB، CD و EF مشخص می شوند، معادل با زوجی هستند که گشتاور آن برابر مساحت شش ضلعی است.

۸ - P ، Q ، R نقطه های وسط اضلاع AB، BC، CA از مثلث ABC هستند. اگر نیروهای $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CA}$ ، $\overrightarrow{kPQ}$ ، $\overrightarrow{kQR}$ ، $\overrightarrow{kRP}$ در حال تعادل باشند، k را تعیین کنید.

۹ - ABCD مربعی است به ضلع a متر. نیروهای 10 ، 5 ، 10 ، 15 نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع AB، BC، CD، DA وارد می شوند. نشان دهید که دو نیرو وجود دارد که اگر هریک آنها با این چهار نیرو ترکیب شوند، دستگاه به یک زوج با گشتاور $5a \text{ N m}$ کاهش می یابد.

۱۰ - ABCD مستطیلی است که در آن $AB = a$ و $BC = b$ است. M نقطه وسط BC است. سه نیرو که به طور کامل با $\overrightarrow{kAM}$ ، $\overrightarrow{kMC}$ ، $\overrightarrow{kCD}$ مشخص می شوند، که در آن k عددی مثبت است، وارد می شوند. بزرگی و جهت برآیند آنها و فاصله A را

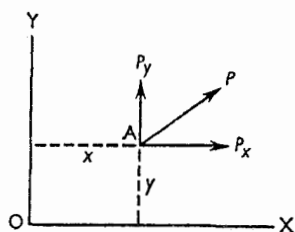
از راستای برابند تعیین کنید.

بزرگی زوجی که باید با سه نیرو ترکیب شود تا برابند دستگاه از نقطه وسط AB بگذرد چیست؟

۲۰.۱۲. برابند نیروهای همصفحه

اکنون روش دیگری را برای کاهش يك مجموعه از نیروهای همصفحه به کار می‌گیریم. از قضیه‌ای که در بند بعدی ثابت شده است می‌توانیم قضیه ۱۲-۵ را نتیجه بگیریم، و نیز به آسانی گروههای گوناگون شرایط لازم و کافی را برای تعادل مجموعه نیروها به دست آوریم.

۲۱.۱۲. يك مجموعه از نیروهای همصفحه را که بر يك جسم صلب اثر می‌کنند، می‌توان به طور کلی به يك نیروی منفرد، که بر نقطه‌ای دلخواه از صفحه نیروها وارد می‌شود، و يك زوج تبدیل کرد.



شکل ۱۲-۴۰

فرض می‌کنیم نیروهای $P_1, P_2, \dots, P_n$ بر نقاط $A_1, A_2, \dots, A_n$ اثر کنند، و فرض می‌کنیم O (شکل ۱۲-۴۰) نقطه‌ای دلخواه از صفحه نیروها باشد. O را به عنوان مبدأ مختصات اختیار می‌کنیم و فرض می‌کنیم که مختصات $A_1, A_2, \dots, A_n$ نسبت به محاورهای متعامدی که از O می‌گذرند $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ باشند. نیروی دلخواه P را که بر نقطه $A(x, y)$ وارد می‌شود در نظر می‌گیریم.

P را به مؤلفه‌های P_x, P_y به موازات OX, OY تجزیه می‌کنیم. با تولید زوجی که گشتاور آن yP_x است می‌توانیم P_x را به موازات خودش جابه‌جا کنیم تا بر O وارد شود. و می‌توانیم با تولید زوجی که گشتاور آن xP_y است، P_y را

به موازات خودش جابه‌جا کنیم تا بر O وارد شود.

این زوجها در جهت‌های مخالف یکدیگر، و مجموع جبری گشتاورهای آنها $xP_y - yP_x$ است.

همین کار را برای همه نیروها انجام می‌دهیم.

فرض می‌کنیم X مجموع جبری همه مؤلفه‌های نیروهایی باشند که در امتداد محور x جابه‌جا شده‌اند، و Y مجموع جبری همه مؤلفه‌های نیروهایی باشند که در امتداد محور y جابه‌جا شده‌اند.

این دو مؤلفه را می‌توان ترکیب کرد. از ترکیب آنها نیروی منفرد R که بر O اثر می‌کند به دست می‌آید. سپس می‌توان زوجها را با هم جمع کرد (با علامتهای مخصوص به خودشان) و تشکیل یک زوج منفرد با گشتاور G داد که مساوی است با مجموع گشتاورهای همه زوجها.

اگر برابط R با محور x زاویه θ بسازد،

$$R^2 = X^2 + Y^2 \quad \text{و} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X}$$

باید توجه داشت که مقادیر θ و R مستقل از وضع نقطه O هستند، زیرا شامل مختصات هیچ‌یک از نقاط $A_1, A_2, \dots, A_n$ نیستند. درواقع R از نظر بزرگی و جهت با بردار مجموع نیروهای $P_1, P_2, \dots, P_n$ مشخص می‌شود. گشتاور برابند زوج برابر است با

$$G = \sum (xP_y - yP_x)$$

که در آن P_x و P_y مؤلفه‌های P به موازات محورها، و $\sum$ علامت جمع کردن همه این نیروهاست.

بدیهی است که G مجموع گشتاورهای همه نیروها نسبت به مبدأ O است، و مقدار آن بستگی به وضع O دارد.

۲۲.۱۲. شرایط تعادل برای مجموعه‌ای از نیروهای هم‌صفحه

فرض می‌کنیم که نیروها به یک نیروی R که بر نقطه اختیاری O وارد می‌شود و یک زوج تبدیل شود.

در این صورت برای تعادل باید چنین داشته باشیم: $R = 0$ ، و $G = 0$.

اگر $R = 0$ باشد باید هم $X = 0$ باشد، هم $Y = 0$ باشد.

بنابراین سه شرط به دست می‌آوریم که مطابق شرح زیر است:

مجموعهای جبری مؤلفه‌های نیروها در هردو جهتی که موازی نیستند باید برابر صفر باشد، و مجموع جبری گشتاورهای همه نیروها نسبت به هر نقطهٔ اختیاری باید صفر باشد.

این شرایط را قبلاً به دست آوردیم (بند ۱۲-۸)

۲۳.۱۲. تغییر مبنا

اگر نقطهٔ دیگری، مانند O' را که مختصات آن (x', y') است به عنوان مبدأ اختیار کنیم، گشتاور زوج برای این مبنا را ممکن است به این طریق به دست آورد که به جای x و y در مقدار G مقادیر $x - x'$ و $y - y'$ قرار دهیم.

$$\begin{aligned} \therefore G' &= \sum (x - x')P_y - \sum (y - y')P_x \\ &= \sum xP_y - \sum yP_x - \sum x'P_y + \sum y'P_x \\ &= G - x' \sum P_y + y' \sum P_x \end{aligned}$$

زیرا x' و y' ثابتند.

$$\therefore G' = G - x'Y + y'X$$

در این نتیجه G مجموع گشتاورهای نیروها نسبت به مبدأ است، x' و y' مختصات مبنا است، X و Y مجموعهای مؤلفه‌های نیروها به موازات محورهاست.

۲۴.۱۲. داستای بربایند

اگر مجموعه در حال تعادل نباشد، و آن را به یک نیروی R در نقطه‌ای به مختصات (x', y') و یک زوج G' تبدیل کنیم، در این صورت

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$G' = G - x'Y + y'X$$

و

حال اگر $R = 0$ باشد، $X = 0$ و $Y = 0$ است و مجموعه به یک زوج G تبدیل شود، زیرا نمی‌تواند G هم مساوی صفر باشد.

اگر R صفر نباشد، می‌توان مبنای خاصی را انتخاب کرد که G' برای آن صفر شود، به طوری که مجموعه به یک نیروی منفرد تبدیل شود. این حالت در هنگامی است که مختصات (x', y') مبنا در معادلهٔ زیر صدق کند:

$$G - xY + yX = 0$$

یعنی مبنا باید بر این خط واقع باشد.

اما این خط با محور x ها زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن $\frac{Y}{X}$ است، و بنابراین موازی با R است، و چون R بر مبنا (x', y') اثر می‌کند، این خط مستقیم، همان راستای R است. بنابراین معادلهٔ راستای برابند چنین است:

$$G - xY + yX = 0$$

۲۵.۱۲. صورتهای دیگر شرایط تعادل

(۱) يك مجموعه از نیروهای هم‌صفحه در صورتی به حال تعادل خواهند بود که مجموع گشتاورهای همهٔ نیروها نسبت به دو نقطهٔ متفاوت (مثلاً O و C) صفر باشد، و مجموع مؤلفه‌ها نیز در جهت دلخواهی، جز جهت عمود بر OC ، صفر باشد.

فرض می‌کنیم O مبدأ و C مبنا (x', y') باشد. خواهیم داشت،

$$G = 0$$

$$G' = G - x'Y + y'X = 0 \quad \text{و}$$

$$X = 0 \quad \text{و}$$

نتیجه می‌شود که $X = 0$ ، $Y = 0$ ، $G = 0$ ، مشروط بر آنکه x' صفر نباشد، یعنی مشروط بر آنکه C بر محور y ها نباشد (بنابراین X عمود بر OC است).

(۲) مجموعه‌ای از نیروهای هم‌صفحه در صورتی در حال تعادل خواهند بود که مجموع گشتاورهای آنها نسبت به سه نقطهٔ O ، C ، D ، که بر يك استقامت نیستند، هر يك برابر صفر باشد.

O را مبدأ اختیار می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $C(x', y')$ و $D(x'', y'')$ است. این شرایط به دست می‌آید:

$$G = 0$$

$$G - x'Y + y'X = 0 \quad \text{و}$$

$$G - x''Y + y''X = 0 \quad \text{و}$$

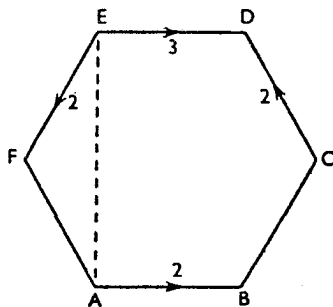
$$\therefore -x'Y + y'X = 0$$

$$-x''Y + y''X = 0 \quad \text{و}$$

بنابراین $X = 0$ ، $Y = 0$ ، مگر آنکه $x'y'' - x''y' = 0$ نباشد، یعنی مگر آنکه

O ، C ، D بر يك خط راست واقع باشند.

۲۶.۱۲. مثال ۱: نیروهای ۲، ۲، ۳، ۲ واحد به ترتیب در امتداد اضلاع AB ، CD ، ED ، EF از یک شش ضلعی $ABCDEF$ در جهتهایی که با ترتیب حروف مشخص هستند وارد می شوند. بزرگی برایند را پیدا کنید و ثابت کنید که برایند در امتداد AB وارد می شود.



شکل ۱۲-۴۱

حل: شکل ۱۲-۴۱ نیروهایی را نشان می دهد که در امتداد اضلاع شش ضلعی وارد می شوند. محورها را در امتداد AB و در امتداد عمود بر AB اختیار می کنیم و نقطه A را به عنوان مبدأ اختیار می کنیم. فرض می کنیم که طول ضلع این شش ضلعی برابر a باشد.

مجموع مؤلفه های نیروها به موازات AB برابر است با

$$2 - 2 \cos 60^\circ + 3 - 2 \cos 60^\circ = 3$$

و مجموع مؤلفه های نیروها عمود بر AB برابر است با

$$2 \sin 60^\circ - 2 \sin 60^\circ = 0$$

این دو معادله با هم نشان می دهند که بزرگی برایند برابر ۳ و امتداد آن به موازات AB است.

اما مجموع گشتاورهای نیروها نسبت به A برابر است با

$$2 \times 2a \sin 60^\circ - 3 \times 2a \sin 60^\circ + 2 \times 2a \sin 60^\circ = 0$$

و بنابراین برایند می بایستی از نقطه A بگذرد.

بنابراین بزرگی برایند ۳ واحد است و در امتداد AB وارد می شود.

مثال ۲: گشتاورهای نیرویی که در صفحه xy وارد می شود نسبت به مبدأ و نقطه $(8, 0)$

و نقطه (۰, ۱۰) به ترتیب 60 Nm ، 156 Nm و 84 Nm است. مختصات نقاط برحسب متر داده شده‌اند. بزرگی نیرو و نقطه‌های تلاقی آن را با محورهای مختصات تعیین کنید.

حل : فرض می‌کنیم مؤلفه‌های نیرو در امتداد محورهای X و Y نیوتون و گشتاور آن نسبت به مبدأ برابر G نیوتون-متر باشد. گشتاور نسبت به نقطه (x, y) برابر است با $G - xY + yX$ (برحسب Nm)

$$\therefore G = -60$$

$$-60 - 8Y = -156 \quad \text{و}$$

$$-60 + 10X = 84 \quad \text{و}$$

$$\therefore Y = 12 \quad \text{و} \quad X = 14/4$$

$$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{14^2/4^2 + 12^2}$$

$$= 12\sqrt{11/44 + 1} = 18.72 \text{ N}$$

معادله راستای نیروی R چنین است:

$$-60 - 12x + 14/4y = 0$$

$$\text{وقتی } y = 0 \text{ است } x = -5 \quad \text{و وقتی که } x = 0 \text{ است } y = \frac{60}{14/4} = 17/2$$

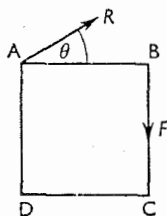
بنابراین راستای نیرو، محورهای را در نقطه‌هایی به مختصات $(-5, 0)$ و $(0, 4/2)$ قطع می‌کند.

۲۷.۱۲. مثالهای دیگری از نیروهای همصفحه

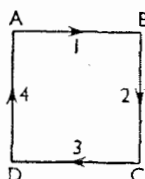
مثال ۱: نیروهای ۱، ۲، ۳، ۴ در امتداد اضلاع AB ، BC ، CD ، DA از مربع $ABCD$ وارد می‌شوند. مجموعه‌ها را به دو نیرو تبدیل می‌کنیم که یکی از A می‌گذرد و دیگری بر BC واقع است.

حل : شکل ۱۲-۴۲ الف نیروی را نشان می‌دهد که در امتداد اضلاع مربع $ABCD$ وارد می‌شوند. شکل ۱۲-۴۲ ب نشان می‌دهد که مجموعه نیروها به دو نیرو تبدیل شده است که یکی، R ، در A وارد می‌شود و با AB زاویه θ می‌سازد و دیگری، F ، بر BC واقع است. اگر مجموع مؤلفه‌های هریک از دو گروه نیرو در دو جهت متعامد دلخواه برابریکدیگر باشند، و اگر مجموع گشتاورهای هریک از دو گروه نسبت به نقطه‌ای دلخواه با یکدیگر برابر باشند در آن صورت

این دو مجموعه، یعنی مجموعه اولیه نیروها و مجموعه تبدیل شده نیروها، با یکدیگر برابر خواهند بود.



شکل ۱۲-۴۲ ب



شکل ۱۲-۴۲ الف

با تجزیه در امتداد موازی و در امتداد عمود بر AB خواهیم داشت،

$$R \cos \theta = 1 - 3 \quad (۱)$$

$$R \sin \theta - F = 4 - 2 \quad (۲)$$

و با گرفتن گشتاور نسبت به A،

$$F \cdot a = 2a + 3a \quad (۳)$$

که در آن a طول ضلع مربع است.

$$F = 5 \quad \text{از معادله (۳):}$$

بنابراین از معادلات (۱) و (۲)،

$$R \cos \theta = -2$$

$$R \sin \theta = 7$$

بنابراین $R = \sqrt{53}$ و $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(-7/2)$ (میان 90° و 180° قرار

می گیرد). بنابراین نیروی R دارای بزرگی $\sqrt{53}$ است و با امتداد AB زاویه ای می سازد که تانژانت آن برابر $3/5$ است.

مثال ۲: تیغه ای به شکل مثلث متساوی الاضلاع ABC بر صفحه ای افقی و صیقلی قرار دارد و تحت تأثیر نیرویی برابر ۵ N در امتداد BC و ۳ N در امتداد AC و ۲ N در امتداد AD است، که در آن AD عمود بر BC است. تعیین کنید نیرویی را که بر B و زوجی را که بر تیغه وارد می شود تا تیغه را به حال سکون نگاهدارد.

حل : مثلث را رسم می کنیم و نیروها را مطابق شکل ۱۲-۴۳ بر روی آن نمایش می دهیم.

فرض می کنیم نیروی اضافی R در جهتی که با BC زاویه θ می سازد و زوجی با گشتاور N در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت مطابق شکل وارد شود.

چون تیغه تحت اثر این نیروها به حال سکون می ماند، این نیروها را به موازات و عمود بر BC تجزیه می کنیم. خواهیم داشت:

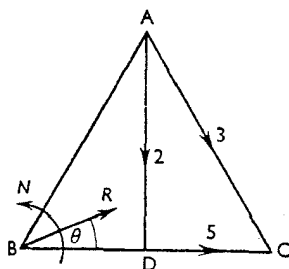
$$R \cos \theta + 5 + 3 \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$R \sin \theta - 2 - 3 \sin 60^\circ = 0 \quad (2)$$

زیرا مجموع مؤلفه های دو نیرویی که زوج را تشکیل داده اند صفر است. نیز گشتاور نسبت به B می گیریم:

$$N - 2 \times \frac{1}{2}a - 3 \times a \sin 60^\circ = 0 \quad (3)$$

که در آن a طول ضلع مثلث ABC است.



شکل ۱۲-۴۳

از معادله (۲): $N = a + 3a\sqrt{\frac{3}{2}} = 3/598a$

از معادله های (۱) و (۲):

$$R \cos \theta = -5 - \frac{3}{2} = -\frac{13}{2}$$

$$R \sin \theta = 2 + 3\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{و}$$

$$\therefore R^2 = \frac{169}{4} + 4 + \frac{27}{4} + 6\sqrt{3} = 53 + 6\sqrt{3}$$

$$\therefore R = 7/962$$

$$\text{نیز} \quad \text{tg} \theta = -\frac{4 + 3\sqrt{3}}{13} = -0/7074$$

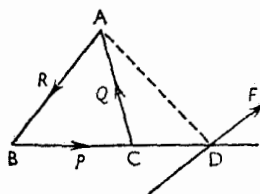
چون $\sin \theta$ مثبت و $\cos \theta$ منفی است، θ میان 90° و 180° قرار می گیرد،

و در واقع برابر است با $144^\circ 44' = 180^\circ - 35^\circ 16'$.

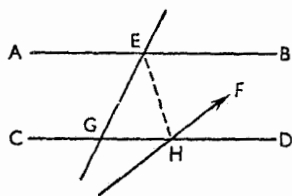
مثال ۳: نشان دهید که یک نیروی معین را می توان به سه مؤلفه تجزیه کرد که در امتداد سه خط معین اثر می کنند که آن خطوط با یکدیگر موازی یا متقارب نیستند.

حل : فرض می کنیم آن سه خط تشکیل یک مثلث ABC (شکل ۱۲-۴۴) می دهند، و فرض می کنیم که نیروی معلوم F ضلع BC را در D قطع کند.

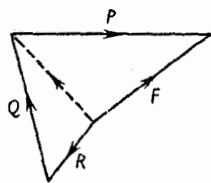
در این صورت F را می توان به دو مؤلفه به ترتیب در امتدادهای BC و DA تجزیه کرد و نیرویی را که در امتداد DA وارد می شود می توان به نوبه خود به دو مؤلفه به ترتیب در امتدادهای AB و CA تجزیه کرد. تجزیه را می توان به طریقه نموداری مطابق شکل ۱۲-۴۵ انجام داد، که در آن شکل خط نقطه چین به موازات DA است.



شکل ۱۲-۴۴



شکل ۱۲-۴۶



شکل ۱۲-۴۵

اگر دو خط AB و CD مطابق شکل ۱۲-۴۶ موازی یکدیگر باشند، و خط سوم باشد، به همان طریق می توان تجزیه کرد. فرض می کنیم نیروی F خط CD را در H قطع کند. در این صورت F را می توان به دو مؤلفه به ترتیب در امتدادهای CD و HE تجزیه کرد.

نیرویی را که در امتداد HE وارد می شود می توان به نوبه خود به دو مؤلفه که به ترتیب در امتدادهای GE و BA وارد می شوند تجزیه کرد.

تمرین ۷.۱۲

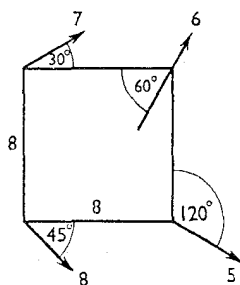
- ۱ - Ox و Oy دو محور متعامدند و P نقطه‌ای است که مختصات آن $(۴, ۳)$ است. محل تلاقی برایند بردار OP به بزرگی ۷ واحد و زوجی که جهت آن خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و گشتاور آن ۲۱ واحد است با محورهای Ox و Oy چیست؟
- ۲ - نیروهایی به بزرگیهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ واحد در یک جهت در امتداد اضلاع یک شش ضلعی منتظم و به ترتیب وارد می‌شوند و نیرویی نیز بر مرکز شش ضلعی وارد می‌شود. اگر چند نیرو معادل با یک زوج باشند، گشتاور زوج و بزرگی و جهت نیرویی را که در مرکز وارد می‌شود تعیین کنید.
- ۳ - نیروهایی به بزرگی F ، $۲F$ ، $۳F$ ، $۴F$ در امتداد اضلاع DA ، CD ، BC ، BA از یک چهارضلعی $ABCD$ در جهتهایی که به ترتیب حروف مشخص شده است وارد می‌شوند. این چهارضلعی طوری است که AB و BC دو ضلع مربع $ABCE$ و D نقطه وسط CE است. بزرگی و جهت برایند را تعیین کنید. نیز فاصله B را از نقطه‌هایی که راستای برایند، اضلاع AB و BC را قطع می‌کند تعیین کنید.
- ۴ - نیروهایی به بزرگی F ، $۲F$ ، $۳F$ ، $۴F$ ، $۵F$ ، $۶F$ در امتداد اضلاع یک شش ضلعی منتظم و به ترتیب وارد می‌شوند. نشان دهید که معادل با نیروی منفردی برابر $۶F$ هستند که به موازات یکی از نیروهای مفروض در بالاست و نشان دهید که فواصل راستاهای این نیرو و نیروی برایند از مرکز شش ضلعی به نسبت ۲ و ۷ است.
- ۵ - مجموعه‌ای از نیروها بر یک صفحه و به شکل مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع $۲a$ واحد اثر می‌کنند. گشتاورهای نیروها نسبت به سه رأس به ترتیب G_1 ، G_2 ، G_3 واحد است. بزرگی برایند را تعیین کنید.
- ۶ - چند نیرو بر یک صفحه اثر می‌کنند. مجموع مؤلفه‌های این نیروها در امتداد محور x ها برابر X و در امتداد محور y ها برابر Y است. مجموع گشتاورهای این نیروها نسبت به مبدأ مختصات برابر N است. معادله راستای برایند را تعیین کنید.
- ۷ - $ABCD$ مربعی است که طول ضلع آن m ۲ است. P نقطه وسط AD و Q نقطه وسط CD است. نیروهایی به بزرگی ۱۰، ۱۰، ۳۰، ۴۰ در امتدادهای AB ، CD ، QB ، CP و در جهتهایی که به ترتیب حروف مشخص می‌شوند وارد می‌شوند. بزرگی برایند را تعیین کنید. نیز فاصله‌های A را از نقطه‌هایی که راستای برایند، خطوط AB و AD را قطع می‌کند تعیین کنید.
- ۸ - $ABCDEF$ شش ضلعی منتظمی است. نیروهای ۱، ۳، ۲، ۴ نیوتون به ترتیب در

امتداد اضلاع AB ، BE ، ED و DA وارد می شوند. بزرگی برایندها را تعیین کنید.
 AB را به عنوان محور x ها و AE را به عنوان محور y ها بگیرید و معادله راستای
 برایندها را تعیین کنید. با يك پیکان، جهت برایندها را نشان دهید.

۹ - مؤلفه های يك نیرو در صفحه دو محور متعامد X و Y و به ترتیب در جهتهای محور
 x ها و y هاست. راستای این نیرو از نقطه ای به مختصات (x', y') می گذرد.
 ثابت کنید که این نیرو معادل با يك نیرو و يك زوج است که مؤلفه های نیرو X و Y
 هستند و از مبدأ مختصات می گذرند، و گشتاور زوج برابر $x'Y - y'X$ است.
 نیروهای متوازی $P_1, P_2, P_3, \dots$ در صفحه این محورها به ترتیب بر نقاط
 (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، (x_3, y_3) ، ... وارد می شوند. ثابت کنید که اگر $\sum P = 0$ ،
 $\sum Px = 0$ ، $\sum Py = 0$ باشد، جهت نیروها هر چه باشد، این نیروها در حال
 تعادلند.

۱۰ - مستطیلی است که در آن $AB = 5 \text{ m}$ ، $BC = 3 \text{ m}$ است. نیروهای
 2 N ، 4 N ، 3 N ، 11 N به ترتیب در امتدادهای AB ، BC ، DC ، DA وارد
 می شوند. جهت هریک مطابق با ترتیب نوشتن حروف الفباست. اگر این مجموعه
 به يك نیرو و يك زوج تبدیل شود که نیرو بر نقطه تلاقی AC و BD وارد شود،
 بزرگی و جهت این نیرو، و گشتاور و جهت زوج را تعیین کنید.

۱۱ - بررئوس مربعی به ضلع 8 cm نیروهایی مطابق شکل ۱۲-۴۷ وارد می شوند. با
 محاسبه، بزرگی و جهت برایندها را که بر مرکز وارد می شود و زوج برایندها
 حساب کنید.



شکل ۱۲-۷۴

۱۲ - شش ضلعی منتظم مستوی $OABCDE$ مفروض است. طول هر ضلع آن 5 cm

است. نیروهایی به بزرگی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع OA، AB، BC، CD، DE و EO وارد می شوند. جهت های نیروها مطابق ترتیب حروف مذکور است. نیروی برآیند را که بر O وارد می شود و گشتاور برآیند را نسبت به O تعیین کنید.

۱۳- ثابت کنید که مجموعه ای از نیروهای هم صفحه در صورتی به حال تعادلند که مجموع گشتاورهای آنها نسبت به هر یک از سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت برابر صفر باشد. زوجی با گشتاور ۱۰ Nm بر مربع ABCD که طول ضلع آن ۲ m است وارد می شود. این زوج را با نیروهایی که در امتدادهای AB، BD، CA وارد می شوند جایگزین کنید.

۱۴- ABC مثلثی است که در آن $AB = AC = ۴ \text{ cm}$ ، $BC = ۳ \text{ cm}$ است. E نقطه وسط AB است، F نقطه ای است واقع بر BC به طوری که $CF = ۱ \text{ cm}$. سه نیرو تعیین کنید که در امتدادهای اضلاع ABC وارد می شوند و روی هم معادلند با نیرویی برابر ۴ N که در امتداد EF وارد می شود. این نیروها را با مقیاس درستی بر روی یک نمودار نشان دهید و در نمودار به ازای هر نیوتون طولی برابر ۲ cm در نظر بگیرید.

۱۵- ABC تیغه ای است مثلثی شکل که در آن $AC = ۶ \text{ cm}$ ، $BC = ۸ \text{ cm}$ و C قائمه است. نیرویی برابر ۱۰ N در امتداد AB وارد می شود. ثابت کنید که این نیرو می تواند به طور کامل با دو نیرو که به ترتیب عمود بر AC و BC هستند و بر وسطهای این دو ضلع وارد می شوند تعادل برقرار کند. بزرگیهای این نیروها را تعیین کنید.

۱۶- مجموعه ای از چند نیرو که بر یک تیغه صلب در یک صفحه وارد می شوند، یک بار فقط به یک نیرو که بر نقطه A از تیغه وارد می شود تبدیل و یار دیگر به یک نیرو و یک زوج تبدیل می شود، که نیرو بر B وارد می شود و گشتاور زوج برابر G است. ثابت کنید که اگر مجموعه به یک نیرو و یک زوج تبدیل می شد که نیرو بر نقطه وسط AB وارد می شد، در این صورت گشتاور زوج برابر $\frac{1}{3}G$ می بود.

۱۷- نیروهای ۱، ۲، ۳، ۴ نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع DA، CD، BC، AB از مربع ABCD و ضلع ۱ m وارد می شوند. مجموعه این نیروها را، (الف) به یک نیرو که بر A وارد می شود و یک زوج، (ب) به دو نیروی متوازی که از B و C می گذرند، تبدیل کنید.

۱۸- A و B دو نقطه دلخواه از يك تيغه اند، که بر آن تيغه مجموعه ای از نیروهای هم صفحه وارد می شوند، و وقتی که نیروها را به يك نیروی منفرد که بر یکی از این نقاط وارد می شود و يك زوج تبدیل می کنیم، گشتاورهای زوجها به ترتیب G_a و G_b است. ثابت کنید که وقتی که مجموعه نیروها را به يك نیرو که بروسط AB وارد می شود و يك زوج تبدیل می کنیم، گشتاور زوج برابر خواهد شد با $\frac{1}{4}(G_a + G_b)$.

۱۹- نیروهای P, Q, P, Q به ترتیب در امتداد اضلاع AB, BC, CD, DA از يك مربع وارد می شوند. اگر این چهار نیرو با يك نیروی پنجم R که بزرگی آن معلوم است و در همان صفحه واقع است بر ایندی داشته باشند که از مرکز مربع می گذرد، ثابت کنید که راستای R بردایره ای ثابت مماس است.

۲۰- تيغه مربعی شکل یکنواخت ABCD به ضلع 0.6 m و جرم 7 kg است. این تيغه می تواند آزادانه در يك صفحه قائم حول A بچرخد. A نقطه ای است ثابت. این تيغه به كمك كشش نخي افقی که بر بالاترین نقطه یعنی D وارد می شود و اعمال يك زوج، طوری به حال تعادل است که AC افقی است. گشتاور زوج را هنگامی که بزرگی عكس العمل A برابر 100 N است تعیین کنید.

۲۱- نیروهای $P, 4P, 2P, 6P$ در امتداد اضلاع AB, BC, CD, DA از مربع ABCD که طول ضلع آن a است وارد می شوند. بزرگی بر ایندی را تعیین کنید، و ثابت کنید که معادله راستای آن، اگر AB و AD را به عنوان محورهای مختصات اختیار کنیم، چنین است:

$$2x - y + 6a = 0$$

۲۲- نیروهای ۱، ۳، ۵، ۷، $9\sqrt{2}$ در امتداد اضلاع AB, BC, CD, DA و قطر BD از مربعی به ضلع a وارد می شوند. جهات نیروها مطابق با ترتیب حروف است. AB و AD را به ترتیب به عنوان محورهای x و y در نظر می گیریم. بزرگی بر ایندی و معادله راستای آن را تعیین کنید.

۲۳- مثلثی متساوی الاضلاع است. نیروهای ۴، ۲ و ۲ واحد در امتداد اضلاع AB, AC, BC و در جهتهایی که بر حسب ترتیب حروف مشخص شده اند وارد می شوند. ثابت کنید که اگر E نقطه تلاقی امتداد CA با خطی باشد که از B بر BC عمود می شود و اگر F نقطه وسط AB باشد، بر ایندی برابر است با $2\sqrt{7}$ واحد که در امتداد EF وارد می شود.

۲۴- ABCD يك چهارضلعی است که در آن $AB = BC$ ، $CD = DA$ است و C قائمه

است، زاویه B برابر 60° است، زاویه D برابر 120° است. نیروهای متساوی و برابر $\sqrt{3}P$ در امتداد AD و DC وارد می‌شوند. نیروهای متساوی و برابر P در امتداد CB و BA وارد می‌شوند. بزرگی برایند آنها را تعیین کنید و نقطه‌ای را که این برایند امتداد BD را قطع می‌کند به دست آورید.

۲۵- $ABCD$ یک مربع است. چهار نیرو که بزرگیهای آنها تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهند، به ترتیب در امتداد اضلاع مربع وارد می‌شوند. نشان دهید که اگر برایند آنها از یکی از رئوس مربع بگذرد، تصاعد فوق یک تصاعد نزولی است، که در آن اگر تفاوت مشترک همه نیروها برابر $2P$ باشد، بزرگترین نیرو برابر $5P$ یا $3P$ است.

۲۸۰۱۲. گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور

تاکنون فقط با نیروهای هم‌صفحه سروکار داشتیم، و گشتاور آنها را نسبت به نقطه‌ای از صفحه آنها در نظر گرفتیم. اکنون فرض می‌کنیم که جسم صلبی داریم که می‌تواند آزادانه حول محور ثابتی از جسم بچرخد.

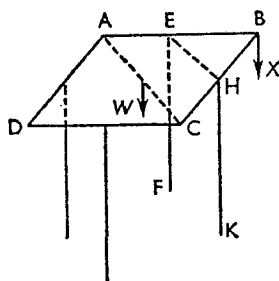
هر نیرو (که راستای آن موازی با این محور نباشد یا این محور را قطع نکند) جسم را به چرخش حول این محور متمایل می‌کند. این مطلب تصور گشتاور یک نیرو را نسبت به یک محور به وجود می‌آورد.

فعالاً تنها حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که نیرو عمود بر محور باشد. در این حالت گشتاور نیرو نسبت به محور بر طبق تعریف برابر است با حاصل ضرب نیرو و فاصله قائم‌میان نیرو و محور. مانند قبل، گشتاور نیرو را هنگامی مثبت می‌گیریم که نیرو مایل باشد جسم را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به چرخش درآورد.

می‌توان نشان داد که اصل گشتاورها در مورد گشتاورهای نیروها نسبت به یک محور ثابت نیز صادق است.

۲۹۰۱۲. مثال ۱: میز مربع شکلی دارای چهار پایه است که هر پایه بروسط یکی از اضلاع مربع نصب شده است. بیشترین وزنی را که می‌توان دریکی از رئوس میز قرار داد بدون آنکه میز حرکتی به طرف بالا نشان دهد چقدر است؟ وزن میز و پایه‌ها روی عم W است.

حل : فرض می‌کنیم $ABCD$ (شکل ۱۲-۴۸) میز را نشان بدهد و فرض می‌کنیم که وزن X در B گذاشته شده است.

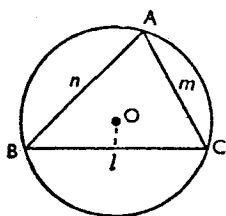


شکل ۴۸-۱۲

این وزنه مایل است که میز را حول خط FK منحرف کند. خط FK خط
واصل میان نقطه‌های تماس پایه‌های EF و HK با زمین است. وزن W بر نقطه
وسط AC وارد می‌شود و بنابراین از FK و وزن X به یک فاصله است.
بنابراین بزرگترین مقدار X برابر W است.

مثال ۲: صفحه مدور یکنواختی بر روی سه نقطه از محیط خود تکیه دارد و به طور افقی
است. فاصله این سه نقطه از یکدیگر به ترتیب n, m, l است. معلوم کنید که
هر پایه چه نسبتی از وزن را تحمل می‌کند.

حل : فرض می‌کنیم A, B, C (شکل ۴۹-۱۲) نقاط تکیه گاه باشند، $BC = l$ ،
 $AB = n$ ، $CA = m$



شکل ۴۹-۱۲

وزن صفحه بر مرکز دایره‌ای که از نقطه‌های A و B و C می‌گذرد وارد
می‌شود.

فاصله O از BC برابر است با $R \cos A$ ، که در آن R شعاع دایره است و
فاصله A از BC برابر است با $m \sin C$. پس اگر عکس العمل در A برابر P_A
باشد و نسبت به BC گشتاور بگیریم، خواهیم داشت:

$$P_A \times m \sin C = W \times R \cos A$$

$$R = \frac{l}{\sqrt{\sin A}} \quad \text{نیز}$$

$$\begin{aligned} \therefore P_A &= W \cdot \frac{l}{\sqrt{\sin C \sin A}} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \\ &= \frac{W l^2}{\sqrt{mn}} \cdot \frac{\cos A}{\sin^2 A} \quad \sin C = \frac{n}{l} \sin A \quad \text{چون} \end{aligned}$$

این نتیجه را می‌بایستی برحسب l ، m ، n بیان کرد.
با استفاده از فرمول

$$\sin A = \frac{\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}}{bc}$$

و با توجه به اینکه $a=l$ ، $b=m$ ، $c=n$ است، خواهیم داشت،

$$\sin^2 A = \frac{4}{m^2 n^2} \cdot \frac{(l+m+n)(m+n-l)(l+n-m)(l+m-n)}{16}$$

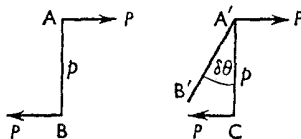
$$\cos A = \frac{m^2 + n^2 - l^2}{2mn} \quad \text{نیز}$$

$$\begin{aligned} \therefore P_A &= \frac{W l^2}{\sqrt{mn}} \times \frac{(m^2 + n^2 - l^2)}{\sqrt{mn}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{m^2 n^2}}{(l+m+n)(m+n-l)(l+n-m)(l+m-n)} \\ &= W \frac{l^2 (m^2 + n^2 - l^2)}{(l+m+n)(m+n-l)(l+n-m)(l+m-n)} \end{aligned}$$

و عبارتهایی مشابه با عبارت فوق نیز برای عکس‌العمل‌های در B و C به‌دست می‌آید.

۳۰.۱۲. کاری که به کمک زوج نیرو انجام می‌گیرد

فرض می‌کنیم هر یک از نیروهای زوج برابر P و طول بازوی AB (شکل ۱۲-۵۰) برابر p باشد.



شکل ۱۲-۵۰

فرض می‌کنیم جسم صلبی که زوج بر آن وارد می‌شود طوری تغییر مکان بدهد که AB به وضع $A'B'$ درآید، به طوری که زاویه میان AB و $A'B'$ زاویه کوچک $\delta\theta$ باشد. ممکن است تصور کنیم که حرکت در دو مرحله صورت گرفته است.

نخست، فرض می‌کنیم نیروها به موازات خود حرکت کرده‌اند، به طوری که AB به وضع جدید $A'C$ درآید. کاری که در این تغییر مکان به وسیله نیروهای برابر و مختلف الجهد انجام می‌گیرد، P ، برابر صفر است.

دوم، فرض می‌کنیم جسم به اندازه زاویه $\delta\theta$ حول A' بچرخد، به طوری که اکنون $A'C$ بر $A'B'$ منطبق شود. برای آنکه گشتاور زوج ثابت بماند، فرض می‌کنیم که نیروها به اندازه زاویه $\delta\theta$ حول A' می‌چرخند.

نیروی P که در A' وارد می‌شود کاری انجام نمی‌دهد، زیرا نقطه اثر آن حرکت نمی‌کند. تغییر مکان نقطه اثر نیروی دیگر P که در C وارد می‌شود $p\delta\theta$ است، زیرا $\delta\theta$ را بینهایت کوچک فرض کرده‌ایم و بنابراین کار کل انجام شده برابر $Pp\delta\theta$ است، یعنی برابر است با گشتاور زوج ضرب در زاویه اولیه‌ای که حول آن چرخیده است.

اگر گشتاور زوج، M ، ثابت بماند، کاری که ضمن چرخاندن جسم به اندازه زاویه θ انجام می‌گیرد برابر است با $M\theta$ ، یعنی گشتاور زوج ضرب در زاویه‌ای که جسم به اندازه آن می‌چرخد. اگر گشتاور زوج بر حسب θ تغییر کند، کار انجام یافته با عبارت $\int_0^\theta M d\theta$ به دست می‌آید.

تمرین ۸.۱۲

- ۱ - میز مدور یکنواختی بر روی چهار پایه متساوی که به طور متقارن در اطراف لبه میز نصب شده‌اند قرار دارد. جرم میز 50 kg است. حداقل وزنی را تعیین کنید که اگر از لبه میز آویزان شود، میز را از جای خود تکان می‌دهد.
- ۲ - میز مدوری است که به طور متقارن بر روی سه پایه قائم قرار دارد که هر پایه به فاصله ۱ متر از دیگری به میز متصل شده است و نقاط اتصال پایه‌ها به میز تشکیل مثلث متساوی الاضلاع ABC را داده است. جرم صفحه روی میز 40 kg است. وزنه‌ای به جرم 60 kg در L (در داخل مثلث ABC) به فاصله 15 cm از BC و 25 cm از CA قرار می‌دهیم. بر هر پایه چه نیروهایی از طرف صفحه روی میز وارد می‌شود؟
- ۳ - نشان دهید که چگونه می‌توان بر ایند سه نیروی متوازی را که هم صفحه نیستند تعیین کرد. میز سبکی بر روی سه پایه قائم متساوی قرار دارد. در مرکز دایره‌ای که از نقاط اتصال پایه‌ها با میز می‌گذرد، وزنه‌ای قرار می‌دهیم. نشان دهید که نیروهایی

که بر میز فشار می آورند متناسب با اضلاع مقابل مثلث هستند.

۴ - قطر میز مدوری که جرم آن 20 kg است برابر است با $1/2 \text{ m}$. این میز بر روی سه پایه قرار دارد که به فاصله های مساوی از یکدیگر به لبه های میز متصل شده اند. اگر از محل تلاقی یکی از پایه ها با میز، قطر میز را رسم کنیم، در انتهای دیگر قطرچه وزنه ای می توان قرارداد به طوری که تمام وزن میز و وزنه به وسیله دو پایه دیگر تحمل شود.

۵ - میز گردی است به قطر $1/5 \text{ m}$ و دارای سه پایه است که هر یک به فاصله $0/6 \text{ m}$ از مرکز میز نصب شده است. اگر جرم میز 25 kg باشد، حداقل وزنی را تعیین کنید که می توان بر لبه میز قرارداد به طوری که تعادل میز به هم بخورد. حداقل وزنی را تعیین کنید که می توان بر لبه میز قرارداد بدون آنکه تعادل میز به هم بخورد.

۶ - قطر صفحه رویی یک میز عسلی $0/6 \text{ m}$ و جرم آن 4 kg است. این صفحه به وسیله سه پایه که طول هر یک $0/6 \text{ m}$ است و هر یک با زمین زاویه 60° می سازد، به طور افقی قرار دارد. محل تلاقی پایه ها با صفحه رویی میز مثلثی متساوی الاضلاع می سازد که طول هر ضلع آن $0/3 \text{ m}$ است. حداقل وزنی را تعیین کنید که اگر بر لبه میز عسلی قرار دهیم، سبب انحراف میز خواهد شد.

۷ - قرقره ای به شعاع $0/6 \text{ m}$ طوری قرار دارد که محورش افقی است و به وسیله نیروی 49 N که مماس بر کمانه قرقره است می چرخد. کاری را که در یک دوران انجام می شود تعیین کنید. اگر یک زوج اصطکاکی با گشتاور 12 N m بر محور قرقره اثر کند، قرقره پس از یک دور دوران چه مقدار انرژی جنبشی به دست خواهد آورد؟

۸ - زوجی با گشتاور M نیوتون متر بر جسم صلبی که می تواند حول محوری ثابت بچرخد وارد می شود. کاری را که در یک دور کامل جسم انجام می شود در حالت های زیر تعیین کنید: (الف) M برابر 10 است، (ب) M برابر $\frac{1}{3} - 10$ است، که θ زاویه ای است که جسم در یک لحظه معین تا آن اندازه چرخیده است.

۹ - چرخ طیار صلبی به شعاع r و جرم M با سرعت n دور در ثانیه می چرخد. این چرخ را به کمک زوجی اصطکاکی که گشتاور آن N نیوتون متر است ساکن می کنند. نشان دهید که پیش از آنکه متوقف شود $\frac{\pi M r^2 n^2}{2N}$ دور می زند.

۱۰ - یک انتهای فنری مارپیچ ثابت است و به کمک زوجی پیچشی که گشتاور آن $k\theta$ است پیچانده می شود. θ زاویه پیچش است. نشان دهید که برای آنکه فنر به اندازه ϕ پیچد کاری معادل $\frac{1}{2} k \phi^2$ باید انجام بگیرد.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

- ۱ - (الف) ثابت کنید که برآیند دو نیروی P و Q که با یکدیگر زاویه α می‌سازند برابر است با

$$\sqrt{P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2}$$

(ب) شش ضلعی منتظمی است که مرکز آن O است. نیروهای 2 ، 4 ، P ، Q از O به ترتیب در امتدادهای OA ، OC ، OE و OG وارد می‌شوند و در حال تعادلند. G وسط AB است. مقادیر P و Q را تعیین کنید.

۲ - نقاطی مادی به اوزان w_1 و w_2 به ترتیب در نقاط A و B از نیمه بالایی سیم صیقلی مدوری قرار دارند. به کمک نخ سبک و محکمی که این نقاط مادی را به هم وصل کرده است و در امتداد قوس کوتاه $\widehat{AB}$ قرار دارد، این نقاط مادی بر روی سیم به حال تعادل قرار می‌گیرند. زاویه مرکزی این قوس برابر α است. ثابت کنید که تنازانت زاویه حاده‌ای که OA (مرکز دایره سیم) با قائم می‌سازد برابر است با

$$\frac{w_2 \sin \alpha}{w_1 + w_2 \cos \alpha}$$

نشان دهید که وزنه سنگینتر به بالاترین نقطه دایره نزدیکتر است تا وزنه سبکتر.

۳ - ثابت کنید که اگر سه نیروی متقارب با یکدیگر در حال تعادل باشند، هریک از نیروها متناسب با سینوس زاویه میان دو نیروی دیگر است. نیروهای P ، Q و R در حال تعادلند. بزرگی و جهت P معلوم است. بزرگی Q معلوم نیست، اما جهت آن با جهت P زاویه‌ای برابر θ می‌سازد. جهت R را هنگامی که بزرگی آن حداقل است تعیین کنید، و در این حالت بزرگیهای Q و R را به دست آورید.

۴ - دو وزنه به وزنهای $2W$ و $3W$ به دو انتهای نخ انعطاف‌ناپذیر سبکی که از روی دومیخ صیقلی هم‌تراز عبور می‌کند بسته شده‌اند. فاصله میخها برابر a است. وزنه‌ها به کمک وزنه دیگر W' ، که به قسمتی از نخ که میان دومیخ است متصل شده‌است، به حال تعادلند. اگر زاویه میان قسمتهای مایل نخ برابر 120° باشد، ثابت کنید که

$$W' = \sqrt{3}W \text{ و نیز فاصله } W' \text{ از افق میخها برابر } \frac{2a}{\sqrt{3}} \text{ است.}$$

۵ - دو حلقه با وزنهای متساوی به کمک نخ به یکدیگر متصل شده‌اند. حلقه‌های میانی بر روی دومیله ناصاف ثابت که در یک صفحه قائم قرار دارند بلغزند. هریک از میله‌ها

با امتداد قائمی که به طرف پایین است زاویه‌ای برابر 45° می‌سازند و در طرفین آن خط قائم قرار دارند. اگر ضریب اصطکاک برابر $\frac{1}{3}$ باشد، ثابت کنید که حداکثر زاویه‌ای که نخ می‌تواند با افق بسازد تا حلقه‌ها ساکن بمانند، برابر θ است به طوری که $\tan \theta = \frac{3}{4}$.

۶ - ثابت کنید که مجموع جبری گشتاورهای چند نیروی متقارب هم‌صفحه نسبت به نقطه‌ای که در صفحه آنهاست، برابر است با گشتاور برآیند آنها نسبت به این نقطه.
(الف) اگر سه نیروی X, Y, Z که در امتداد نیم‌سازهای داخلی زاویه‌های مثلث ABC وارد می‌شوند، در حال تعادل باشند، ثابت کنید که

$$X : Y : Z = \cos \frac{1}{2}A : \cos \frac{1}{2}B : \cos \frac{1}{2}C$$

(ب) نیروهای P, Q, R به ترتیب در امتداد اضلاع BC, CA, AB از مثلث ABC وارد می‌شوند و برآیند آنها در امتداد خطی است که مرکز دایره محیطی را به مرکز دایره محاطی مثلث وصل می‌کند. ثابت کنید که

$$P : Q : R = \frac{1}{\cos B} - \frac{1}{\cos C} : \frac{1}{\cos C} - \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\cos B}$$

۷ - شرایط تعادل یک مجموعه از نیروهای هم‌صفحه را به دست آورید. تیغه مربعی شکل یکنواخت $ABCD$ به کمک دو نخ که به نقطه‌های A و B متصل شده‌اند آویزان است. این دو نخ به ترتیب با امتداد قائم زوایای 30° و 45° می‌سازند. انحراف AB را نسبت به افق تعیین کنید.

۸ - تیغه یکنواخت مربع شکل $ABCD$ به وزن W آزادانه از آویزان است. وزنه w در نقطه B به تیغه متصل شده است، و مجموعه طوری در حال تعادل است که AB با امتداد قائم زاویه 30° می‌سازد. نسبت w به W را تعیین کنید. اگر اکنون وزنه اضافی $2w$ در D به تیغه بیفزاییم، معادله‌ای تعیین کنید که انحراف AD را نسبت به قائم در وضع جدید تعادل به دست بدهد. ثابت کنید که این انحراف بزرگتر از 30° است.

۹ - به انتهای B از میله یکنواخت AB به وزن W ، نقطه‌ای مادی به وزن w متصل شده است. میله و نقطه مادی از نقطه ثابت O به وسیله دو نخ سبک OA و OB که هم‌طول با میله‌اند آویزان شده‌اند. ثابت کنید که در وضع تعادل، اگر T و T' کششهای OA و OB باشند،

$$\frac{T}{W} = \frac{T'}{W + 2w}$$

نیز ثابت کنید که اگر OA با قائم زاویه ای برابر α بسازد،

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(W + 2w)\sqrt{3}}{3W + 2w}$$

۱۰- میله یکنواخت AB به طول $2a$ و وزن W در امتداد خط بزرگترین شیب سطح شیب داری که با افق زاویه θ می سازد، طوری قرار دارد که B بالای A است. ضریب اصطکاک میان میله و سطح شیب دار برابر است با $\operatorname{tg} \lambda$ که λ بزرگتر از θ است. نخى که به A متصل است از روی قرقه کوچکی که به ارتفاع a بالای نقطه وسط میله است عبور کرده است و انتهای دیگر آن به کفه ای متصل است. در کفه به تدریج وزنه قرار می دهند. ثابت کنید اگر λ بزرگتر از $\frac{1}{3}\theta - 45^\circ$ باشد، میله پیش از آنکه بلغزد منحرف می شود.

۱۱- میله نازکی به طول a در داخل حلقه مدور صیقلی ای به شعاع a قرار دارد. صفحه میله به طور قائم است. اگر مرکز ثقل میله، طول میله را به نسبت ۳ به ۴ تقسیم کند، ثابت کنید که انحراف میله نسبت به خط قائم برابر است با $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{3}$. نسبت عکس العملی را که بر انتهای پایینی میله وارد می شود به عکس العملی که بر انتهای بالایی میله وارد می شود تعیین کنید.

۱۲- دو استوانه صیقلی متساوی به شعاع a و وزن W ، که در امتداد مولدهایشان بر میزی افقی تکیه دارند با یکدیگر در تماسند. استوانه ای متساوی با آنها به طور متقارن بر روی دو استوانه قرار می گیرد و دستگاه به کمک نواری که از دور استوانه ها در صفحه ای عمود بر مولدها می گذرد، به حال تعادل نگاه داشته شده است. اگر استوانه های پایینی درست در حال شروع به جدا شدن باشند، کشش نوار را تعیین کنید. اگر نوار، کشسان و طول طبیعی آن $12a$ باشد، ثابت کنید که کشش نوار بر اثر افزایش طولی برابر x مساوی خواهد بود با

$$\frac{Wx}{4\sqrt{3}(\pi - 3)a}$$

۱۳- دو نردبان یکنواخت، هر یک به وزن W و طول $2b$ ، در انتهای بالایی به یکدیگر لولا شده اند. و در صفحه افقی صیقلی قرار دارند. از پله یکی از نردبانها که به فاصله d از قسمت پایین نردبان است، وزنه ای به وزن w آویزان می کنیم. برای جلوگیری از لغزش نردبانها، نخى به طول $2a$ به دو انتهای پایینی نردبانها متصل می کنیم.

نیروی که هرنردبان بر زمین وارد می کند چقدر است؟ ثابت کنید که کشش نخ برابر است با

$$\frac{a(2Wb+wd)}{2b(2b^2-a^2)^{1/2}}$$

۱۴- سه میله یکنواخت متساوی AB، BC، و CD، هریک به طول $2a$ و وزن W ، به طور صیقلی در B و C به یکدیگر لولا شده اند و AB و CD بر دو میخ همتراز تماس دارند. در وضع تعادل AB و CD با قائم زاویه ای برابر α می سازند و BC افقی است. ثابت کنید که فاصله میان میخها برابر است با $2a(1+\frac{2}{3}\sin^3\alpha)$. اگر β زاویه ای باشد که عکس العمل وارد در B با قائم می سازد، ثابت کنید که $3 = \tan \alpha \tan \beta$ است.

۱۵- پنج ضلعی ABCDE، که با میله های هم طول یکنواختی ساخته شده است که به طور صیقلی به یکدیگر لولا شده اند، در صفحه ای قائم به طور متقارن نگاهداری شده است، به طوری که CD افقی است و AB و AE با میخهای صیقلی در تماس است. وزن هر میله W است. میخها همترازند و در چنان فاصله ای از یکدیگر قرار دارند که پنج ضلعی به طور منتظم باشد. از تعادل پنج ضلعی، عکس العملهایی را که بر میخها وارد می شود پیدا کنید، و با توجه به تعادل میله های BC، CD، DE، نشان دهید که مؤلفه های افقی عکس العملها در B، C، D، E متساویند و به بزرگی $W \cot \frac{2\pi}{5}$ هستند. از این گذشته نشان دهید که عکس العمل در A نیرویی است افقی برابر

$$\left(\frac{5}{2}\tan\frac{\pi}{5}-\cot\frac{2\pi}{5}\right)W$$

۱۶- مربع ABCD از چهار میله یکنواخت تشکیل شده است که وزن هریک برابر W است و آزادانه در انتهاهای خود به یکدیگر لولا شده اند. مربع را آزادانه از A آویزان می کنند و از پایینترین نقطه آن یعنی C وزنه ای به وزن $3W$ آویزان می کنند و برای آنکه شکل مربع به هم نخورد میان نقاط وسط AB و AD نرده ای افقی قرار می دهند. ثابت کنید که فشاری که بر این نرده وارد می شود برابر $10W$ است.

۱۷- دوتیریکنواخت AB و BC هریک به طول $2a$ و وزن W آزادانه در B به یکدیگر لولا شده اند. حلقه ای سبک به C متصل شده است و از درون این حلقه میله ای افقی و ثابت گذرانده شده است. انتهای A را آزادانه به نقطه ای، که به فاصله $3a$ در زیر میله ثابت است، لولا می کنیم. ثابت کنید که تعادل فقط هنگامی ممکن است

برقرار شود که یکی از میله‌ها قائم باشد. عکس‌العمل در C را هنگامی که دستگاه به حال تعادل است، (الف) وقتی که AB قائم است، (ب) وقتی که BC قائم است، تعیین کنید.

۱۸- هریک از دو قسمت يك نردبان به طول 2 m و به جرم 9 kg است. نیروی وزن بر نقطه وسط هریک از قسمت‌ها وارد می‌شود. این دو قسمت از يك انتها به طور صیقلی به یکدیگر لولا شده‌اند. به کمک طناب کشسانی که طول طبیعی آن 1 m و ضریب کشسانی آن λ است، نقاط وسط این دو قسمت را به هم بسته‌اند. نردبان بر روی زمین افقی صیقلی قرار دارد. پاهای نردبان از یکدیگر فاصله دارند و وزنه‌ای به جرم 75 kg از لولا آویزان شده است. اگر دستگاه به حال تعادل باشد، افزایش طول نخ 10 cm است. λ را حساب کنید.

۱۹- ABCD يك چهار ضلعی است که در آن $AB = 5/9\text{ m}$ ، $BC = 1/2\text{ m}$ ، $CD = 3/6\text{ m}$ ، $DA = 3/9\text{ m}$ و $AC = 1/5\text{ m}$ است. B و D در دو طرف AC هستند. AB قائم است و B در زیر A واقع است. CD، DA، AC و CB چهار میله سبک هستند که به یکدیگر لولا شده‌اند و يك داربست تشکیل داده‌اند. A و B نقطه‌های ثابتی از يك دیوار قائم هستند. وزنه‌ای به جرم 75 kg از D آویزان است. نیرویی را که بر هر چهار میله وارد می‌شود تعیین کنید.

۲۰- دوميله يکنواخت AB و BC هریک به وزن W آزادانه در B به یکدیگر لولا شده‌اند. این دوميله با استوانه‌ای صلب و صیقلی تماس دارند. این استوانه طوری ثابت است که محور آن افقی است. صفحه میله‌ها بر این محور عمود است. در وضع تعادل، میله‌ها بر یکدیگر عمودند. نشان دهید که طول هریک از دوميله دو برابر قطر استوانه است.

۲۱- دوميله يکنواخت AC و BC که وزن آنها متناسب با طول آنهاست آزادانه در C به یکدیگر لولا شده‌اند و انتهای A و B آزادانه در دو نقطه از يك خط قائم لولا شده‌اند. نشان دهید که عکس‌العمل میان میله‌ها در C در امتداد نیمساز زاویه ACB وارد می‌شود.

۲۲- ABCD مستطیلی است که در آن $AB = a$ ، $BC = b$ است. M نقطه وسط BC است. سه نیرو به طور کامل با $\overrightarrow{kAM}$ ، $\overrightarrow{kMC}$ ، $\overrightarrow{kCD}$ مشخص می‌شوند که در آن k عددی مثبت است. بزرگی و جهت برابند آنها و فاصله A را از راستای برابند تعیین کنید.

بزرگی زوجی را تعیین کنید که باید با این سه نیرو ترکیب شود تا برآیند مجموعه از نقطه وسط AB بگذرد. جهت این زوج را بر روی یک نمودار نشان دهید.

۲۳- نیروهای P ، Q در امتداد خطوط BA و CA و در جهتهایی که با ترتیب نوشتن حروف مشخص می شود وارد می شوند. یک جفت نیروهای معادل با این دو نیرو را که در جهتهای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A وارد می شوند تعیین کنید. فرض کنید $\angle BAC = 2\alpha$ است.

مثال ABC متساوی الساقین و قائم الزاویه است. A زاویه قائمه است. BCD مثلث متساوی الاضلاعی است که در طرف دیگر BC است. نیروهای ۲ ، ۳ ، ۱۵ و ۱۴ نیوتون در امتدادهای AB ، BC ، CA ، BD و CD در جهتهایی که با ترتیب نوشتن حروف مشخص شده است وارد می شوند. ثابت کنید که راستای نیروی برآیند در فاصله $\frac{\sqrt{3}}{15}AB$ از A است.

۲۴- ثابت کنید که مجموعه ای از نیروهای هم صفحه که در حال تعادل نیستند، ممکن است به یک نیروی منفرد یا یک زوج تبدیل شوند.

$ABCD$ یک مربع است. نیروهایی به بزرگی ۳ ، ۲ ، ۴ ، ۳ ، P واحده ترتیب در امتدادهای AB ، CB ، CD ، AD ، DB و در جهتهایی که با ترتیب نوشتن حروف مشخص می شوند وارد می گردند. اگر مجموعه معادل با یک زوج باشد، مقدار P را تعیین کنید.

۲۵- مجموعه ای از نیروهای هم صفحه نسبت به نقاط $(0, 0)$ ، $(a, 0)$ ، $(0, 2a)$ دارای گشتاورهایی به ترتیب برابر M ، $\frac{2M}{3}$ ، $\frac{3M}{2}$ و در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت هستند. بزرگی برآیند نیروها را تعیین کنید و ثابت کنید که معادله راستای برآیند چنین است:

$$3y - 4x + 12a = 0$$

۲۶- نشان دهید که مجموعه ای از نیروهای هم صفحه که در حال تعادل نیستند، ممکن است به یک نیروی منفرد یا یک زوج تبدیل شود.

نیروهای ۳ ، ۳ ، ۴ نیوتون به ترتیب در امتداد اضلاع AB ، BC ، CA از یک مثلث متساوی الاضلاع ABC که طول ضلع آن $m/6$ است وارد می شوند. بزرگی و جهت برآیند آنها را تعیین کنید و فاصله قائم راستای آن را از C به دست آورید.

- در صفحه ABC در C نیرویی اضافی تولید می‌کنیم. اگر اکنون مجموعه معادل با یک زوج باشد، گشتاور و بزرگی و جهت این نیروی اضافی را تعیین کنید.
- ۲۷- نشان دهید که گشتاور یک زوج نسبت به همه نقاط صفحه‌اش یکسان است. ثابت کنید که یک نیروی F و یک زوج M که در یک صفحه وارد می‌شوند معادل با یک نیروی منفرد هستند.
- نیروهایی به بزرگی ۳، ۴، ۶، ۷ واحد در امتداد اضلاع AB ، BC ، CD ، DA از مربع $ABCD$ به ضلع a وارد می‌شوند. جهت‌های نیروها با ترتیب نوشتن حروف مشخص شده است. زوجی اضافی بر صفحه مربع وارد می‌شود. اگر تمام مجموعه معادل با نیرویی باشد که از مرکز مربع می‌گذرد، بزرگی و جهت این زوج را تعیین کنید. نیز بزرگی و راستای این نیرو را تعیین کنید.
- ۲۸- $ABCD$ مربعی است که تحت تأثیر نیروهای زیر است که در صفحه آن وارد می‌شوند: $N \sqrt{5}/2$ در C در امتداد AC ، $N \sqrt{5}/2$ در B در امتداد DB ، N در D و در امتداد خطی که با امتداد AD ، در طرفی که دور از BC است، زاویه 30° می‌سازد. نیروی P را در A قرار می‌دهند به طوری که مجموعه به یک زوج تبدیل شود. بزرگی و جهت P و گشتاور زوج را، اگر ضلع مربع برابر 1 m باشد، تعیین کنید.
- ۲۹- ثابت کنید که دو زوج هم‌صفحه با گشتاورهای مساوی و ناهمسو در حال تعادلند. نشان دهید که بر ایند چند زوج هم‌صفحه، زوجی است که گشتاور آن مجموع جبری گشتاورهاست. $ABCDE$ یک پنج‌ضلعی منتظم است. پنج نیرو هر یک مساوی با P در امتداد AE ، ED ، DC ، CB ، BA وارد می‌شوند. پنج نیرو هر یک مساوی با Q در امتدادهای AC ، CE ، EB ، BD ، DA وارد می‌شوند. ثابت کنید که اگر P و Q با یکدیگر نسبت معینی داشته باشند، این ده نیرو در حال تعادل خواهند بود. آن نسبت معین را تعیین کنید.
- ۳۰- نیرویی که بر نقطه (x, y) وارد می‌شود به موازات محورهای مختصات دارای مؤلفه‌هایی برابر (X, Y) است. ثابت کنید که این نیرو را می‌توان با نیروی X که در امتداد محور x ها وارد می‌شود، نیروی Y که در امتداد محور y ها وارد می‌شود و زوج $YX - XY$ جانشین کرد. نیروهایی به بزرگی ۱، ۵، ۹، ۱۱، ۷، ۳ در امتداد اضلاع AB ، BC ، CD ، DE ، EF ، FA از شش‌ضلعی منتظمی که طول ضلع آن a است وارد می‌شوند. جهت‌های نیروها با ترتیب نوشتن حروف مشخص می‌شود. OA و OH را به عنوان محورهای مختصات بگیرید. O مرکز شش-

ضلعی است و H نقطهٔ وسط BC است. نیروهایی را که در امتداد محورها وارد می‌شوند و زوجی را که دستگاه به آنها تبدیل می‌شود تعیین کنید. ثابت کنید که دستگاه معادل با نیروی منفردی است که محوره‌ای مختصات را در نقاط $(\frac{-9a}{4}, 0)$ و $(0, -\frac{9\sqrt{3}a}{2})$ قطع می‌کند.

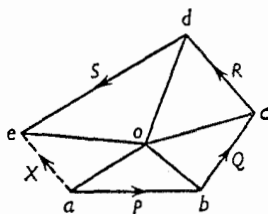
ترسیمات نموداری

۱۰۱۳. بزرگی و جهت چند نیروی همصفحه را می توان به روش چندضلعی نیروها از طریق نموداری تعیین کرد. وقتی که نیروها بريك نقطه وارد می شوند، برایندها نیز از آن نقطه می گذرد، بنابراین راستای آن معلوم می شود. وقتی که نیروها بريك جسم صلب وارد می شوند، بازهم می توانیم بزرگی و جهت برایندها را با ترسیم چندضلعی نیروها به دست آوریم، اما برای تعیین راستای برایندها به ترسیم بیشتری نیازمندیم.

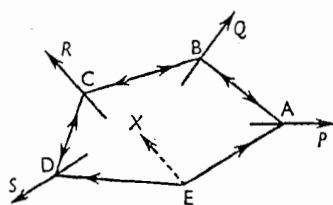
اکنون نشان خواهیم داد که چگونه این کار انجام می گیرد، و نیز نشان می دهیم که چگونه با استفاده از روش نموداری فشاری را تعیین می کنیم که به وسیله يك نیرو بر داربستی که از میله های سبك ساخته شده است وارد می شود.

۲۰۱۳. تعیین برایندها چند نیروی همصفحه به طریق نموداری

فرض می کنیم راستای نیروهای P, Q, R, S مطابق شکل ۱۰۱۳ الف باشد. شکل $abcde$ (شکل ۱۰۱۳ ب) را که در آن اضلاع ab, bc, cd, de به ترتیب موازی و متناسب با P, Q, R, S است رسم می کنیم. ae را نیز رسم می کنیم. در چندضلعی نیروها از نظر بزرگی و جهت معرف برایندها نیروهای P, Q, R و S است. ما این برایندها را به X نمایش می دهیم.



شکل ۱۳-ب



شکل ۱۳-الف

برای آنکه راستای برآیند را تعیین کنیم، نقطه‌ای مانند o اختیار می‌کنیم و آن را به a, b, c, d و e وصل می‌کنیم.

بر راستای P نقطه‌ای مانند A اختیار می‌کنیم (شکل ۱۳-الف) و AB و AE را به موازات oa و ob رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم AB راستای Q را در B قطع کند. P معادل است با نیروهایی که به وسیله ao و ob نمایش داده می‌شوند و به ترتیب در امتدادهای EA و BA وارد می‌شوند.

از B خط BC را به موازات oc رسم می‌کنیم تا R را در C قطع کند. Q معادل است با نیروهایی که به وسیله bo و oc نمایش داده می‌شوند و به ترتیب در امتدادهای AB و CB وارد می‌شوند. نیروی bo که در امتداد AB وارد می‌شود با نیروی ob که در امتداد BA وارد می‌شود تعادل دارد.

از C خط CD را به موازات od رسم می‌کنیم تا S را در D قطع کند. R معادل است با نیروهایی که به وسیله co و od نمایش داده می‌شوند و به ترتیب در امتدادهای BC و DC وارد می‌شوند. نیروی co که در امتداد BC وارد می‌شود با نیروی oc که در امتداد CB وارد می‌شود تعادل دارد.

از D خط DE را به موازات oe رسم می‌کنیم تا AE را در E قطع کند. S معادل است با نیروهای do و oe که به ترتیب در امتدادهای CD و ED وارد می‌شوند. نیروی do که در امتداد CD وارد می‌شود با نیروی od که در امتداد DC وارد می‌شود تعادل دارد.

پس نیروهای P, Q, R, S معادلند با نیروهای ao و oe که به ترتیب در امتدادهای EA و ED وارد می‌شوند و چون این دو خط در E متلاقی هستند، برآیند نیروهای بایستی از E بگذرد.

بنابراین برآیند نیروها نیرویی است مانند X که از E می‌گذرد و به موازات ae است و از نظر بزرگی و جهت با ae مشخص می‌شود.

بنابراین همان‌طور که بزرگی و جهت برآیند را به دست آوردیم راستای آن را تعیین

کردیم.

شکل $abcde$ را چندضلعی نیرو و شکل $ABCDE$ را چندضلعی رابط می‌نامند. اگر چندضلعی رابط از نخ ساخته شود، در صورتی که نیروهای P, Q, R, S بر A, B, C, D وارد شوند و نیرویی مساوی و در جهت مخالف برآیند این نیروها بر E وارد شود، نخ به حال تعادل و به شکل $ABCDE$ باقی خواهد ماند.

بدیهی است که اگر اوضاع مختلف برای A و O در نظر بگیریم، شکل چندضلعی رابط تغییر می‌کند، اما نقطه نهایی تلاقی AE و DE همیشه بر همان راستا، یعنی بر راستای برآیند، خواهد بود.

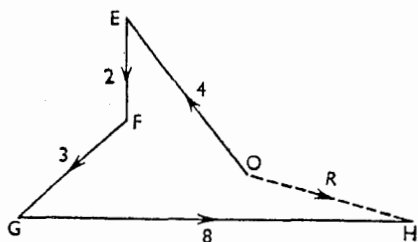
۳۰۱۳. اگر نقطه e از چندضلعی نیرو بر a منطبق شود، چندضلعی نیرو را بسته می‌نامند و برآیند نیروها در این حالت برابر صفر است.

اما صفر بودن برآیند نیروها دلیل بر آن نیست که نیروها در حال تعادلند.

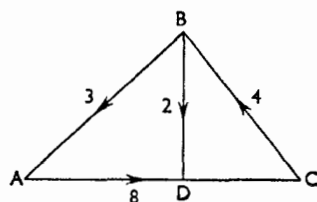
زیرا در این حالت oe و oa بر هم منطبق می‌شوند و AE, DE با هم موازی خواهند بود، و نیروهایی که در امتداد آنها وارد می‌شوند مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند. پس، جز در موردی که DEA خطی مستقیم است، یعنی چندضلعی رابط بسته است، برای ما یک زوج باقی خواهد ماند.

این بدان معنی است که اگر نیروها در حال تعادل باشند، هم چندضلعی نیرو و هم چندضلعی رابط باید بسته باشند.

۴۰۱۳. مثال: ABC مثلثی است که در آن طول اضلاع AB, BC, CA به ترتیب ۱۲، ۱۵، ۱۰ سانتیمتر است، و BD فاصله قائم B از ضلع CA است. بزرگی و راستای برآیند نیروهای زیر را به طریق نموداری تعیین کنید: ۸ واحد از A به C ، ۴ واحد از C به B ، ۳ واحد از B به A ، ۲ واحد از B به D .



شکل ۲-۱۳ ب



شکل ۲-۱۳ الف

حل : نیروها در شکل ۱۳-۲ الف نمایش داده شده‌اند. بزرگی و جهت برایندها را می‌توان با رسم چندضلعی نیرو، مطابق شکل ۱۳-۲ ب پیدا کرد. در این شکل بردارهای OE, EF, FG, GH به ترتیب معرف نیروهای ۴، ۲، ۳، ۸ واحد هستند. R براینده این نیروها با ضلع OH که چندضلعی را می‌بندد نشان داده می‌شود.

از روی اندازه‌گیری معلوم می‌شود، $R = ۳/۴$ و زاویه‌ای که با GH یعنی با AC می‌سازد تقریباً برابر ۱۳° است.

در این حالت برای تعیین راستای R لازم نیست که چندضلعی رابط را رسم کنیم. زیرا چون سه عدد از نیروها از B می‌گذرند، براینده آنها نیز از B می‌گذرد. بنابراین بزرگی و جهت برایندها با بردار OG مطابق شکل ۱۳-۲ ب مشخص می‌شود.

اما اگر از B خطی به موازات OG رسم کنیم تا امتداد CA را در نقطه‌ای مثلاً در X قطع کند، براینده چهار نیرو می‌بایستی از این نقطه بگذرد.

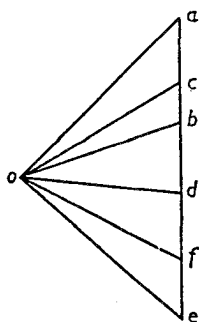
۵.۱۳. نشانه‌گذاری بوو^۱

ترسیمات نموداری که شامل نیروهای هم‌صفحه‌اند غالباً با استفاده از طریقه نشانه‌گذاری بوو ساده‌تر می‌شود. بر طبق این روش، ممکن است چنین تصور شود که راستاهای نیروها صفحه‌ای را که نیروها در آن اعمال می‌شوند به مناطقی تقسیم کرده است. این مناطق را مثلاً با حروف $A, B, C, D, \dots$ نمایش می‌دهند و نیرویی را که در امتداد خطی که منطقه B را از منطقه C جدا می‌کند با bc نمایش می‌دهند. به همین طریق برای بقیه نشانه‌گذاری می‌کنند.

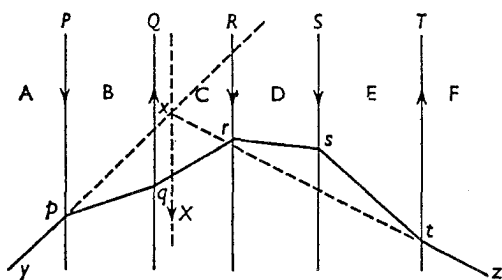
این روش به ویژه در مواردی که با داربستها سروکار داریم بسیار مناسب است، به طوری که آن را بعداً در بند ۱۳-۱۵ مطرح خواهیم کرد.

۶.۱۳. براینده چند نیروی متوازی

حالتی که در آن، نیروها متوازی هستند عملاً حالت بسیار مهمی است. روش تعیین براینده کاملاً شبیه آن است که در بند ۱۳-۲ بیان کردیم، اما در این حالت چندضلعی نیرو به صورت خطی مستقیم است.



شکل ۳-۱۳ ب



شکل ۳-۱۳ الف

فرض می‌کنیم نیروهای مفروض P, Q, R, S, T باشند و راستاهای آنها مطابق شکل ۳-۱۳ الف باشد.

مناطق را با حروف A, B, C, D, E, F مطابق شکل نشان می‌دهیم، و برخطی موازی با جهت نیروها ab را به طرف پایین نشانه می‌کنیم. اندازه آن را برطبق مقیاس معین برابر P می‌گیریم (شکل ۳-۱۳ ب). bc را به طرف بالا و معرف Q می‌گیریم. cd ، de و ef را به ترتیب معرف R, S, T می‌گیریم. در این صورت af از نظر بزرگی و جهت معرف برآیند است و راستای آن را می‌توان به طریقه زیر تعیین کرد:

نقطه‌ای دلخواه مانند o در نظر می‌گیریم و oa, ob, oc, od, oe و of را رسم می‌کنیم.

بر راستای P نقطه‌ای مانند p اختیار می‌کنیم و py و pq را به موازات ao و ob رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم pq راستای Q را در q قطع کند.

P معادل است با نیروهای ao, ob که در امتدادهای py و pq وارد می‌شوند.

از q خط qr را به موازات oc رسم می‌کنیم تا R را در r قطع کند.

Q معادل است با نیروهای bo, oc که در امتدادهای qp, qr وارد می‌شوند که نیروی

اول با نیروی ob که در امتداد pq وارد می‌شود تعادل دارد.

از r خط rs را به موازات od رسم می‌کنیم تا S را در s قطع کند.

R معادل است با نیروهای co, od که در امتدادهای rq, rs وارد می‌شوند که نیروی

اول با نیروی oc که در امتداد qr وارد می‌شود تعادل دارد.

از s خط st را به موازات oe رسم می‌کنیم تا T را در t قطع کند.

S معادل است با نیروهای do, oe که در امتدادهای sr, st وارد می‌شوند که نیروی

اول با نیروی od که در امتداد rs وارد می شود تعادل دارد.

از خط tz را به موازات of رسم می کنیم.

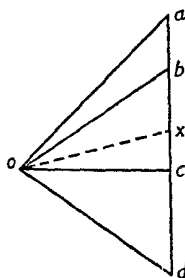
T معادل است با نیروهای eo ، of که در امتدادهای ts ، tz وارد می شود که نیروی اول با نیروی oe که در امتداد st وارد می شود تعادل دارد.

بنابراین برای ما نیروی ao در امتداد py و نیرویی در امتداد tz باقی مانده است. yp را امتداد می دهیم تا zt را در x قطع کند. در این صورت برآیند نیروهای بایستی از x بگذرد.

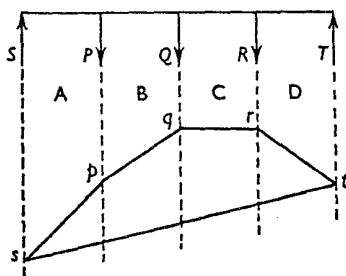
برآیند از نظر بزرگی و جهت نیروی X است که با af نشان داده می شود و از x می گذرد.

به خاطر بیاورید که این روش درباره دو نیرو که معادل با یک نیرو هستند، قبلاً در بند ۱۱-۲ به کار برده شد. در واقع چندضلعی $HABK$ (شکل ۱۱-۱) ممکن بود به عنوان چندضلعی رابط برای دو نیروی P و Q در نظر گرفته شود.

مثال ۱: میله سنگینی که به نقاط معلومی از آن وزنه های معلومی آویخته شده است بردو انتهای خود تکیه کرده است. عکس العملهایی را که بر تکیه گاهها وارد می شود تعیین کنید.



شکل ۱۳-۴ ب



شکل ۱۳-۴ الف

حل : فرض می کنیم وزنه های P, Q, R ، مطابق شکل ۱۳-۴ الف وارد شوند و فرض می کنیم عکس العملهای تکیه گاهها S و T باشد.

مناطق را با حروف A, B, C, D مطابق شکل نشان می دهیم و چند ضلعی نیروی $abcd$ را (شکل ۱۳-۴ ب) رسم می کنیم. نقطه ای مانند O اختیار می کنیم و oa, ob, oc, od را وصل می کنیم.

بر راستای P نقطه ای مانند p اختیار می کنیم و ps را به موازات oa رسم

می‌کنیم تا S را در s قطع کند؛ pq را به موازات ob رسم می‌کنیم تا Q را در q قطع کند.

از q خط qr را به موازات oc رسم می‌کنیم تا R را در r قطع کند و از r خط rt را به موازات od رسم می‌کنیم تا T را در t قطع کند.

نیروهای P, Q, R ، معادلند با نیروهای ao و od در امتدادهای ps و rt . st را وصل می‌کنیم و ox را به موازات st می‌کشیم تا ad را در x قطع کند.

نیروی ao که در امتداد ps وارد می‌شود معادل است با نیرویی که به وسیله ax مشخص می‌شود و به طرف پایین در امتداد راستای S وارد می‌شود، و نیروی xo که در امتداد ts وارد می‌شود.

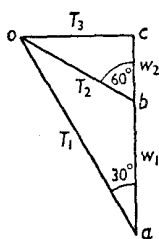
نیروی od که در امتداد rt وارد می‌شود معادل است با xd که به طرف پایین در امتداد راستای T وارد می‌شود، و نیروی ox که در امتداد st وارد می‌شود. نیروی اخیر با نیروی xo که در امتداد ts وارد می‌شود تعادل دارد، و بنابراین برای مانیروهای قائمی باقی می‌مانند که به وسیله ax و xd نمایش داده می‌شوند و در راستاهای S و T وارد می‌شوند.

عکس‌العملهایی که بر میله در دو انتها وارد می‌شوند باید مساوی و در خلاف جهت این نیروها باشند و بنابراین مساوی و مخالف ax و xd هستند.

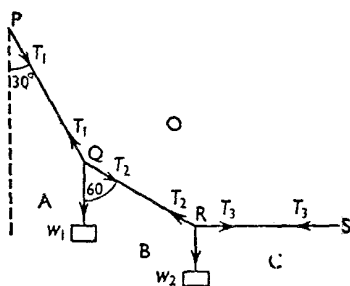
مثال ۲: PQRS نخ سیکی است که به دو نقطه ثابت P و S متصل شده است و وزنه‌های Q و R را نگاه می‌دارد. اگر PQ نسبت به قائم به اندازه 30° منحرف باشد، QR نسبت به قائم 60° منحرف باشد و RS افقی باشد، نسبت این دو وزنه را به دست آورید.

حل: شکل نخ PQRS مطابق شکل ۱۳-۵ الف است. این شکل در واقع چندضلعی رابط برای نیروهای متوازی W_1 و W_2 است که به ترتیب در Q و R وارد می‌شوند.

از روی این چندضلعی رابط می‌توانیم چندضلعی نیرو را رسم کنیم. برای این منظور در شکل ۱۳-۵ ب فرض می‌کنیم ba نشان‌دهنده وزن W_1 باشد. از a و b به ترتیب خطوطی به موازات نخهای QP و QR رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم که این خطوط در o با یکدیگر تلاقی کنند. در این صورت این مثلث



شکل ۱۳-۵ ب



شکل ۱۳-۵ الف

abo مثلث نیروها برای نیروهای W_1 ، T_1 و T_2 است که بر Q وارد می‌شوند.

اکنون اگر oc را به موازات نخ RS ، یعنی افقی، رسم کنیم، در این صورت مثلث bco مثلث نیروهای W_2 ، T_2 و T_3 است که بر R وارد می‌شوند.

بنابراین cb معرف W_2 و با همان مقیاسی است که ba معرف W_1 است، و بنابراین $W_1/W_2 = ab/bc$.

$$ac = oc \operatorname{tg} 60^\circ = oc\sqrt{3} \quad \text{اما}$$

$$bc = oc \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{oc}{\sqrt{3}} \quad \text{و}$$

$$\therefore ac = 3bc$$

$$\therefore W_1 + W_2 = 3W_2 \Rightarrow W_1 = 2W_2$$

این نتیجه را می‌توان با تجزیه نیروهایی که در Q و R وارد می‌شوند، در امتدادهای افقی وقائم به ترتیب زیر به دست آورد:

$$T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = W_1 \quad \text{برای } Q:$$

$$T_1 \sin 30^\circ - T_2 \sin 60^\circ = 0 \quad \text{و}$$

$$T_2 \cos 60^\circ = W_2 \quad \text{نیز برای } R,$$

$$T_2 \sin 60^\circ - T_1 = 0 \quad \text{و}$$

که منجر به این نتیجه می‌شود: $W_1 = 2W_2$

مثال ۳: نیروهای ۵، ۹، ۷، ۳ و ۱۰ — نیوتون در امتداد خطوط راست متوازی وارد می‌شوند و فاصله آنها از یکدیگر به ترتیب ۱۰، ۵، ۷، ۳ سانتیمتر است.

با روش برداری و با روش چندضلعی رابط بزرگی و جهت زوج را حساب کنید.

حل : نمودار منطقه‌ای را مطابق شکل ۱۳-۶ الف رسم می‌کنیم و همان‌طور که مشاهده می‌شود آن را نشانه‌گذاری می‌کنیم.

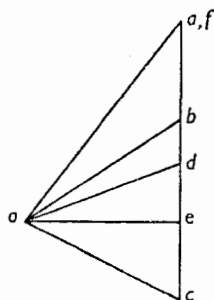
چندضلعی نیرو را مطابق شکل ۱۳-۶ ب رسم می‌کنیم. در این شکل $ab=5$ ، $bc=9$ ، $cd=7$ ، $de=3$ و ef یا ea مساوی ۱۰ است، و چند ضلعی بسته است.

چندضلعی نیرو را با رسم خطوطی به موازات oa ، ob ، oc ، od ، oe ، of به ترتیب در مناطق A، B، C، D، E، F رسم می‌کنیم.

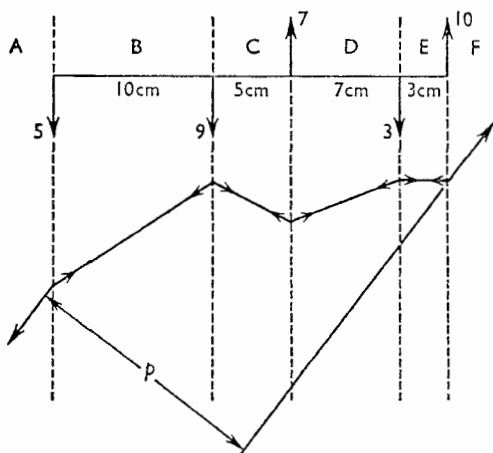
هریک از نیروهای متوازی را می‌توان به دو مؤلفه تجزیه کرد که مطابق شکل ۱۳-۶ الف، در امتداد اضلاع چندضلعی نیرو وارد می‌شوند. این مؤلفه‌ها جفت جفت با یکدیگر معادلند، جز نیروی اولی و نیروی آخری، که متساوی و متوازی و در خلاف جهت یکدیگرند و بنابراین تشکیل یک زوج می‌دهند.

بزرگی این نیروها که به وسیله oa در نمودار نیرو نمایش داده می‌شود و فاصله آنها که از یکدیگر مثلاً برابر p است، از نمودار منطقه‌ای (شکل ۱۳-۶ الف) به دست می‌آیند.

بنابراین گشتاور زوج به وسیله $oa \times p$ مشخص می‌شود و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.



شکل ۱۳-۶ ب



شکل ۱۳-۶ الف

از روی شکلها نتیجه می شود $oa = ۱۲/۷ \text{ N}$ ، $p = ۱۵/۷ \text{ cm}$. پس
گشتاور زوج برابر است با $۱۲/۷ \times ۱۵/۷ = ۱۹۹ \text{ N cm}$
این مقدار را می توان با تعیین گشتاورهای همه نیروها نسبت به يك نقطه،
مثلاً نقطه ای واقع بر راستای نیروی ۵، تعیین کرد. چنین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & -۹ \times ۱۰ + ۷ \times ۱۵ - ۳ \times ۲۲ + ۱۰ \times ۲۵ \\ & = -۹۰ + ۱۰۵ - ۶۶ + ۲۵۰ \\ & = ۱۹۹ \text{ N cm} \end{aligned}$$

تمرین ۱۰۱۳

- ۱ - سه نیروی متوازی همسوی ۳، ۵ و ۴ نیوتون مفروضند. فاصله آنها از یکدیگر برابر يك متر است. وضع براینده این نیروها را با ترسیم نموداری نشان دهید.
- ۲ - میله ای به طول ۹ m بردو انتهای خود تکیه کرده است. تکیه گاهها همتراز هستند. بارهای ۵، ۳، ۹ و ۲ مگاگرم در فاصله های ۲/۴، ۳/۶، ۵/۱، و ۷/۵ متر از انتهای چپ میله بر روی این میله قرار دارند. به طریقه نموداری با چند ضلعیهای رابط و برداری عکس العملهای تکیه گاهها را به دست آورید. نیز عکس العملها را حساب کنید.
- ۳ - وضع براینده چهار نیروی متوازی را که بزرگی آنها ۷، ۴، ۵، و ۲ نیوتون است و فاصله های میان آنها به ترتیب ۱، ۵/۵ و ۱/۲ متر است، به طریقه نموداری تعیین کنید.
- ۴ - وزنه هایی به جرم ۲، ۳، ۵ کیلوگرم بر تیری که طول آن ۳ m است در فاصله های ۵/۳، ۹/۵ و ۱/۵ متر از يك انتها قرار دارند. راستای براینده را به طریقه نموداری تعیین کنید.
- ۵ - تیری افقی به طول ۲۰ m بردو انتهای خود تکیه کرده است و وزنه های ۲، ۳، ۶ و ۴ کیلوگرمی به ترتیب در فاصله های ۳، ۶، ۱۲ و ۱۵ متر از يك انتهای آن قرار دارند. عکس العملهای تکیه گاهها را به طریقه نموداری تعیین کنید.
- ۶ - وزنه های ۸، ۳، ۲ و ۶ کیلوگرمی از فاصله های ۲، ۳، ۶ و ۸ متری از يك انتهای میله ای سبك به طول ۱۰ m، که بردو انتهای خود تکیه کرده است، آویزان شده اند. عکس العملهای تکیه گاهها را به طریقه نموداری تعیین کنید.
- ۷ - نیروهای متوازی و همسوی ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ نیوتون به فاصله يك متری از یکدیگر وارد می شوند. وضع راستای براینده آنها را به طریقه نموداری تعیین کنید.

۸ - برچرخهای يك لوکوموتیو بارهایی که وارد می‌شوند به ترتیب ۱۵، ۱۵، ۱۸، ۱۶ و ۸ مگاگرم است و فاصله آنها به ترتیب ۱/۲، ۳، ۲/۴، ۱/۸، و ۱/۲ متر است. بزرگی و وضع برایند عکس‌العملهایی را که از طرف ریلها وارد می‌شود تعیین کنید و درستی نتیجه را با محاسبه تحقیق کنید.

۹ - تیری افقی به طول m ۱۰ و وزنه‌هایی به جرم ۴، ۵، ۶ و ۷ کیلوگرم را که به ترتیب در فاصله‌های ۲، ۵، ۷ و ۹ متری از يك انتهای آن وارد می‌شود حمل می‌کند. ترسیمات نموداری را در موارد زیر تهیه کنید: (الف) برای برایند وزنه‌ها؛ (ب) برای عکس‌العملهای تکیه‌گاهها، هنگامی که تیر از دوانتها بردو پایه قراردارد، از وزن خود تیر صرف نظر کنید.

۱۰ - فاصله‌های میان بارهایی که بر اکسلهای يك لوکوموتیو وارد می‌شوند به شرح زیر است، که به ترتیب از جلو به عقب است.

فاصله‌ها	۲/۷	۳	۲/۴	۳	متر
بارها	۱۲	۱۲	۲۵	۲۵	۵ واحد

با ترسیم نموداری، فاصله مرکز ثقل لوکوموتیو را از اکسل جلویی پیدا کنید.

۱۱ - تیر یکنواخت AB به جرم kg ۵۰ و طول m ۶ در نقطه A و نقطه‌ای که در ۱/۲ متری B است تکیه دارد. در ۱/۵ متری و ۲/۴ متری از A وزنه‌هایی به جرم kg ۳۰ و در B وزنه‌ای به جرم kg ۴۰ حمل می‌کند. به طریقه برداری نیروهای را که بر تکیه‌گاهها فشار می‌آورند تعیین کنید.

۱۲ - نخ سبکی به نقطه ثابت A بسته شده است و از روی قرقره صیقلی D که هم‌تراز با A است می‌گذرد و به انتهای آن وزنه‌ای برابر W بسته شده است. اگر به نقطه‌های B و C از نخ میان A و D به ترتیب وزنه‌های W_1 و W_2 بسته شود، نشان دهید که چگونه می‌توان از روی جهت‌های قسمتهای AB، BC و CD از نخ که در حال تعادل است، W_1 و W_2 را پیدا کرد.

۱۳ - ABCD نخي سبك است. دوانتهای A و D از این نخ به نقطه‌های ثابتی که بر يك خط افقی هستند بسته شده است. وزنه‌هایی به جرم kg ۲/۵ و P به B و C متصل شده‌اند. به طریقه نموداری وزن P و کششهای قسمتهای AB، BC، CD را تعیین کنید، در صورتی که می‌دانیم AB و CD با افق به ترتیب زاویه‌های 60° و 45° می‌سازند و زاویه BCD برابر 140° است.

۱۴ - نیروهای ۱، ۳، ۴ - نیوتون به ترتیب بر گرد اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع

ABC که طول ضلع آن ۵ cm است وارد می‌شوند. این مثلث از یک تیغه صلب بریده شده است. برای تعیین بزرگی، جهت و وضع برآیند این نیروها، ترسیمی نموداری ارائه دهید.

۱۵- نیروهای ۳ N، ۲ N، ۳/۵ N — به ترتیب برگرد سه ضلع متوالی یک شش ضلعی منتظم که طول ضلع آن ۵ cm است و از یک تیغه صلب بریده شده است وارد می‌شوند. برای تعیین بزرگی، جهت و وضع برآیند این نیروها، ترسیمی نموداری ارائه دهید.

۷۰۱۳. داربستها

در بسیاری از حالتها که در آنها از روش نموداری استفاده می‌شود، نیروها در حال تعادلند. نیروها بیشتر اوقات بر نوعی داربست وارد می‌شوند، و مسئله عبارت از پیدا کردن نیروهایی است که بر قسمت‌های مختلف یا «قطعه‌های» این داربست فشار می‌آورند. روشهای تغییر ترسیمات که در بندهای قبلی به این منظور بیان شدند در مثالهای زیر تشریح می‌شوند. با در نظر گرفتن تعادل یک میله سبک آشکار است که، اگر تنها نیروهایی که بر میله اثر می‌کنند همانهایی هستند که بردوسر میله وارد شوند، این نیروها می‌بایستی در امتداد میله باشند، در غیر این صورت نمی‌توانند با یکدیگر تعادل داشته باشند. البته باید مساوی و ناهمسو نیز باشند. بنابراین میله‌ای سبک، که فقط تحت تأثیر نیروهایی است که بردوسر آن وارد می‌شوند، در امتداد طول خود یا فشرده می‌شود یا کشیده می‌شود. میله‌ای را که تحت فشار قرار دارد ستون و میله‌ای را که تحت کشش قرار دارد قید می‌نامند.

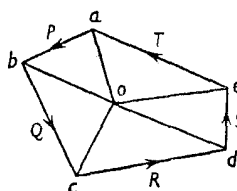
۸۰۱۳. چند ضلعی بسته‌ای که از چند میله سبک تشکیل شده است و انتهای میله‌ها آزادانه به یکدیگر مفصل شده‌اند، تحت اثر مجموعه معلومی از نیروهایی که بر مفصلها وارد می‌شود به حال تعادل است. می‌خواهیم نیروهایی را تعیین کنیم که میله‌ها تحت فشار آن نیروها قرار گرفته‌اند.

فرض می‌کنیم میله‌های مفروض عبارت از AB، BC، CD، DE، EA باشند، که آزادانه از انتهای خود به یکدیگر مفصل شده‌اند. و فرض می‌کنیم نیروهای P ، Q ، R ، S و T بر مفصلها مطابق شکل ۷-۱۳ الف وارد شوند.

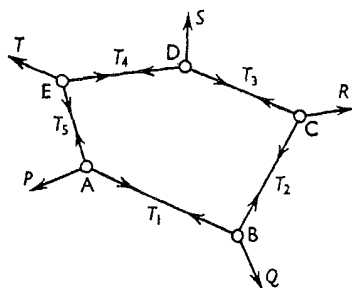
فرض می‌کنیم نیروهایی که در نتیجه بر مفصلها در امتداد میله‌ها وارد می‌شوند به ترتیب T_1 ، T_2 ، T_3 ، T_4 ، T_5 باشند. نیروهایی که بر میله‌ها وارد می‌شوند مساوی و مخالف این نیروها هستند.

چند ضلعی نیرو، $abcde$ ، را رسم می‌کنیم (شکل ۷-۱۳ ب). اضلاع این چند

ضلعی به ترتیب متوازی و متناسب با P, Q, R, S و T است. چون نیروها در حال تعادل هستند، این چندضلعی می بایستی بسته باشد. از خط ao رابه موازات AE رسم می کنیم،



شکل ۷-۱۳ ب



شکل ۷-۱۳ الف

و از b خط bo را به موازات AB رسم می کنیم. اضلاع مثلث boa موازی با نیروهای P, T_1 و T_5 است که این نیروها بر مفصل A وارد می شوند. بنابراین اضلاع مثلث متناسب با این نیروها است، و اضلاع bo و oa می بایستی معرف T_1 و T_5 باشند که با همان مقیاس که ab نشان دهنده P است معین می شوند.

oc, od و oe را وصل می کنیم.

اضلاع ob, bc از مثلث obc نشان دهنده دویروی T_1 و Q است که بر B وارد می شوند پس co نشان دهنده نیروی سوم است که بر B وارد می شود، یعنی معرف نیروی T_2 است، و بنابراین می بایستی موازی با BC باشد.

به همین طریق معلوم می شود که do نشان دهنده T_3 و eo نشان دهنده T_4 است.

بنابراین خطوط oa, ob, oc, od, oe از نظر بزرگی و جهت نشان دهنده نیروهایی هستند که بر اضلاع این داربست وارد می شوند.

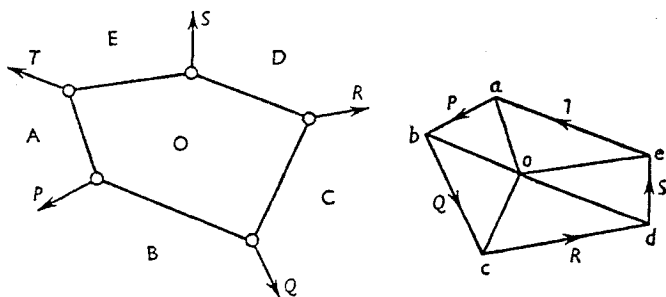
۹.۱۳. بدیهی است که در شکلهای بند قبلی، $abcde$ چندضلعی نیرو و $ABCDE$ چند ضلعی رابط برای مجموعه نیروهای P, Q, R, S, T است.

نیز اگر $abcde$ معرف یک داربست مفصل دار باشد که بر آن نیروهای oa, ob, oc, od, oe وارد می شوند، در این صورت $ABCDE$ معرف چندضلعی نیرو برای این مجموعه نیروهاست و $abcde$ معرف چندضلعی رابط است.

پس یکی از این چندضلعیها ممکن است داربست یا چندضلعی رابط، و در این صورت چندضلعی دیگر، عبارت از چندضلعی نیروی مربوطه است. به این دلیل چنین شکلهایی را دو جانبه گویند.

۱۰۰۱۳. نشانه‌گذاری بود

همان‌طور که در بند ۵.۱۳ توضیح دادیم روش دیگری برای حرف‌گذاری شکلها وجود دارد که ممکن است از آن استفاده کرد. این روش به نشانه‌گذاری بود موسوم است. داربست بند ۸.۱۳ را در نظر بگیرید.



شکل ۸-۱۳

داربست را رسم می‌کنیم و نیروها را مطابق شکل ۸-۱۳ مشخص می‌کنیم، و به‌جای آنکه رئوس داربست را حرف‌گذاری کنیم، فضاها یا منطقه‌های میان نیروها و میله‌ها را حرف‌گذاری می‌کنیم، مثلاً فضای میان T و P را A می‌نامیم و میان P و Q را B می‌نامیم و میان Q و R را C می‌نامیم و همین‌طور بقیه را.

راستای P میان فضاهای A و B محدود است، و در چندضلعی نیرو، خطی که معرف P است ab نامیده می‌شود و خطی که معرف Q است bc نامیده می‌شود و همین‌طورالی آخر. بنابراین چندضلعی نیرو عبارت است از $abcde$.

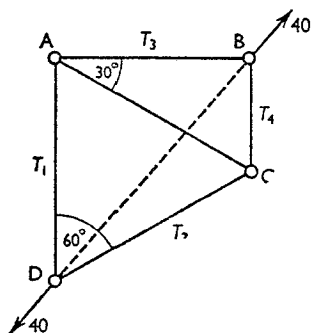
اگر قطب چندضلعی نیرو را o بنامیم، فضای داخل چندضلعی رابط را باید O نامید. هر حرف کوچک که به رأس چندضلعی نیرو مربوط است، متعلق به حرف بزرگی است که فضایی از چندضلعی رابط را مشخص می‌کند.

مثال ۱: $ABCD$ یک چهارضلعی است که از چهار میله سبک تشکیل شده است و میله‌ها، در انتها، آزادانه به یکدیگر مفصل شده‌اند. زاویه‌های A و B قائمه‌اند، زاویه ADC برابر 60° است و $AD = CD$. این چهارضلعی به کمک میله AC محکم شده است. در B و D نیروهایی برابر 40 N طوری وارد می‌شوند که داربست به‌حال تعادل است. نیروهایی را پیدا کنید که میله را می‌کشند یا می‌فشارند.

حل: چون $AD = DC$ و $\angle ADC = 60^\circ$ است، مثلث ADC متساوی‌الاضلاع است

و $\angle CAB = 30^\circ$.

AB را مطابق شکل ۹-۱۳ رسم می‌کنیم، و AC را به‌طوری‌رسم می‌کنیم که $\angle BAC = 30^\circ$ باشد و عمودی را که از B بر AB رسم شده است در C قطع کند. سپس مثلث ACD را بر روی AC می‌سازیم. چون دو نیروی ۴۰ N با یکدیگر متعادلند، می‌بایستی بریک راستا، یعنی در امتداد BD، و درجهت‌های مختلف وارد شده باشند، فرض می‌کنیم که این دو نیرو به‌طرف خارج وارد می‌شوند.



شکل ۹-۱۳

دوش الف. برای رأس D، مثلث نیروها را رسم می‌کنیم، و کشش‌هایی را که در AD و DC هست، و با T_1 و T_2 نمایش می‌دهیم، به دست می‌آوریم ($T_1 = 15/1$ ، $T_2 = 30/2$).

برای رأس B، مثلث نیروها را رسم می‌کنیم، و کشش‌هایی را که در AB و BC هست، و با T_3 و T_4 نمایش می‌دهیم، به دست می‌آوریم ($T_3 = 26/2$ ، $T_4 = 30/2$). نیرویی که بر AC فشار وارد می‌آورد با رسم مثلث نیروها برای A یا C به دست می‌آید (این نیرو برابر $30/2$ است).

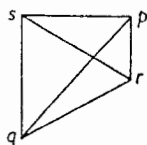
مثالهای نیروها را برای هر مفصل می‌توان در یک نمودار، مطابق شرح زیر، در کنار یکدیگر قرارداد.

دوش ب. با استفاده از نشانه‌گذاری بوو، منطقه‌های نمودار را مطابق شکل ۱۰-۱۳ الف با حروف P، Q، R، S نمایش می‌دهیم.

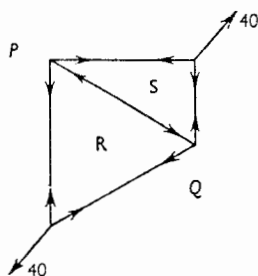
برای رسم چندضلعی نیرو، از یکی از رئوس، که یکی از نیروهای خارجی شناخته شده بر آن رأس وارد می‌شود، مثلاً B، شروع می‌کنیم و p q را برای

نشان دادن بزرگی و جهت نیروی 40 N رسم می‌کنیم. سپس ps را به موازات میله (AB) میان مناطق P و S رسم می‌کنیم، نیز qs را به موازات میله (BC) میان مناطق Q و S رسم می‌کنیم. در این صورت psq مثلث نیروها برای نیروهایی است که بر مفصل B وارد می‌شوند، و چون نیروی 40 N در جهت q به p است، جهت نیروهای دیگر که بر B وارد می‌شوند باید مطابق جهتایی باشد که در شکل ۱۰-۱۳ الف نمایش داده‌ایم.

برای مفصل A ، خط pr را به موازات میله (AD) میان مناطق P و R رسم می‌کنیم، و sr را به موازات میله (AC) میان مناطق S و R رسم می‌کنیم. در این صورت prs مثلث نیروها برای نیروهایی است که بر مفصل A وارد می‌شوند، و چون جهت نیروی ps معلوم است، جهت نیروهای دیگر را می‌توان پیدا کرد و آنها مطابق جهتایی هستند که در شکل ۱۰-۱۳ الف نمایش داده‌ایم. اکنون اگر qr را وصل کنیم، مثلث pqr مثلث نیروها برای نیروهایی است که بر مفصل D وارد می‌شوند، و جهت‌های نیروها مطابق شکل ۱۰-۱۳ الف هستند.



شکل ۱۰-۱۳ ب



شکل ۱۰-۱۳ الف

نیروهایی که بر مفصل C وارد می‌شوند به وسیله مثلث rqs مشخص می‌شوند و جهت‌های این نیروها همانهایی است که نشان داده شده است. آشکار است که این مثلث متساوی‌الاضلاع است، و بنابراین سه نیرویی که بر مفصل C وارد می‌شوند متساوی هستند.

بزرگی‌های همه نیروها را می‌توان با اندازه‌گیری اضلاع شکل $pqrs$ و با استفاده از مقیاس pq که معرف 40 N است به دست آورد.

نیروهایی که بر میله‌ها وارد می‌شوند مساوی و در خلاف جهت نیروهایی هستند که بر لولاهای انتهای میله‌ها وارد می‌شوند. در نتیجه (با تغییر جهتایی که

در شکل ۱۳-۱۵ الف نشان داده شده است) میله‌های AB ، BC ، CD ، DA در حال کشش هستند و میله AC تحت فشار است.

مثال ۲: ABC داریستی است به شکل مثلث که از میله‌های سبکی تشکیل شده است که به یکدیگر مفصل شده‌اند. این داریست بر A و B تکیه دارد، به طوری که AB افقی است و C بالای AB است و صفحه مثلث ABC قائم است.

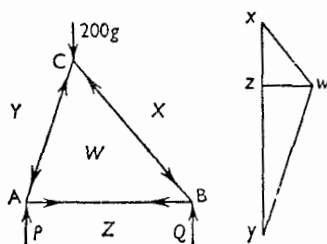
$$AB = 6 \text{ m}, CA = 5/4 \text{ m}, BC = 6/6 \text{ m}$$

وزنه‌ای به جرم 200 kg از C آویزان است. با روش‌های نموداری نیروهایی را پیدا کنید که این میله‌ها را می‌کشند یا می‌فشارند.

حل : داریست را با مقیاس معین مطابق شکل ۱۳-۱۱ رسم می‌کنیم و در آن راستاهای نیروهای خارجی را در بیرون از داریست نشان می‌دهیم. نیروهای خارجی عبارتند از نیروی 200 g N ، عکس‌العمل‌های قائم P و Q در نقطه‌های A و B . عکس‌العمل‌های قائم P و Q را ممکن است به روش نموداری مطابق بند ۱۳-۶ پیدا کنیم.

اما در این حالت ساده لازم نیست که P و Q را در آغاز پیدا کنیم: این نیروها را می‌توان مطابق شرح زیر از روی مثلث نیروها برای هر مفصل به دست آورد.

فضاهایی را که با راستاهای نیروهای خارجی و میله‌های داریست تشکیل می‌شود، همان‌طور که نشان داده شده است به X ، Y ، Z ، W نمایش می‌دهیم. فضای Y از سمت چپ تا بینهایت کشیده شده است و به کمک نیروی 200 g N ، میله AC ، و نیروی P از فضاهای دیگر جدا شده است. فضای X نیز از سمت راست تا بینهایت کشیده شده است.



شکل ۱۳-۱۱

از مفصل C شروع می‌کنیم. این مفصل تحت تأثیر نیروی 200 g N و نیروهایی است که در امتدادهای AC و CB فشار می‌آورد. اکنون xy را به‌طور قائم به سوی پایین رسم می‌کنیم تا نیروی 200 g N را نشان دهد. با رسم yw به موازات AC و xw به موازات CB مثلث نیروها را برای C کامل می‌کنیم. چون نیروی 200 g N که با xy نشان داده شده است به‌طور قائم به طرف پایین است، جهت‌های نیروهایی که بر مفصل C وارد می‌شوند مطابق شکل خواهند بود.

اکنون مفصل B را در نظر می‌گیریم و با رسم wz به موازات BA، مثلث نیروها را که xwz است کامل می‌کنیم. در این صورت zx می‌بایستی نشان‌دهندهٔ عکس‌العمل Q و wz نشان‌دهندهٔ نیرویی باشد که در امتداد AB فشار می‌آورد. به همین طریق، yzw مثلث نیروها برای مفصل A است و yz نشان‌دهندهٔ عکس‌العمل P است. چون نیروی P که با yz نشان داده می‌شود روبه‌سوی بالاست، جهت‌های نیروهایی را که بر مفصل A وارد می‌شوند می‌توان یافت. چون جهت‌های نیروهایی که بر مفصلها وارد می‌شوند به همان صورتند که در شکل نشان داده شده‌اند، میلهٔ AB تحت تأثیر نیروی کشش است و میله‌های BC و CA تحت تأثیر نیروهای فشار دهنده‌اند.

نیروهای کششی و فشاری را می‌توان، همان‌طور که نشان داده شده‌اند، با پیکان نمایش داد و می‌توان علامت $-$ برای نیروی کششی و علامت $+$ برای نیروی فشاری به کار برد. گاهی آنها را با قراردادن یک یا دو خط تیره بر روی میله تشخیص می‌دهند. دقت بسیار باید کرد و به یاد داشت که، برای به دست آوردن جهت‌های نیروها از روی مثلث نیروها، باید برگرد مثلث به ترتیب حرکت کرد. مثلاً در مورد A، چون yz نشان‌دهندهٔ P است، zw نشان‌دهندهٔ نیرویی است که بر مفصل A در امتداد AB، یعنی از A به سمت راست، وارد می‌شود. برای یافتن ماهیت نیروهایی که بر میله فشار می‌آورند پیکانها را ممکن است وارونه کرد.

مثال ۳: داربستی با هفت میله به شکل سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، BCD، CDE ساخته شده است. در A و E بر تکیه گاه‌های قائم صیقلی قرار دارد، به طوری که BD و ACE افقی هستند و BD بالای ACE است، و در B وزنهٔ ۵ واحدی و در C وزنهٔ ۵ واحدی و در D وزنهٔ ۱۰ واحدی را تحمل می‌کند. با صرف نظر کردن از وزن میله‌ها، عکس‌العملها را در A و E به دست آورید. با رسم نمودار

نیروهایی را که بر هر میله فشار می آورد تعیین کنید و نشان دهید که کدام میله تحت تأثیر فشار است و کدام میله تحت تأثیر کشش.

حل : داربست را رسم می کنیم و نیروهای خارجی را مطابق شکل ۱۲-۱۳ نشان می دهیم.

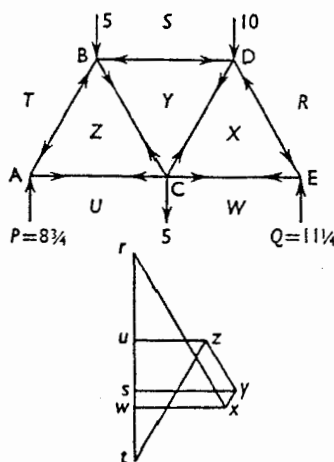
عکس عملهای P و Q را، که در A و E بردار بست وارد می شود، می توان از راه نمودار پیدا کرد، اما در این حالت ساده تر آن است که آنها را از راه گرفتن گشتاور به دست آوریم.

با گرفتن گشتاور حول A خواهیم داشت

$$4Q = 5 \times 1 + 5 \times 2 + 10 \times 3 = 45$$

$$\therefore Q = 11\frac{1}{4} \text{ و } P = 8\frac{3}{4}$$

اکنون فضاها را مطابق شکل ۱۲-۱۳ نشانه گذاری می کنیم (همه نیروهای خارجی را در بیرون از داربست رسم می کنیم)، و چند ضلعی نیرو را به شرح زیر رسم می کنیم.



شکل ۱۲-۱۳

بر راستایی قائم با مقیاس ۵ واحد = ۲ سانتیمتر، rs را برابر ۱۰ و st را

برابر ۵ اختیار می کنیم و سپس tu را برابر $8\frac{3}{4}$ به سوی بالا برای نمایش P اختیار

می کنیم. اکنون uw را برابر ۵ و برای نشان دادن وزن ۵ واحدی در C اختیار

می‌کنیم. wr نشان‌دهنده Q یعنی عکس‌العمل در E است.

با رسم uz به موازات AC و tz به موازات AB مثلث نیروها را برای نیروهایی که بر مفصل A وارد می‌شوند رسم می‌کنیم. uz نشان‌دهنده نیرویی است که در امتداد AC فشار می‌آورد و zt نشان‌دهنده نیرویی است که در امتداد AB فشار می‌آورد. جهت‌های نیروهایی که بر مفصل A وارد می‌شوند مطابق آنهایی هستند که در شکل نشان داده شده‌اند. AC در حال کشش و AB در حال فشردگی است.

از چند ضلعی نیروی مربوط به B تاکنون tz و st را داریم، و برای کامل کردن آن zy را به موازات BC و sy را به موازات BD رسم می‌کنیم. zy نشان‌دهنده نیرویی است که در امتداد BC فشار می‌آورد (نیروی کششی)، و ys نشان‌دهنده نیرویی است که در امتداد BD فشار می‌آورد (نیروی فشاری).

از چند ضلعی نیروی مربوط به D تاکنون rs و sy را داریم، و برای کامل کردن آن yx را به موازات DC و rx را به موازات DE رسم می‌کنیم. yx نشان‌دهنده نیرویی است که در امتداد CD فشار می‌آورد (نیروی کششی)، و xr نشان‌دهنده نیرویی است که در امتداد DE فشار می‌آورد (نیروی فشاری).

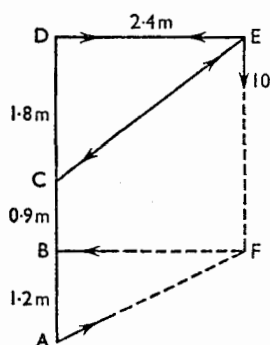
چون wr نشان‌دهنده Q و rx نیروی فشاری در E ناشی از DE است، wx باید ضلع سوم مثلث نیرو برای E باشد، یعنی wx باید موازی CE باشد و xw نشان‌دهنده نیرویی باشد که در امتداد CE فشار می‌آورد (نیروی کششی). به یاد داشته باشیم که برای مفصل C چند ضلعی بسته $yzwux$ را نیز داریم. چون نیروی uw به سوی پایین است، جهت‌های نیروهایی را که بر مفصل C وارد می‌شوند می‌توان تحقیق کرد.

با اندازه‌گیری اضلاع مربوطه نمودار نیرو می‌توان نیروهایی را که بر میله‌های گوناگون فشار می‌آورند پیدا کرد. این نیروها تقریباً به اندازه‌های زیر هستند. علامت مثبت نشان‌دهنده نیروی فشاری و علامت منفی نشان‌دهنده نیروی کششی است:

$$AB = +10, AC = -5, BC = -4\frac{1}{4}, BD = +5,$$

$$CD = -1\frac{3}{4}, CE = -6\frac{1}{4}, DE = +13$$

مثال ۴: جرثقیلی، مطابق شکل ۱۳-۱۳، به نقطه A متصل شده است و با نیروی افقی که بر B فشار می آورد به حال قائم است.



شکل ۱۳-۱۳

اگر وزنه ای به جرم 10 Mg از E آویزان باشد، نشان دهید که چگونه می توان عکس العملها را در A و B، و نیروها را در CE و DE به طور نموداری پیدا کرد. عکس العملها و نیروها را نیز محاسبه کنید.

حل: روش (الف). شکل را با مقیاسی معین، مثلاً $1 \text{ cm} = 1 \text{ m}$ رسم می کنیم. چون نیروهایی که بر میله AD وارد می شوند بر نقطه هایی جز دوسر آن وارد می شوند، این نیروها به صورت کششی یا فشاری ساده نیستند. برای آنکه عکس العملها را در A و B پیدا کنیم همه نیروهای خارجی را که بر جرثقیل وارد می شوند، یعنی این دو عکس العمل و وزن 10 واحد را، در نظر می گیریم. هر واحد برابر وزن 1 Mg است.

BF را به طور افقی رسم می کنیم تا قائمی را که از E می گذرد در F قطع کند. در این صورت عکس العمل در A باید از F بگذرد.

AF را وصل می کنیم. مثلث ABF می تواند، برای نیروهای عکس العمل و وزنه، مثلث نیروها باشد. طولهای BA، AF، FB برابرند با $1/2$ ، $1/2\sqrt{5}$ ، و $2/4$ سانتیمتر، که به ترتیب نشان دهنده 10 واحد، عکس العمل در A و عکس العمل در B هستند.

بنابراین عکس العمل در A برابر $10\sqrt{5}$ واحد و عکس العمل در B برابر 20 واحد است.

مثلت DCE مثلث نیروها برای رأس E است.

طولهای DC، CE، ED برابرند با $\frac{1}{8}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{4}$ سانتیمتر، که به ترتیب نشان دهنده این کمیتها هستند: ۱۰ واحد، نیرویی که بر CE فشار می آورد، و نیرویی که بر ED فشار می آورد. بنابراین نیرویی که در امتداد CE فشار می آورد $\frac{50}{3}$ واحد (نیروی فشاری)، و نیرویی که در امتداد ED فشار می آورد $\frac{40}{3}$ واحد (نیروی کششی) است.

دوش (ب). برای محاسبه عکس العمل در B و A. فرض می کنیم عکس العمل در B برابر P واحد باشد، در این صورت اگر برای کل چهارچوب حول A گشتاور بگیریم،

$$1/2P = 2/4 \times 10$$

$\therefore P = 20$
فرض می کنیم مؤلفه های افقی و قائم عکس العمل در A برابر X و Y واحد باشند. در این صورت

$$X = P = 20$$

$$Y = 10$$

و

اگر R عکس العمل بر ایند باشد.

$$R = \sqrt{[20^2 + 10^2]} = 10\sqrt{5} \text{ واحد}$$

R نسبت به افق شیب دارد و زاویه آن $\frac{1}{4} \text{ Arc tg}$ است.

برای محاسبه نیروهایی که در CE و ED فشار می آورند، نیروی فشاری در CE را T_1 واحد می گیریم.

مؤلفه قائم آن را برای رأس E تعیین می کنیم،

$$T_1 \sin CED = 10$$

$$\therefore T_1 = \frac{50}{3} \text{ یا } \frac{3}{5} T_1 = 10$$

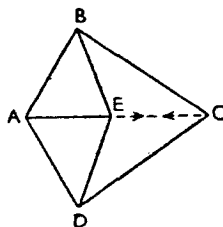
نیروی کششی در ED را T_2 واحد می گیریم. مؤلفه افقی آن را برای رأس E تعیین می کنیم،

$$T_2 = T_1 \cos CED = \frac{50}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{40}{3}$$

تمرین ۲۰۱۳

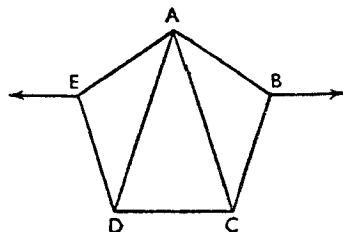
- ۱ - داربستی از میله‌های $AB=AD=0.6\text{ m}$ ، و $BC=CD=37/5\text{ cm}$ تشکیل شده است که به‌طور صیقلی به هم لولا شده‌اند. این داربست بر روی میزی افقی طوری قرار می‌گیرد که زاویه $\angle BAD=60^\circ$ ، و A و C در دو طرف BD هستند. B و D با ریسمانی که می‌تواند وزنه‌ای به جرم 14 kg را تحمل می‌کند به هم متصل شده‌اند. بزرگترین نیرویی را پیدا کنید که می‌تواند بر A و C وارد شود، به طوری که داربست در وضعی معین به حال تعادل باشد و ریسمان سالم بماند. در قطعه‌های داربست نیروهای مربوطه‌ای را که فشار می‌آورند پیدا کنید و بیان کنید که آیا این نیروها فشاری هستند یا کششی.
- ۲ - میله AB به طول 3 m در نقطه B به دیواری لولا شده است و وزنه‌ای به جرم 50 kg را در A نگه داشته است. این میله به کمک نخ‌کی که به نقطه C وسط میله AB بسته شده است و طرف دیگر آن به D که روی دیوار و در $2/1\text{ m}$ بالای B است بسته شده است. نموداری با مقیاس مناسب رسم کنید و از روی مثلث نیروها، کشش نخ و بزرگی و جهت عکس‌العمل را در لولای B تخمین بزنید.
- ۳ - تیر یکنواخت AB به جرم 50 kg به وسیله دو ریسمان AC و BD نگه داشته شده است. ریسمان BD قائم است و زاویه‌های CAB و ABD هر کدام 105° است. برای آنکه تیر به همین حالت بماند نیرویی افقی برابر F بر B وارد می‌شود. نشان دهید که اندازه F در حدود 122 N است.
- ۴ - پنج میله سبک هم‌طول آزادانه در سرهای خود به هم متصل شده‌اند و پنج ضلعی $ABCDE$ را تشکیل داده‌اند. این دستگاه از مفصل A آویزان است. وزنه w از مفصل C آویزان است. برای آنکه پنج ضلعی به صورتی منتظم باقی بماند، میله‌های BD و BE به کار برده شده‌اند. نموداری رسم کنید که بزرگیهای نیروهایی را که بر میله‌های گوناگون فشار می‌آورند به صورت نموداری نشان دهد و معلوم کنید که کدام میله در حال فشردگی است و کدام در حال کشیدگی.
- ۵ - مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از سه میله سبک تشکیل شده است که هر یک 0.6 m طول دارد و از دوسر به میله‌های دیگر مفصل شده است. این مثلث از نقطه‌ای واقع بر AC که در $37/5$ سانتیمتری A است آویزان شده است و وزنه‌ای به جرم $6/5\text{ kg}$ از نقطه‌ای واقع بر AB که در $17/5$ سانتیمتری A است آویزان است. نیروی کششی را در میله BC ، و عکس‌العمل میان دو میله دیگر را در A (به روش نموداری یا هر روش دیگر) پیدا کنید.

- ۶ - سه میله سبک طوری به هم مفصل شده اند که تشکیل داربستی به شکل مثلث ABC داده اند که در آن A و C هریک 30° است. این داربست می تواند حول نقطه B در صفحه ای قائم بچرخد. در همه حال AB افقی است و وزنه ای به جرم 50 kg از C آویزان است و بر A نیرویی قائم برابر P وارد می شود. از راه نمودار یا از همراه دیگر، بزرگیهای نیروی P و نیروهایی را که بر میله ها فشار می آورند پیدا کنید.
- ۷ - با پنج میله سبک متوازی الاضلاع ABCD و قطر آن BD را تشکیل داده ایم. اضلاع AD و BC از متوازی الاضلاع هریک دو برابر دو ضلع دیگر است و زاویه های A و C هریک 60° است. دو نیروی مساوی و مختلف الجهت به بزرگی F در امتداد قطر AC بر A و C وارد می شود، به طوری که متوازی الاضلاع به حال تعادل می ماند. نیروهایی را که بر میله ها فشار می آورند پیدا کنید.
- ۸ - داربستی مطابق شکل ۱۳-۱۴ از میله هایی تشکیل شده است که به یکدیگر مفصل شده اند. طول AB و AD برابر 0.9 m ، طول BC و DC برابر 1.2 m ، فاصله AC برابر 1.5 m ، و E نقطه وسط A و C است. نیروهای 40 N بر C و E مطابق شکل وارد شده اند. نیروهای کششی یا فشاری را در هریک از میله های داربست تعیین کنید.



شکل ۱۴-۱۳

- ۹ - پنج ضلعی منتظم ABCDE (شکل ۱۳-۱۵) که رئوس آن مفصل شده اند با دو میله AC و AD که آنها نیز مفصل شده اند محکم شده است. دو نیروی برابر و ناهمسو، هریک برابر 15 N بر B و E وارد می شوند، نیرویی را که بر هر میله داربست وارد می شود پیدا کنید و توضیح دهید که آیا آن میله در حال فشرده گی است یا در حال کشیدگی.



شکل ۱۵-۱۳

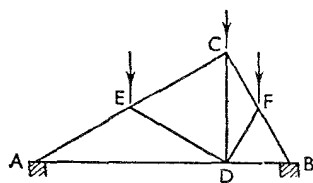
بزرگی این نیروها و نیروهایی را که برقطعه‌های گوناگون داربست وارد می‌شود پیدا کنید.

۱۳- سه تکه ریسمان همطول که وزن آنها ناچیز است به هم گره خورده‌اند و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را تشکیل داده‌اند. وزنه‌ای به جرم ۳۰ واحد از A آویزان است. این مثلث و وزنه با ریسمانهایی که به B و C متصل شده‌اند نگاهداری می‌شود به طوری که BC افقی است. اگر ریسمانهای حامل هر یک با امتداد BC زاویه ۱۳۵° بسازد، نیروی کشش را در این ریسمانها با روش نموداری پیدا کنید.

۱۴- شکل ۱۳-۱۷ داربست سقفی را نشان می‌دهد که ممکن است تصور شود وزن آن مطابق شکل توزیع شده است. نیرویی را که برهریک از نه قطعه این داربست فشار می‌آورد پیدا کنید و ماهیت آن را بیان کنید.

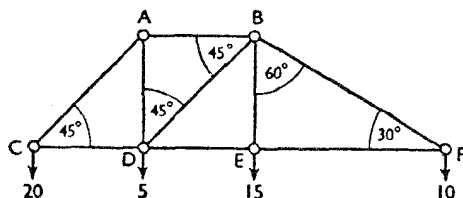
$$AE = EC = ED = 2CF = 2FD = 2FB$$

وزنی که در E است ۲۰۰ واحد و در F برابر ۱۰۰ واحد و در C برابر ۱۵۰ واحد است و ACB مثلثی قائم‌الزاویه است.



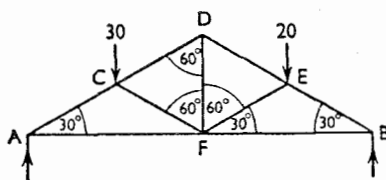
شکل ۱۷-۱۳

۱۵- داربست $ABCDEF$ (شکل ۱۳-۱۸) از میله‌های سبکی تشکیل شده است که به هم متصل شده‌اند. این داربست از میخهای صاف A و B آویزان است و وزنه‌هایی را مطابق شکل تحمل می‌کند. نیروهایی را که برهمه میله‌ها فشار می‌آورد پیدا کنید و میله‌هایی را که تحت تأثیر نیروی فشارنده است با دو خط کوتاه علامت بزنید.



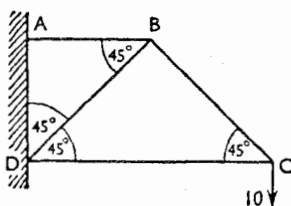
شکل ۱۸-۱۳

۱۶- شکل ۱۳-۱۹ داربستی را که از نه میله سبک تشکیل شده است نشان می‌دهد. بارهایی که بر این داربست وارد می‌شوند در شکل نشان داده شده است. این داربست بر روی پایه‌های قائم A و B گذاشته شده است. AB افقی است. عکس‌العملهای در A و B و همچنین نیروهایی را که بر همه میله‌ها فشار می‌آورند پیدا کنید.



شکل ۱۳-۱۹

۱۷- داربست شکل ۱۳-۲۰ از چهار میله سبک AB ، BC ، CD و DB تشکیل شده است که آزادانه در B ، C و D مفصل شده‌اند. این داربست در A و D به دیواری قائم متصل شده است. وزن ۱۰ واحدی از C آویزان است. نیروهایی را که بر میله‌ها فشار می‌آورند و عکس‌العملهای در A و D را پیدا کنید. ستونها را با دو خط کوتاه علامت بزنید.

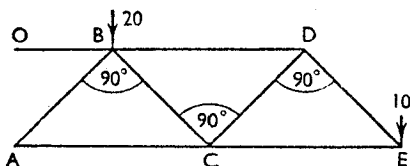


شکل ۱۳-۲۰

۱۸- داربستی از نه میله سبک متساوی تشکیل شده است که چنان به هم متصل شده‌اند که تشکیل چهار مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، CDE ، CBD ، EDF را داده‌اند و کل داربست تشکیل متوازی‌الاضلاع $ABFE$ را داده است. این داربست در صفحه‌ای قائم طوری قرار دارد که پایتترین میله آن AB افقی است، و وزنه‌ای به جرم ۲۰ واحد از F آویزان است و با نیروهای قائمی که بر A و B وارد می‌شوند به حال تعادل مانده است. نمودار نیروها را رسم کنید و نیروهایی را که بر میله‌ها فشار می‌آورند نشان دهید.

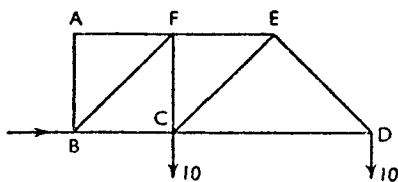
۱۹- شکل ۱۳-۲۱ داربستی را نشان می‌دهد که از میله‌های سبکی تشکیل شده است که

آزادانه به هم مفصل شده اند و تشکیل سه مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را داده اند. این داربست در A به نقطه ای ثابت لولا شده است. میله افقی OB که در B به داربست لولا شده است به نقطه ثابت O متصل شده است. بارهایی که بردار بست وارد می شوند در شکل نشان داده شده است. عکس العمل را در A و نیروی کششی را در OB ، پیدا کنید و با رسم نمودار نیروهایی را که بر میله ها فشار می آورند پیدا کنید.



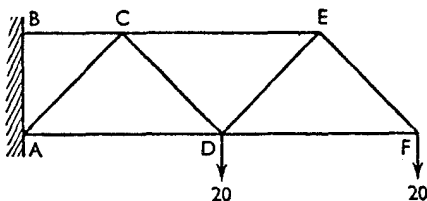
شکل ۲۱-۱۳

۲۰- شکل ۲۲-۱۳ داربستی را نشان می دهد که از نه میله سبک که به طور صیقلی مفصل شده اند تشکیل شده است. داربست به طور صیقلی به نقطه ثابت A لولا شده است و با عکس العمل افقی که بر B وارد می شود به وضعی ثابت مانده است. باری به جرم ۱۰ واحد در هر یک از مفصلهای C و D قرار دارد و زاویه های شکل همگی ۴۵° یا ۹۰° اند. نیروهایی را که بر میله ها فشار می آورند پیدا کنید و ستونها را با دوخط کوتاه علامت بزنید.



شکل ۲۲-۱۳

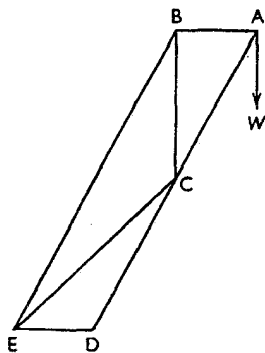
۲۱- شکل ۲۳-۱۳ داربستی را نشان می دهد که از میله های سبک تشکیل شده است و در A و B به دیواری قائم متصل است. ADF و BCE افقی است و همه زاویه ها ۴۵° یا ۹۰° اند. بارهایی مطابق شکل بردار بست وارد می شوند. به فرض آنکه عکس العمل در B به طور کامل در امتداد BC است، بزرگی و جهت عکس العمل را در A ، و همچنین نیروهایی را که بر میله ها فشار می آورند تعیین کنید و نشان دهید که کدام میله در حال کشش است و کدام در حال فشرده گی. اندازه گیریها بر روی نمودار



شکل ۲۳-۱۳

نیرو کافی است.

۲۲- ABCDE (شکل ۲۳-۱۳) داربستی است قائم که از میله‌های سبکی تشکیل شده است که به‌طور صیقلی به‌هم مفصل شده‌اند. ED افقی است. زاویه‌ها و طولها به‌شرح زیرند. $ABED$ متوازی‌الاضلاع است که در آن $AB = 2\text{ m}$ ، $BC = 4\text{ m}$ است. ABC مثلثی قائم‌الزاویه است و $AC = CD$ و وزنه W از A آویزان است. نیروهایی را که برشش میله فشار می‌آورند پیدا کنید و ماهیت هر کدام را بیان کنید.

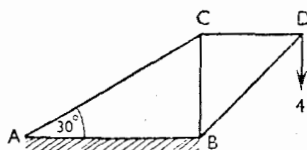


شکل ۲۴-۱۳

۲۳- مثلث AET را که در آن $AT = AE$ رسم کنید. فرض می‌کنیم که AE، با مقیاسی معین، نشان‌دهنده قسمت افقی و AT نشان‌دهنده قسمت قائم یک سازه باشد که در آن $AT = 12\text{ m}$. AE را به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنیم و نقطه‌های جدایی را B، C و D می‌نامیم. TB، TC و TD را متصل می‌کنیم، و فرض می‌کنیم که این خطوط و همچنین TE میله‌های قید باشند. فرض می‌کنیم AB ، BC ، CD و DE میله‌هایی صلب و بیوزنند و بارهای یک واحدی از نقطه‌های B، C،

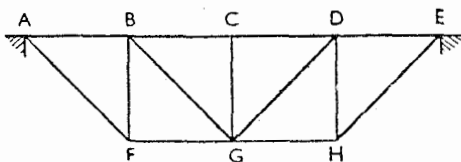
D و E آویزان است. به طریق نموداری یا به هر راه دیگر نیروهای کششی را در میله‌های قید به دست آورید.

۲۴- شکل ۱۳-۲۵ جرثقیلی را نشان می‌دهد که از چهار میله سبک تشکیل شده است که آزادانه به هم مفصل شده‌اند. میله‌ها AC، BC، BD، CD در صفحه‌ای قائمند و وزنه‌ای ۴ واحدی را در D نگاه می‌دارند. AB و CD افقی هستند و BC قائم است. از راه نموداری یا از هر راه دیگر نیروهای راکه در امتداد هر میله وارد می‌شود پیدا کنید.



شکل ۱۳-۲۵

۲۵- شکل ۱۳-۲۶ تیر حمال پلی است که آزادانه بر پایه‌های A و E تکیه دارد. CF



شکل ۱۳-۲۶

و CH مربعند و $AB = BF = DE$. بارهای ۱۵، ۱۵، و ۱۲ واحد بر C، B و D وارد می‌شوند. نیروهای راکه بر AB، BF، BG، FG و CG فشار می‌آورند پیدا کنید.

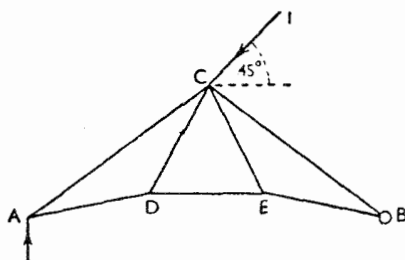
۲۶- مستطیل ABCD را که در آن $AB = DC = ۱۵ \text{ cm}$ و $AD = BC = ۵ \text{ cm}$ است رسم کنید. وسط DC را E می‌نامیم و AB را به سه قسمت می‌کنیم و محل تقسیم را F و G می‌نامیم به طوری که F به A نزدیکتر است تا به B. اکنون DF را با EG، FE، CG را وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که شکل حاصل خرابی پلی را با مقیاس مناسب نشان می‌دهد. اگر این خرابی در A و B تکیه داشته باشد و AB تراز باشد و وزنه‌ای برابر ۱ واحد در F قرار داشته باشد نیروهای راکه بر قطعه‌های این خرابی وارد می‌شوند پیدا کنید.

۲۷- در داربست ABCDE (شکل ۱۳-۲۷) میله‌ها آزادانه به هم مفصل شده‌اند.

$$AD = DC = CE = EB = DE,$$

$$AC = CB = 1/\sqrt{2} AD$$

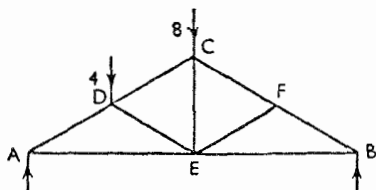
و



شکل ۱۳-۲۷

این داربست آزادانه در A تکیه دارد و در B به تکیه گاهی که همتراز A است لولا شده است. نیروی یک واحدی مطابق شکل بر C وارد می‌شود. عکس‌العملها را در A و B پیدا کنید و نشان دهید که چگونه می‌توان نمودار نیروها را برای نیروهایی که میله‌ها را فشار می‌دهند رسم کرد.

۲۸- داربستی مطابق شکل ۱۳-۲۸ از میله‌هایی تشکیل شده است که آزادانه به هم مفصل شده‌اند. این داربست در A و B تکیه دارد و AB افقی است. وزنه‌های ۴ و ۸ واحد از C و D آویزانند. زاویه‌های حاده شکل 30° یا 60° هستند. برای نیروهایی که بر قطعه‌های این داربست فشار می‌آورند نمودار نیرو رسم کنید.

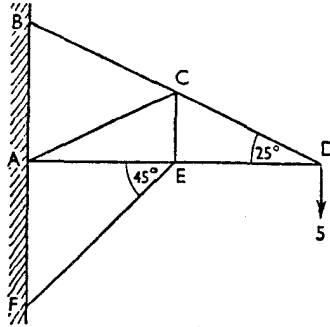


شکل ۱۳-۲۸

۲۹- سه میله سبک و هم‌طول به هم طوری مفصل شده‌اند که تشکیل داربست مثلث شکل ABC را داده‌اند. این داربست از A آویزان است، و وزنه‌های ۴ واحدی و ۵ واحدی به B و C متصل است. از راه نمودار یا از هر راه دیگر، زاویه‌ای را که AB با قائم می‌سازد و نیرویی را که در امتداد BC وارد می‌شود پیدا کنید.

۳۰- جرقیلی دیواری مطابق شکل ۱۳-۲۹ از میله‌هایی تشکیل شده است. اگر به زنجیری

که در D است و زنه ۵ واحدی آویزان شود، نیروهایی را که بر میله‌های جرثقیل فشار می‌آورند پیدا کنید. زنجیر از روی قرقره‌هایی که در D و E است عبور کرده است و در F به دیوار محکم شده است و $AE = ED$.

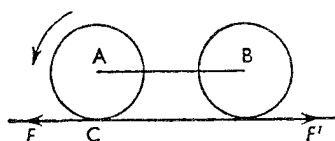


شکل ۱۳-۲۹

۱۰۱۴. قوانین اصطكاك و کاربرد آنها درباره تعادل يك نقطه مادی بريك سطح ناصاف در بخش ۱۵ مورد توجه قرار گرفت. اکنون حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که اجسامی جز نقطه‌های مادی تحت تأثیر نیروهای اصطكاك و نیروهای دیگر در حال تعادلند. پیش از آنکه به بحث درباره مسئله‌های ویژه‌ای بپردازیم، بهتر است به يك یادونکته کلی درباره اصطكاك اشاره کنیم.

۲۰۱۴. اصطكاك در مكانيك هر روزی نقش مهمی دارد. وقتی که کسی قدم می‌زند پاهای او گرایش به لغزش به سوی عقب دارند. از این کار به كمك اصطكاك میان پا و زمین، که در جهت جلو عمل می‌کند، جلوگیری می‌شود. در واقع نیروی اصطكاك نیرویی جلو برنده است. بدون اصطكاك راه رفتن امکان‌ناپذیر است.

لوکوموتیو قطار نمی‌تواند به سوی جلو حرکت کند، حتی اگر قطار واگونها را هم به دنبال نداشته باشد، مگر آنکه نیرویی خارجی در جهت جلو بر آن وارد شود. موتور لوکوموتیو تنها می‌تواند چرخ‌های خود را بچرخاند. اگر این چرخ‌ها بر روی خطوط آهن صیقلی قرار گرفته باشند، بی‌آنکه سبب حرکتی به سوی جلو بشوند به دور خود می‌گردند. در عمل، اصطكاك میان چرخ لوکوموتیو و خط آهن از گردش یا از لغزش در نقطه تماس C جلوگیری می‌کند (شکل ۱-۱۴). به این ترتیب چرخ در امتداد خط آهن می‌غلتد، و



شکل ۱-۱۴

نیروی اصطکاک F در جهتی روبه جلو وارد عمل می شود. بزرگی قدرت کشش موتور بستگی به این نیروی اصطکاک دارد. چرخهای دیگر لوکوموتیو یا چرخهای واگونها قطار با نیرویی که بر محور آنها مثلاً بر B وارد می شود به سوی جلو کشیده می شوند. چنین چرخهایی بر خطوط آهن صیقلی بی آنکه بچرخند به سوی جلوسری خورند. اما اثر اصطکاک که در جهت عقب وارد می شود، مانند F' در شکل ۱-۱۴، سبب می شود که چرخها بغلتند.

۳-۱۴ اثر ترمز

ترمز در اتومبیل چرخها را از چرخش باز می دارد. وقتی که ترمز گرفته می شود چرخها قفل می شوند (یعنی از چرخش آنها جلوگیری می شود). در این هنگام اصطکاک لغزشی در نقطه های تماس با زمین وارد عمل می شود و از سرعت اتومبیل می کاهد تا اتومبیل بایستد.

اما در بسیاری از حالتها، ترمز فقط چرخش چرخها را کنترل می کند، به طوری که چرخها باز هم به غلتش خود ادامه می دهند. در این حالت شاید درست روشن نباشد که نیرویی که سبب توقف اتومبیل می شود چگونه تولید می شود.

روشن است که کنترل چرخش چرخ نمی تواند، به تنهایی، تولید نیروی کند کننده در اتومبیل بکند. اگر زمین صیقلی بود، در این صورت قفل کردن چرخها چنین اثری نداشت. چرخ، هنگامی که مرکز A (شکل ۱-۱۴) و نقطه تماس با زمین C است، آزادانه در حال غلتش است و در نقطه C لغزش ندارد. تندی پسروی C نسبت به A برابر است با تندی پیشروی A ، به طوری که C به طور لحظه ای در حال سکون است. بنابراین اگر چرخش چرخ کنترل شود تندی پسروی C کاهش پیدا می کند، به طوری که C مایل است که همراه A به پیش برود. این پدیده سبب می شود که در C نیروی اصطکاک در جهت عقب وارد عمل شود، و همین نیروست که حرکت چرخ را به سمت جلو کند می کند.

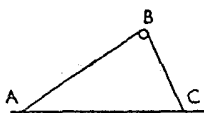
۴-۱۴ مسئله هایی را که شامل اصطکاک هستند تقریباً می توان به شرح زیر دسته بندی کرد:

۱- مسئله هایی که در آن جسم صلب است و تعادل را می توان تنها با لغزش از میان برد و جهت حرکت روشن است. مثلاً نردبانی که بر زمینی ناصاف قرار دارد و به دیواری

ناصاف، در صفحه‌ای قائم و عمود بر دیوار، تکیه دارد. اگر نیروهای دیگری در کار نباشند و اگر حرکتی در صفحه قائم روی دهد، آن حرکت چنان خواهد بود که لبه پایینی نردبان می‌لغزد و از دیوار دور می‌شود و در همان زمان لبه بالایی نردبان رو به سمت پایین می‌لغزد. هیچ لبه‌ای نمی‌تواند بدون لغزش لبه دیگر بلغزد.

۲- مسئله‌هایی که در آن تعادل یا برآثر لغزش یا برآثر کج شدن از میان می‌رود. مثلاً بلوك یا استوانه‌ای که بر صفحه‌ای ناصاف قرار دارد و آهسته آهسته کج می‌شود. اگر قائمی که از مرکز ثقل می‌گذرد، پیش از شروع لغزش جسم، بیرون از قاعده جسم بیفتد، جسم پیش از آنکه بلغزد به يك سو می‌افتد.

۳- مسئله‌هایی که در آن يك جسم غیر صلب نیز وجود دارد مانند دوميله AB و BC که آزادانه در نقطه B به هم مفصل شده‌اند (شکل ۱۴-۲) و در A و C بر صفحه افقی ناصافی قرار دارند. در این حالت لازم نیست که لغزش هم در A روی دهد و هم در C. اصطكاك ممكن است در A یا در C اصطكاك حد باشد بی‌آنکه در هر دو جا باشد. البته ممكن است اصطكاك حد در هر دو جا پیدا شود. اگر نیروهای خارجی جز نیروهای وزن میله‌ها و وزنه‌هایی که بر آنها قرار دارند وجود نداشته باشند، در این صورت، در حالت تعادل، اصطكاكهای در A و C باید برابر و ناهمسو باشند، زیرا آنها تنها نیروهای افقی هستند که وارد می‌شوند. با این همه، باید دقت کرد که هیچ يك از آنها اصطكاك حد، یعنی برابر μR به شمار نیاید.



شکل ۱۴-۲

۴- مسئله‌هایی دشوارتر هم هستند که در آنها جهت حرکت روشن نیست، یا مسئله‌هایی که تعادل در آنها ممكن است برآثر لغزش یا غلتش از میان برود. مثلاً نردبانی که بر زمینی ناصاف قرار دارد و بر دیواری ناصاف تکیه کرده است، اما در صفحه قائم عمود بر دیوار نیست؛ یا استوانه ناصاف که بر روی دو استوانه دیگر قرار دارد و آنها نیز به نوبه خود بر صفحه افقی ناصافی قرار دارند.

در بندهای بعدی مثالهایی از انواع گوناگون آورده شده است.

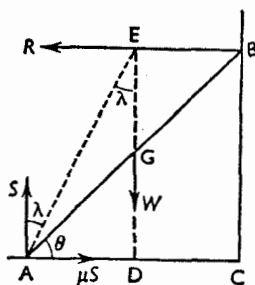
۵۰۱۴. مثال ۱: يك طرف نردبانی یکنواخت، به وزن W ، بر دیواری صیقلی تکیه دارد، و طرف دیگر آن بر زمین افقی ناصافی قرار دارد. ضریب اصطكاك μ است. انحراف

نردبان را نسبت به افق هنگامی پیدا کنید که نردبان در حال لغزش است. عکس‌العملهای دیوار و زمین را نیز پیدا کنید.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۳) نردبان، G مرکز ثقل آن، C محل تسلاقی دیوار با زمین باشد. چون دیوار صیقلی است، عکس‌العمل آن R در B باید عمود بر دیوار باشد.

اگر S عکس‌العمل قائم نسبت به نردبان در نقطه A باشد، در این صورت، چون نردبان در حال لغزیدن است، اصطکاک در A برابر μS و به سمت دیوار خواهد بود.

دوش (الف). برطبق آنچه در مسئله آمده است چهار نیرو بر نردبان اثر می‌کنند که، با تجزیه آنها در راستاهای قائم و افقی و گرفتن گشتاورها حول C یا A ، سه معادله به دست خواهد آمد که به کمک آنها عکس‌العملهای نامعلوم R ، S و زاویه θ پیدا خواهد شد.



شکل ۱۴-۳

از تجزیه در راستای افقی، (۱) $R = \mu S$

از تجزیه در راستای قائم، (۲) $S = W$
با گرفتن گشتاور حول C ،

$$Rl \sin \theta + W \frac{l}{\gamma} \cos \theta = Sl \cos \theta \quad (۳)$$

که در آن l طول نردبان است.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $R = \mu W = W \tan \lambda$ ، که در آن λ زاویه اصطکاک است.

از (۳) نتیجه می‌شود که

$$W \tan \lambda \sin \theta + \frac{1}{2} W \cos \theta = W \cos \theta$$

$$\therefore W \tan \lambda \tan \theta = \frac{1}{2} W$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2} \cot \lambda$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{S^2 + \mu^2 S^2} \quad \text{عكس العمل برآیند از زمین برابر است با} \\ & = S \sqrt{1 + \tan^2 \lambda} \\ & = \frac{W}{\cos \lambda} \end{aligned}$$

روش (ب). زاویه انحراف نردبان را می‌توان به جای در نظر گرفتن مؤلفه‌های S و μS عکس‌العمل زمین، با در نظر گرفتن عکس‌العمل برآیند زمین در A پیدا کرد. این کار سبب می‌شود که عده نیروهایی که بر نردبان وارد می‌شوند به سه نیرو کاهش پیدا کند، که می‌بایستی در نقطه‌ای، مثلاً نقطه E ، تلاقی کنند. این نقطه در محلی است که خط قائمی که از G می‌گذرد، راستای R را قطع می‌کند.

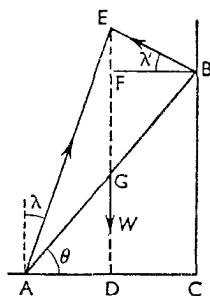
همچنین چون نردبان در حال لغزش است، عکس‌العمل برآیند در A با خط قائم A ، زاویه λ ، زاویه اصطكاك، می‌سازد.

اگر (شکل ۱۴-۳) خط قائم EG خط AC را در D قطع کند خواهیم داشت:

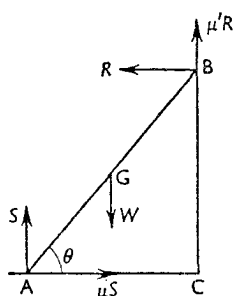
$$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{ED}{2AD} = \frac{1}{2} \cot \lambda$$

روش هندسی به ویژه هنگامی مفید است که تنها مکان جسم در حالت تعادل حد مورد نیاز باشد، که در این صورت نتیجه را بی‌آنکه از عکس‌العملها استفاده کنیم و بدون حل کردن معادله‌ها می‌توان به دست آورد. حتی وقتی که بخواهیم عکس‌العملها را به دست آوریم، استفاده از روش و پیدا کردن مکان جسم می‌تواند مفید باشد، زیرا عکس‌العملها را با تجزیه یا گرفتن گشتاورها می‌توان پیدا کرد.

مثال ۲: يك طرف نردبانی یكنواخت، به وزن W ، بر دیواری ناصاف تکیه دارد، و طرف دیگر آن بر زمین افقی ناصافی قرار دارد. ضریب اصطكاك با زمین و با دیوار به ترتیب μ و μ' است. زاویه انحراف نردبان را با افق، هنگامی که نردبان در حال شروع به لغزش است پیدا کنید و در این هنگام عکس‌العملهای زمین و دیوار را به دست آورید.



شکل ۴-۱۴ ب



شکل ۴-۱۴ الف

فرض می‌کنیم AB (شکل ۴-۱۴ الف) نردبان، G مرکز ثقل آن، R و S عکس‌العملهای قائم دیوار و زمین بر نردبان باشد. چون هر دو طرف نردبان در حال شروع به لغزش است، در نقطه B نیروی اصطکاک $\mu'R$ را که به سمت بالا وارد می‌شود و در نقطه A نیروی اصطکاک μS را که به سمت دیوار وارد می‌شود خواهیم داشت.

روش (الف). فرض می‌کنیم زاویه انحراف نردبان با زمین و λ طول آن باشد. با تجزیه در راستای افقی،

$$\mu S = R \quad (۱)$$

$$S + \mu'R = W \quad (۲) \quad \text{با تجزیه در راستای قائم،}$$

با گرفتن گشتاور حول C،

$$Wl \cos \theta = S \times \lambda l \cos \theta - R \times \lambda l \sin \theta$$

$$W \cos \theta = \lambda S \cos \theta - \lambda R \sin \theta \quad (۳) \quad \text{یا}$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود

$$S(1 + \mu\mu') = W$$

$$\therefore S = \frac{W}{1 + \mu\mu'} \quad \text{و} \quad R = \frac{\mu W}{1 + \mu\mu'}$$

اگر در معادله (۳) به جای μS برابر آن R بگذاریم:

$$W \cos \theta = \lambda S (\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

$$= \frac{\lambda W}{1 + \mu\mu'} (\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

$$\therefore 1 = \frac{\lambda}{1 + \mu\mu'} (1 - \mu \tan \theta)$$

$$\therefore \frac{1 + \mu\mu'}{2} = 1 - \mu tg\theta$$

$$\mu tg\theta = \frac{1 - \mu\mu'}{2} \quad \text{یا}$$

$$tg\theta = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu} \quad \text{یا}$$

دوش (ب). در این حالت اندازه θ را می‌توان به آسانی با استفاده از عکس‌العملهای برآیند در A و B پیدا کرد. مانند مثال (۱)، نتیجه را می‌توان با استفاده از هندسه به دست آورد.

این عکس‌العملها باید با خطوط قائم در A و B زاویه‌های λ و λ' بسازند (که در آن $tg\lambda = \mu$ و $tg\lambda' = \mu'$)، و همان‌طور که در شکل ۱۴-۴ ب نشان داده شده است، خط قائمی را که از G می‌گذرد در نقطه‌ای، مثلاً E، قطع کند.

$$tg\theta = \frac{BC}{AC} \quad \text{بنابراین}$$

$$= \frac{ED - EF}{AC}$$

$$= \frac{ED}{2AD} - \frac{EF}{2FB}$$

$$= \frac{1}{2}(\cot\lambda - tg\lambda')$$

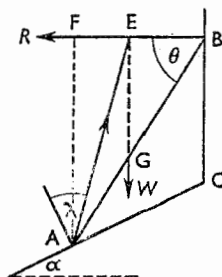
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} - \mu'\right)$$

$$= \frac{(1 - \mu\mu')}{2\mu}$$

پس از آن می‌توانیم R و S را با تجزیه مطابق شرح بالا پیدا کنیم.

مثال ۳. يك انتهای نردبانی یکنواخت، به وزن W، بر دیواری صاف تکیه دارد و انتهای دیگر آن بر زمینی ناصاف قرار دارد که نسبت به دیوار شیبی دارد که زاویه آن با افق α است. انحراف نردبان را نسبت به افق هنگامی پیدا کنید که نردبان در حالت شروع به لغزش است، و نشان دهید که در این هنگام عکس‌العمل دیوار برابر است با $Wtg(\lambda - \alpha)$ که در آن λ زاویه اصطکاک است.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۵) نردبان، G مرکز ثقل آن، و θ زاویه انحراف



شکل ۵-۱۴

آن با افق باشد.

چون دیوار صیقلی است، عکس‌العمل R در B عمود بر دیوار است. وقتی که نردبان در حالت شروع به لغزش است عکس‌العمل برآیند در A زاویه λ با خط عمود بر A می‌سازد، و از E ، محل تلاقی راستای R و خط قائم G می‌گذرد. AF را عمود بر BE رسم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{در این صورت} \quad \operatorname{tg} \theta &= \frac{EG}{EB} = \frac{\frac{1}{2}AF}{FE} \\ &= \frac{1}{2} \cotg FAE \\ &= \frac{1}{2} \cotg (\lambda - \alpha) \end{aligned}$$

که از آن θ ، زاویه انحراف نردبان با افق به دست می‌آید. اگر طول نردبان $2l$ باشد، در این صورت با گرفتن گشتاورها حول A خواهیم داشت:

$$R \times 2l \sin \theta = Wl \cos \theta$$

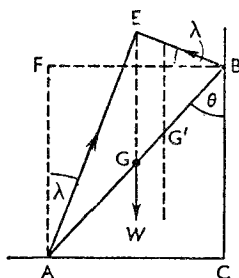
$$\begin{aligned} \therefore R &= \frac{W}{2} \cotg \theta = \frac{W}{2} \times 2 \operatorname{tg} (\lambda - \alpha) \\ &= W \operatorname{tg} (\lambda - \alpha) \end{aligned}$$

مثال ۴: یک طرف نردبانی یکنواخت بر روی زمین افقی ناصافی قرار دارد و طرف دیگر آن به دیوار قائم ناصافی تکیه دارد. ناصافی زمین و دیوار همسان است و زاویه اصطکاک برابر λ است. نشان دهید که بیشترین انحراف نردبان نسبت به قائم برابر 2λ است.

وقتی که نردبان در چنین وضعی هست آیا می‌توان بی‌آنکه نردبان بلغزد از

آن بالا رفت؟

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۶) نردبان، G مرکز ثقل آن، θ زاویه انحراف آن نسبت به قائم باشد. هنگامی که نردبان در حالت شروع به لغزش است عکس‌العملهای برآیند در A و B زاویه‌های برابر λ با عمودهای بر آن نقاط می‌سازند و باید همدیگر را در نقطه‌ای مانند E واقع بر قائمی که از G می‌گذرد



شکل ۱۴-۶

تلاقی کنند. از روی شکل دانسته می‌شود که

$$\angle AEG = \lambda, \quad \angle GEB = 90^\circ - \lambda, \quad \angle AEB = 90^\circ$$

و بنابراین مرکز شبه دایره $AFEB$ نقطه G است.

$\therefore$

$$\theta = \angle EGB$$

و چون $AG = GE$ است $\angle AEG = 2\theta$

$\therefore$

$$\theta = 2\lambda$$

اگر وزنی اضافی در هر جای نردبان میان A و G قرار گیرد، مرکز ثقل نردبان و وزنه اضافی به نقطه‌ای زیر G تغییر جا می‌دهد. در این صورت خط قائمی که از این مرکز ثقل جدید می‌گذرد در سمت چپ خط قائمی خواهد بود که در شکل نشان داده شده است، و روشن است که در این حالت هم عکس‌العملهای A و B می‌توانند بر روی این خط قائم تلاقی کنند، بی‌آنکه انحراف آنها نسبت به عمودهایی که بر A و B رسم می‌شوند بزرگتر از λ باشد. در واقع این انحرافها از λ کمترند و بنابراین تعادل دیگر در حالت حد نیست.

وقتی که وزنه اضافی به G می‌رسد باز هم تعادل به حالت حد می‌رسد.

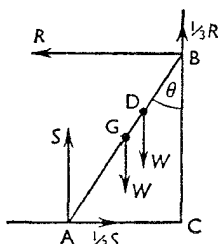
وقتی که وزنه اضافی به بالای G می‌رسد مرکز ثقل نردبان و وزنه اضافی

به بالای G (مثلاً G') می‌رسد و عکس‌العملهای A و B نمی‌توانند بر روی قائمی

که از G' می‌گذرد با یکدیگر برخورد کنند، زیرا برای آنکه چنین چیزی پیش آید لازم است که یکی از زاویه‌های انحراف نسبت به عمودی که در آن نقطه رسم می‌شود بزرگتر از λ باشد. بنابراین از این نردبان فقط تا مرکز آن می‌توان بالا رفت.

اگر وزنه اضافی به پای نردبان اضافه شود (مثلاً کسی برپله پایینی بایستد) مرکز ثقل به زیر G تغییر جا می‌دهد. در این صورت، شخص دیگری می‌تواند از نردبان بالا برود و به نقطه‌ای بالاتر از G برسد، اما تنها تا ارتفاعی می‌تواند بالا برود که مرکز ثقل نردبان و دو وزنه اضافی به G برگردد.

مثال ۵: انتهای بالایی نردبانی یکنواخت بردیوار قائم ناصافی تکیه دارد و انتهای پایینی آن بر روی سطح افقی ناصافی قرار دارد. ضریب اصطکاک در هر دو جا برابر $\frac{1}{3}$ است. ثابت کنید که اگر زاویه انحراف نردبان نسبت به قائم به اندازه‌ای باشد که تنازعات آن برابر $\frac{1}{4}$ است، وزنه‌ای هموزن نردبان را نمی‌توان به نقطه‌ای بالاتر از $\frac{9}{10}$ طول نردبان از پای آن متصل کرد بی‌آنکه تعادل به هم بخورد.



شکل ۷-۱۴

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۷-۱۴) نردبان، G مرکز ثقل آن، W وزن آن، و D نقطه‌ای باشد که وزنه اضافی W به نردبان متصل شده است و نردبان در حالت شروع به لغزش باشد.

دش (الف). اگر R و S عکس‌العملهای قائم دیوار و زمین باشند اصطکاک در این نقطه‌ها $\frac{1}{3}R$ و $\frac{1}{3}S$ خواهد بود.

با تجزیه در امتداد افقی

$$R = \frac{1}{3}S \quad (۱)$$

وزنه اضافی در حالت حد باشد، در این صورت عکس‌العمل‌های در A و B با یکدیگر بر روی قائمی که از G' می‌گذرد، مثلاً در E، برخورد می‌کنند به طوری که

$$\operatorname{tg} AEG' = \operatorname{cotg} G'EB = \frac{1}{3}$$

$$\therefore AH = \frac{1}{3}EH \text{ و } EF = \frac{1}{3}FB$$

$$BC = EH - EF \quad \text{بنابراین}$$

$$= 3AH - \frac{1}{3}FB$$

$$BC = 2AC \quad \text{اما چون } \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \text{ است}$$

$$\therefore 2AC = 3AH - \frac{1}{3}FB$$

$$\therefore 2(AH + HC) = 3AH - \frac{1}{3}HC$$

$$\therefore 3AH = 7HC$$

$$\therefore AH = \frac{7}{10}AC$$

$$AG' = \frac{7}{10}AB = \frac{7l}{5} \quad \text{بنابراین}$$

نیز اگر فاصله وزنه افزوده شده W از بالای A برابر x باشد، چون مرکز ثقل این وزنه و نردبان در G' است، با گرفتن گشتاورها حول A خواهیم داشت:

$$Wx + Wl = 2W \times \frac{7}{5}l$$

$$\therefore x = \frac{9}{5}l = \frac{9}{10} \text{ طول نردبان}$$

مثال ۶: میله‌ای یکنواخت درون کره‌ای توخالی و ناصاف به حالت تعادل حد قرار دارد.

میله در صفحه‌ای قائم که از مرکز کره می‌گذرد قرار دارد. نشان دهید که میله با

افق زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن

$$\frac{\sin 2\epsilon}{\cos 2\alpha + \cos 2\epsilon}$$

است که ϵ زاویه اصطکاک و 2α زاویه‌ای است که میله با آن از مرکز کره دیده می‌شود.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۱۴-۹) میله، G مرکز ثقل آن و O مرکز کره باشد.

را نسبت به خط قائم هنگامی که نردبان در حالت شروع به لغزیدن است پیدا کنید.

۲ - يك سر نردبانی یکنواخت بر زمینی افقی و ناصاف که ضریب اصطکاک آن $\frac{5}{8}$ است قرار دارد. سردیگر نردبان بر دیوار قائم صیقلی تکیه دارد. اگر زاویه انحراف نردبان 45° باشد، نشان دهید که شخصی که وزنش برابر وزن نردبان است فقط تاسه چهارم طول نردبان می تواند از نردبان بالا برود.

۳ - در حالتی مشابه مسئله قبل، چه وزنه ای باید به انتهای پایینی نردبان متصل کرد تا شخص مذکور بتواند تا بالای نردبان برود؟

۴ - نردبانی یکنواخت به وزن W بر دیوار قائم صیقلی تکیه دارد. پای نردبان بر زمینی ناصاف قرار دارد که نسبت به دیوار شیبی دارد که زاویه آن با افق α است. ثابت کنید که، اگر نردبان در حالت تعادل حد باشد، زاویه انحراف نردبان نسبت به دیوار به اندازه ای است که تانژانت آن برابر است با

$$2 \tan(\epsilon - \alpha)$$

که در آن ϵ زاویه اصطکاک است. همچنین ثابت کنید که در این حالت عکس العمل

$$\text{برایند بازمین برابر است با } \frac{W}{\cos(\epsilon - \alpha)}.$$

۵ - عصایی یکنواخت به طول l در حلقه ناصاف يك جابجری که در ارتفاع h بالای زمین است قرار گرفته است. این عصا بر کف صیقلی اتاق نیز تکیه دارد. نشان دهید که اگر ضریب اصطکاک کمتر از

$$\frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$$

باشد، تعادل ناممکن است مگر آنکه عصا قائم باشد.

۶ - میله ای یکنواخت به طول l در صفحه ای قائم بر (و بالای) تیر افقی صافی که در ارتفاع h است تکیه دارد. انتهای پایینی میله بر سطح زمین قرار دارد. نشان دهید که اگر میله در حالت شروع به لغزش باشد و زاویه انحراف آن نسبت به افق برابر θ باشد، در این صورت ضریب اصطکاک میان میله و سطح زمین برابر است با

$$\frac{l \sin 2\theta \sin \theta}{4h - l \sin 2\theta \cos \theta}$$

۷ - میله سنگین نازک یکنواخت AB میان دو صفحه OA و OB قرار دارد که با خط قائم زاویه 45° می سازند و با یکدیگر در خطی افقی برخورد می کنند. انتهای A از میله و صفحه OA ناصافند. انتهای B از میله و صفحه OB صیقلی اند. نشان

دهید که میله در هروضعی که زاویه θ با صفحه صیقلی بسازد قرار خواهد گرفت، به شرط آنکه $tg\theta$ میان $1 - 2\mu$ و $1 + 2\mu$ باشد.

۸ - دومیله یکنواخت AB و BC هر يك به طول $2l$ در B محكم به هم متصل شده اند، به طوری که ABC زاویه ای قائمه است. ثابت کنید که اگر میله ها در تماس با حلقه گرد ثابتی به شعاع a به حالت تعادل حد باشند، و AB افقی و BC قائمی مماس بردايره باشد، در این صورت

$$2a(1 - \mu) = l(1 + \mu^2)$$

که در آن μ ضریب اصطكاك میان میله ها و حلقه است.

۹ - نردبانی است یکنواخت که يك سر آن به زمین و سردیگر آن به دیواری قائم تکیه دارد. نردبان در صفحه ای عمود بر خط تلاقی دیوار با زمین است. ضریبهای اصطكاك با دیوار و زمین هر دو برابر $tg 15^\circ$ است. نشان دهید که زاویه انحراف نردبان با زمین نمی تواند کمتر از 60° باشد. نشان دهید که اگر بخواهیم زاویه انحراف نردبان 30° باشد، فقط در صورتی ممکن است که وزنه ای به وزن $\frac{1}{3}(1 + \sqrt{3})$ برابر وزن نردبان به پای نردبان بسته شود.

۱۰ - میله ای است یکنواخت که میان دو صفحه به حال تعادل حد قرار دارد و زاویه انحراف آن با هر دو صفحه یکسان است. یکی از دو صفحه افقی است و دیگری 120° نسبت به آن شیب دارد. اگر زاویه اصطكاك میان میله و سطح شیب دار برابر 30° باشد، نشان دهید که ضریب اصطكاك میان میله و صفحه افقی برابر $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ است.

۱۱ - الوار یکنواخت AB به طول $2/4$ m و به جرم 10 kg در A روی زمین ناصافی قرار دارد. انتهای دیگری آن به لبه میز صافی تکیه دارد که ارتفاع آن $1/2$ متر است و با افق زاویه ای می سازد که تانژانت آن برابر $\frac{4}{3}$ است. نشان دهید که μ ، ضریب اصطكاك میان الوار و زمین، بزرگتر از $\frac{48}{89}$ است. اگر $\mu = \frac{3}{4}$ باشد، چه وزنی باید در B به الوار آویزان کرد تا الوار نلغزد؟

۱۲ - میله ای است یکنواخت و سنگین به وزن W که با افق زاویه 45° می سازد. يك سر آن بر روی زمین و سردیگر آن به دیواری قائم تکیه دارد. صفحه قائمی که از میله می گذرد عمود بر دیوار است. ناصافی زمین و دیوار یکسان است و ضریب اصطكاك میان هر يك از آنها و میله برابر $\frac{1}{3}$ است. نشان دهید که اصطكاك در انتهای پایینی

میله می‌تواند هر مقداری میان $\frac{1}{4}W$ و $\frac{1}{3}W$ داشته باشد. مقادیر مربوطه اصطکاک را برای انتهای بالایی میله پیدا کنید. حالتی را بحث کنید که ضریب اصطکاک برابر $1 - \sqrt{2}$ است.

۱۳- نردبانی است یکنواخت به جرم 50 kg که یک سر آن بر زمینی ناصاف و سر دیگری آن به دیوار صیقلی قائمی تکیه دارد. اگر زاویه انحراف نردبان با افق 60° باشد، نیروی اصطکاک لازم را برای آنکه نردبان در جای خود بماند پیدا کنید. اگر ضریب اصطکاک میان نردبان و زمین برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، بزرگترین وزنی را پیدا کنید که می‌توان به بالای نردبان آویزان کرد بی آنکه نردبان بلغزد.

۱۴- میله‌ای یکنواخت درون بشکه استوانه‌ای شکل ناصافی قرار دارد که به زمین محکم شده است و محور آن افقی است. اگر میله در صفحه‌ای قائم عمود بر محور بشکه قرار داشته باشد، نشان دهید که حداقل ممکن برای زاویه انحراف آن نسبت به قائم به اندازه‌ای است که تانژانت آن برابر است با $\frac{\cos \gamma}{\sin 2\lambda} + \cot \gamma$ که در آن λ زاویه اصطکاک میان میله و بشکه، و γ زاویه مرکزی میله از نزدیکترین نقطه واقع بر محور بشکه است.

۱۵- پای نردبانی، به طول 9 m و جرم 25 kg ، در سطح افقی ناصافی قرار دارد، و انتهای بالایی نردبان با دیوار قائم ناصافی در تماس است. نردبان در صفحه‌ای قائم عمود بر دیوار قرار دارد. نخستین پله نردبان در فاصله 30 cm از پای نردبان است و بقیه پله‌ها نیز به فاصله 30 cm از یکدیگرند. هنگامی که زاویه شیب نردبان نسبت به افق 60° است و ضریب اصطکاک هر دو سر نردبان $5/25$ است، بالاترین پله‌ای را پیدا کنید که شخصی به جرم 75 kg می‌تواند تا آن بالا برود بی آنکه نردبان بلغزد.

۱۶- نردبانی یکنواخت به طول $2a$ بر صفحه‌ای افقی و ناصاف در نقطه O قرار دارد. ریسمانی به بالای این نردبان بسته شده است و از روی قرقره ثابتی که به فاصله $2a$ بالای قائم O است عبور کرده است. به این ترتیب نردبان زاویه α نسبت به قائم ساخته است. ثابت کنید که تعادل فقط هنگامی ممکن است برقرار شود که ضریب اصطکاک میان نردبان و صفحه افقی بزرگتر از $\frac{1}{2} \tan \alpha$ باشد.

۱۷- ثابت کنید که اگر ضریب اصطکاک با دیوار قائم و زمین افقی به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ باشد،

كمتريـن اندازه زاويـه انحراف يك نردبان با افق كه در صفحهـاي قائم قرار دارد و يك سرآن بر زمين و سردیگر آن به دیوار تکیه دارد در حدود $۵۱^{\circ}۲۰'$ است

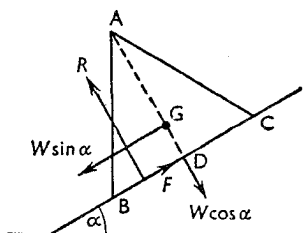
۱۸- میله‌ای یکنواخت به حالت تعادل حد قرار دارد. این میله میان دو صفحه قرار دارد که یکی افقی است و دیگری با آن زاویه ۱۳۵° می‌سازد. شیب میله نسبت به هر دو صفحه یکسان است. اگر زاویه اصطكاك میان میله و سطح شیبدار $۲۲/۵^{\circ}$ باشد، ثابت کنید که ضریب اصطكاك میان میله و صفحه افقی $\frac{1}{17}(3\sqrt{2}+1)$ است.

۱۹- A، يك سـرمیله یکنواخت AB، در تماس با صفحه‌ای شیبدار است که زاویه ۳۰° با افق می‌سازد. میله با جهت روبه بالای صفحه زاویه ۳۰° می‌سازد و در صفحه‌ای قائم است که از خط بزرگترین شیب صفحه می‌گذرد. این میله به كمك ریسمانی که به سردیگر آن متصل است و به موازات صفحه نگاهداری شده است به حال تعادل قرار دارد. ثابت کنید که زاویه اصطكاك در A باید دست کم به اندازه‌ای باشد که تانژانت آن $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ است.

۲۰- به يك سر A از سیم سنگین یکنواخت AB حلقه‌ای سبك متصل است که می‌تواند در راستای میله افقی ناصافی بلغزد. B سردیگر سیم به كمك نخ انعطاف‌ناپذیر سبکی به نقطه C از میله متصل است. اگر سیم، هنگامی که زاویه α با قائم می‌سازد و $\angle ABC = 90^{\circ}$ است، در حالت تعادل حد باشد، ثابت کنید که μ ، ضریب اصطكاك میان حلقه و میله، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mu(1 + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$$

۶۰۱۴. مثال ۱: مخروطی، به شعاع r و ارتفاع h ، بر صفحه‌ای ناصاف قرار دارد که زاویه انحراف آن نسبت به افق کم کم زیاد می‌شود. نشان دهید که اگر ضریب اصطكاك کمتر از $\frac{4r}{h}$ باشد، مخروط پیش از آنکه واژگون شود می‌لغزد.



حل : فرض می‌کنیم W وزن مخروط، G (شکل ۱۴-۱۵) مرکز ثقل آن، α زاویه انحراف صفحه باشد. فرض می‌کنیم R عکس‌العمل قائم و F نیروی اصطکاک وارد بر مخروط باشد. اگر مخروط بلغزد $F = \mu R$ است و اگر مخروط حول B واژگون نشود عکس‌العمل R بایستی بر B وارد شود.

اگر $W \sin \alpha > \mu W \cos \alpha$ ، یعنی $\mu < \tan \alpha$ ، باشد، مخروط می‌لغزد.

با گرفتن گشتاورها حول B ، مخروط هنگامی واژگون خواهد شد که

$$W \sin \alpha \times \frac{h}{4} > W \cos \alpha \times r$$

یعنی هنگامی که $\tan \alpha > \frac{4r}{h}$

اگر μ کمتر از $\frac{4r}{h}$ باشد، و α به تدریج بزرگ شود، $\tan \alpha$ پیش از آنکه

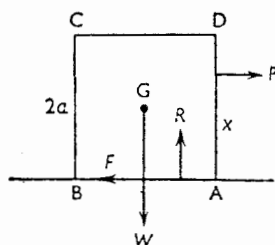
به مقدار $\frac{4r}{h}$ برسد مقداری برابر μ پیدا خواهد کرد و مخروط شروع به لغزش می‌کند.

اگر μ بزرگتر از $\frac{4r}{h}$ باشد، $\tan \alpha$ نخست مقدار $\frac{4r}{h}$ را پیدا می‌کند و مخروط واژگون خواهد شد.

اگر μ برابر $\frac{4r}{h}$ باشد، مخروط، همزمان، شروع به لغزش و واژگون شدن می‌کند.

مثال ۲: بلوکی به شکل مکعب که هر ضلع آن $2a$ است بر صفحه‌ای افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک میان بلوک و صفحه برابر μ است. نیرویی افقی که به تدریج زیاد می‌شود بوجه قائم مکعب و عمود بر آن و در صفحه‌ای قائم که از مرکز ثقل مکعب می‌گذرد وارد می‌شود. نشان دهید که اگر نقطه اثر نیرو در ارتفاعی بالاتر از $\frac{a}{\mu}$ باشد، در صورتی که $\mu < \frac{1}{4}$ باشد مکعب بی آنکه یک‌بار شروع به لغزش خواهد کرد، و در صورتی که $\mu > \frac{1}{4}$ باشد مکعب بی آنکه بلغزد یک‌بار خواهد شد.

حل : فرض می‌کنیم $ABCD$ (شکل ۱۴-۱۱) برش قائم مکعب باشد که از مرکز ثقل



شكل ۱۴-۱۱

آن، G ، می‌گذرد و نیروی P بر آن وارد می‌شود، و فرض می‌کنیم که P در ارتفاع x از بالای صفحه باشد. عکس‌العمل قائم را R و نیروی اصطكاك را F می‌نامیم.

برای لغزش $P > \mu W$ است، زیرا $F = \mu R$ و $R = W$

برای يك بر شدن، R باید بر A وارد شود و

$$Px > Wa \quad \text{یا} \quad P > W \frac{a}{x}$$

چون کمترین اندازه $\frac{a}{x}$ برابر $\frac{a}{2a}$ یعنی $\frac{1}{2}$ است، در صورتی که $\mu < \frac{1}{2}$

باشد، P با افزایش خود ابتدا به اندازه μW می‌رسد، به طوری که در این حالت مكعب بی‌آنكه يك بر شود می‌لغزد.

اگر $\mu > \frac{1}{2}$ باشد، بسته به اینکه $\mu > \frac{a}{x}$ یا $\mu < \frac{a}{x}$ باشد، یعنی بسته

به اینکه $x > \frac{a}{\mu}$ یا $x < \frac{a}{\mu}$ باشد، مكعب يك بر می‌شود یا می‌لغزد.

بنابراین اگر $x > \frac{a}{\mu}$ باشد مكعب بی‌آنكه بلغزد سرنگون می‌شود.

تمرین ۲۰۱۴

۱ - قاعده استوانه‌ای یکنواخت، به شعاع r و ارتفاع h ، بر صفحه‌ای ناصاف قرار دارد که شیب آن نسبت به افق به تدریج زیاد می‌شود. نشان دهید که اگر $\frac{2r}{h}$ کمتر از

ضریب اصطكاك باشد، استوانه پیش از آنكه بلغزد سرنگون خواهد شد.

۲ - مخروطی قائم را از قاعده بر صفحه شیبدار ناصافی می‌گذارند. اگر ضریب اصطكاك برابر $5/25$ باشد، و اگر مخروط همزمان در حال لغزش و سرنگونی باشد، زاویه

مخروط را پیدا کنید.

۳ - مثلثی متساوی الاضلاع در صفحه‌ای قائم طوری قرارداد که يك ضلع آن بر روی صفحه‌ای افقی و ناصاف تکیه دارد. نیرویی افقی که به تدریج اضافه می‌شود، بر بالاترین رأس مثلث در صفحه مثلث وارد می‌شود. ثابت کنید که اگر ضریب اصطکاک کمتر از $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ باشد، مثلث پیش از آنکه سرنگون شود می‌لغزد.

۴ - مستطیلی با اضلاع a و h در صفحه‌ای قائم طوری قرارداد که يك ضلع آن به طول a بر میز افقی ناصافی تکیه دارد. نیرویی افقی که به تدریج افزوده می‌شود در صفحه مستطیل بر بالاترین ضلع وارد می‌شود. شرط آن را که مستطیل پیش از لغزیدن سرنگون شود پیدا کنید.

۵ - مخروطی قائم بر صفحه افقی ناصافی قرارداد و بر رأس آن نیرویی افقی وارد می‌شود که به تدریج افزایش می‌یابد. اگر شعاع r و ارتفاع مخروط باشد، نشان دهید که بسته به اینکه ضریب اصطکاک بزرگتر یا کوچکتر از $\frac{r}{h}$ باشد مخروط سرنگون خواهد شد یا می‌لغزد.

۶ - ضلع BC ، از تیغه مثلث شکل ABC که در رأس C قائمه است، بر صفحه افقی ناصافی قرارداد. اگر این صفحه حول محوری که در خودش و عمود بر BC است کج شود، به طوری که C از B پایینتر بیاید، نشان دهید که تیغه، بسته به اینکه ضریب اصطکاک کمتر یا بیشتر از $\tan A$ باشد شروع به لغزش یا يك بر شدن خواهد کرد.

۷ - بلوک مکعبی شکل یکنواختی بر روی سطح شیبدار ناصافی گذاشته شده است. ریسمانی به نقطه وسط لبه بالایی مکعب که افقی است متصل است. این ریسمان به موازات خط بزرگترین شیب سطح است. نشان دهید که زاویه شیب سطح باید کمتر از اندازه‌ای باشد که تانژانت آن $(1 + 2\mu)$ است، که در آن μ ضریب اصطکاک است.

۸ - بر روی سطح شیبدار ناصافی که زاویه شیب آن α است ($\alpha < \frac{1}{4}\pi$)، مکعبی قرار گرفته است. دولبه بالایی و دولبه پایینی مکعب افقی هستند. ریسمانی به نقطه وسط بالاترین لبه این مکعب متصل است و مکعب را به موازات خط بزرگترین شیب سطح می‌کشد. نشان دهید که، اگر ضریب اصطکاک میان سطح شیبدار و مکعب از $\frac{1}{4}(1 - \tan \alpha)$ تجاوز کند، امکان ندارد که بدون سرنگون شدن مکعب، آن را از جایش کشاند.

۹ - مکعبی یکنواخت با لبه a بر صفحه افقی ناصافی قرارداد. نیرویی افقی که به تدریج

زیاد می شود بر یکی از وجوه قائم مکعب و در ارتفاع a بالای مرکز وجه واردمی شود. نشان دهید که در هر يك از حالت های زیر تعادل چگونه به هم می خورد.

(الف) هنگامی که ضریب اصطكاك میان صفحه شیب دار و مكعب برابر

$\frac{5}{8}$ است.

(ب) هنگامی که ضریب اصطكاك برابر $\frac{7}{8}$ است.

۱۰- مثلث ABC ، که در آن BC افقی است و AB و AC با هم برابر و بزرگتر از BC هستند، برش منشور مثلث القاعده ای را نشان می دهد که یکی از وجوه مستطیل آن بر روی سطح افقی ناصافی قرار گرفته است، و وجه دیگر آن که با AB نشان داده می شود تحت تأثیر فشار باد است. α زاویه انحراف هر يك از وجوه شیب دار نسبت به قاعده است و باد عمود بر AB می وزد. نشان دهید که اگر فشار باد به اندازه کافی زیاد شود، بسته به اینکه زاویه اصطكاك بزرگتر یا کوچکتر از $\pi - 2\alpha$ باشد، منشور سرنگون خواهد شد یا می لغزد.

۱۱- جعبه ای مکعبی شکل، که طول هر ضلع آن a و وزن آن W است، بر سطح افقی ناصافی قرار دارد. میله ای سنگین به طول b و وزن w طوری قرار گرفته است که يك سر آن روی سطح افقی و با آن زاویه 45° می سازد و سر دیگر آن بر وجه قائم جعبه تکیه دارد. صفحه قائمی که میله در آن است از مرکز جعبه می گذرد. اگر از لغزش انتهای پایینی میله جلوگیری کنیم، حداقل ضریب اصطكاك میان جعبه و سطح افقی را برای آنکه جعبه نلغزد پیدا کنید. از اصطكاك میان میله و جعبه صرف نظر می کنیم. همچنین اگر جعبه در حال افتادن باشد، نسبت میان وزن میله و وزن جعبه را پیدا کنید.

۱۲- مکعبی یکنواخت که طول هر ضلع آن $4a$ و وزن آن W است بر سطح افقی ناصافی تکیه دارد. نیروی P که به تدریج زیاد می شود عمود بر وجه F و به طرف داخل مکعب، در نقطه ای وارد می شود که بر روی خط قائمی است که از مرکز این وجه می گذرد و به فاصله a از این مرکز است. ثابت کنید که، بسته به اینکه ضریب اصطكاك میان مکعب و سطح افقی کمتر یا بیشتر از مقدار معینی باشد، تعادل با لغزش یا يك بر شدن مکعب به هم می خورد. این مقدار را پیدا کنید.

اگر P به اندازه ای نرسد که تعادل به هم بخورد و $P = \frac{1}{4}W$ باشد، پیدا

کنید که عکس العمل قائم در چه فاصله ای از وجه F مکعب وارد می شود.

۷۰۱۴. مثال: دو میله هم طول AB و BC ، که در B آزادانه به هم مفصل شده اند، در

صفحه‌ای قائم به حال تعادل هستند و دوانتهای A و C بر سطح ناصاف افقی قرار دارند. اگر وزن AB دو برابر وزن BC باشد، نشان دهید که اصطکاک حدنی می‌تواند هم در A و هم در C باشد، و اگر اصطکاک حد در یکی از این دو نقطه برقرار باشد آن نقطه C است. همچنین اگر بزرگترین زاویه‌ای که میله‌ها می‌توانند با هم بسازند قائمه باشد، ضریب اصطکاک را پیدا کنید.

حل : نیروهای اصطکاک در A و C (شکل ۱۴-۱۲) باید برابر باشند، زیرا آنها نیروهای خارجی افقی هستند که بر میله‌ها اثر می‌کنند. اگر $\angle ABC = 2\theta$ و عکس‌العمل‌های در A و C برابر S و R باشند، در صورتی که حول A گشتاورها را برای هر دو میله بگیریم خواهیم داشت

$$S \times 4l \sin \theta = W \times 3l \sin \theta + 2Wl \sin \theta$$

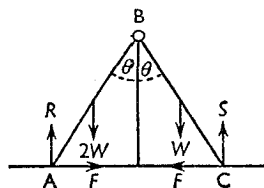
که در آن $4l$ طول AB یا BC است.

$$\therefore S = \frac{5}{4}W$$

$$\therefore R = \frac{7}{4}W$$

حال اگر اصطکاک در A برابر حد باشد اندازه آن باید μR یا $\frac{7}{4}\mu W$ باشد.

و حال آنکه اگر در C برابر حد باشد اندازه آن باید μS یا $\frac{5}{4}\mu W$ باشد. اما نیروی اصطکاک در A و C باید یک اندازه باشد، و بنابراین نمی‌تواند در هر دو نقطه برابر حد باشد، زیرا $\frac{5}{4}\mu W$ نمی‌تواند برابر $\frac{7}{4}\mu W$ باشد.



شکل ۱۴-۱۲

همچنین روشن است که F پیش از آنکه برابر $\frac{7}{4}\mu W$ شود برابر $\frac{5}{4}\mu W$ خواهد شد، بنابراین اگر بخواند در یکی از دو نقطه حد باشد آن نقطه C خواهد بود. وقتی که $2\theta = 90^\circ$ است نقطه C در حالت شروع به لغزش است و حال آنکه

A چنین نیست و نیروی اصطكاكى در A و C هردو برابر $\frac{5}{4}\mu W$ است.

بنابراین با گرفتن گشتاور حول B برای میله BC خواهیم داشت:

$$\frac{5}{4}\mu W \times 2l \cos \theta = S \times 2l \sin \theta - W \times l \sin \theta$$

$$\therefore \frac{5}{4}\mu W = 2S \sin \theta - W \sin \theta$$

$$\therefore \frac{5}{4}\mu W = 2 \times \frac{5}{4}W - W = \frac{3}{4}W$$

$$\therefore \mu = \frac{3}{5}$$

تمرین ۳۰۱۴

۱ - دو میله AB و BC، که کلفتی و جنس آنها یکسان است، به ترتیب m و 0.9 و 0.6 m طول دارند و آزادانه به هم مفصل شده اند. دستگاه در صفحه ای قائم طوری قرار دارد که دو انتهای A و C بر روی سطح افقی ناصافی تکیه دارند. اگر بزرگترین اندازه ممکن برای زاویه ABC در شرایط تعادل برابر 90° باشد، ضریب اصطكاك میان میله ها و سطح افقی را پیدا کنید، و همچنین تعیین کنید که، اگر زاویه میان دو میله اندك اندك از 90° بیشتر شود، تعادل چگونه به هم می خورد.

۲ - دو میله یکنواخت، هموزن و هم طول AB و BC در نقطه B آزادانه به هم مفصل شده اند و در صفحه ای قائم طوری قرار دارند که دو انتهای A و C بر روی سطح افقی ناصافی تکیه دارند. اگر تعادل فقط هنگامی ممکن باشد که $\angle ABC$ کوچکتر از زاویه قائمه باشد، ضریب اصطكاك میان میله ها و سطح افقی را پیدا کنید.

۳ - دو نردبان یکنواخت AB و BC، با طولهای برابر و وزنهاى W و $W' (W > W')$ ، از بالای خود، B، به یکدیگر لولاً شده اند و هنگامی که با هم زاویه 2θ می سازند بر زمین ناصاف ایستاده اند. نشان دهید که زاویه عكس العمل كل در A با خط قائم كوچكتر از زاویه عكس العمل كل در C با خط قائم است. به فرض آن که ضریبهای اصطكاك در A و C هريك برابر μ است، نشان دهید که با زیاد شدن θ ، سرانجام در C لغزش روی می دهد و در این صورت

$$\mu = \left(\frac{W + W'}{W + 3W'} \right) \tan \alpha$$

که در آن α اندازه ای از θ است که برای آن لغزش روی می دهد.

۴ - AB و BC دوميله يکخواخت و همطولند که وزن هر کدام برابر W است و در B آزادانه به هم متصل شده اند. دوانتهای A و C در تماس با سطحی ناصافند که شیب آن α است. ABC در صفحه ای قائم واقع است و خطی که A و C را به هم وصل می کند بر روی خط بزرگترین شیب صفحه است و ميله BC به طور افقی قرار گرفته است. پیداکنید که در نقطه های A و C چه فشارهایی بر سطح وارد می شود، و اصطکاک در این نقطه ها چقدر است. نشان دهید که $\cos^2 \alpha$ باید بزرگتر از $\frac{1}{3}$ باشد، و

در نقطه C، بسته به آنکه $\cos^2 \alpha$ کوچکتر یا بزرگتر از $\frac{2}{3}$ باشد، اصطکاک به سوی بالا یا پایین سطح وارد می شود. اگر $\alpha = 30^\circ$ باشد، و در یکی از نقطه های A و C اصطکاک در حالت حد باشد، آن نقطه کدام است، و ضریب اصطکاک را تعیین کنید.

۵ - دوميله يکخواخت و همطول AB و BC به طور صیقلی در نقطه B به هم متصل شده اند که انتهای C بر روی سطح افقی ناصافی قرار دارد و انتهای A بالای این سطح نگاهداری شده است و مجموعه دوميله به حال تعادلند. ثابت کنید که اگر α و β زاویه های شیب BA و CB نسبت به افق باشند، ضریب اصطکاک باید از مقدار زیر بیشتر باشد.

$$\frac{2}{tg\beta - 3tg\alpha}$$

۶ - یک جفت پله، که طول آنها یکسان اما وزن آنها برابر است، از بالا به هم به طور آزاد مفصل شده اند. دو طرف دیگر پله ها بر روی سطح افقی ناصافی تکیه دارند و مجموعه در صفحه ای قائم قرار دارد. پله ها به تدریج از هم بازمی شوند. ثابت کنید که ابتدا پله سبکتر آغاز به لغزش می کند، و آن هنگامی روی خواهد داد که تانژانت زاویه انحراف هریک از پله ها با قائم برابر مقدار زیر است:

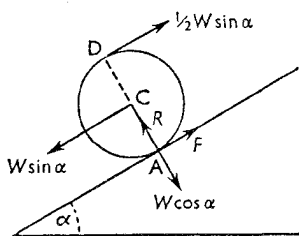
$$\frac{3W_1 + W_2}{W_1 + W_2} \mu$$

که در آن W_1 و W_2 وزن پله ها ($W_1 < W_2$)، و μ ضریب اصطکاک هریک از پله ها با سطح افقی است.

۸-۱۴. مثال ۱: بر روی سطح شیبدار ناصافی که زاویه آن با افق برابر α است، کره ای یکنواخت با نیرویی به بزرگی $\frac{1}{4}W \sin \alpha$ که مماس بر محیط کره وارد می شود به حال تعادل است (W وزن کره است). ثابت کنید که نیرو باید به موازات سطح

شیبدار وارد شود و ضریب اصطكاك نباید کمتر از $\frac{1}{4}tg\alpha$ باشد.

حل : فرض می کنیم A (شکل ۱۴-۱۳) نقطه تماس کره، C مرکز آن و α شعاع آن باشد. در این صورت اگر کره حول A نغلتد گشتاور نیروی $\frac{1}{4}W\sin\alpha$ حول A باید برابر گشتاور نیروی وزن حول A، یعنی برابر $W\sin\alpha$ باشد.



شکل ۱۴-۱۳

بنابراین نیروی $\frac{1}{4}W\sin\alpha$ باید به فاصله $2a$ از A باشد، و بنابراین باید به موازات سطح شیبدار بر D، انتهای دیگر قطری که A می گذرد، وارد شود. اگر لغزش وجود نداشته باشد، با تجزیه به موازات سطح شیبدار خواهیم داشت:

$$F + \frac{1}{4}W\sin\alpha = W\sin\alpha$$

که در آن $R = W\cos\alpha$ و $F \leq \mu R$

$$\therefore \frac{1}{4}W\sin\alpha \leq \mu W\cos\alpha$$

$$\therefore \mu \geq \frac{1}{4}tg\alpha$$

مثال ۲: زنجیری سنگین بر روی سطح شیبدار ناصافی که با افق زاویه α می سازد قرار گرفته است. بخشی از زنجیر به طول a متر در امتداد خط بزرگترین شیب صفحه است و بخش باقیمانده به طول b متر از بالای سطح به طور قائم آویزان است. اگر زنجیر در حالت شروع به لغزش باشد، نشان دهید که b یا صفر یا $2asina$ است.

حل : فرض می کنیم ABC (شکل ۱۴-۱۴) نشان دهنده زنجیر باشد. وزن واحد طول زنجیر را w فرض می کنیم. نیروی اصطكاك که بر AB اثر می کند $\mu aw\cos\alpha$ است

که چون $\mu = \tan \alpha$ است، این مقدار برابر $aw \sin \alpha$ است.
اگر A در حالت شروع به حرکت به سوی پایین باشد

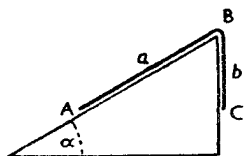
$$w a \sin \alpha - w a \sin \alpha = b w$$

$$\therefore b = 0$$

اگر A در حالت شروع به حرکت به طرف بالا باشد

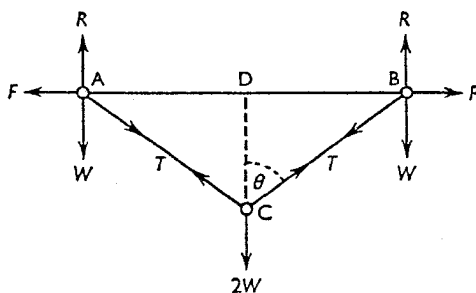
$$b w = w a \sin \alpha + w a \sin \alpha$$

$$\therefore b = 2 a \sin \alpha$$



شکل ۱۴-۱۴

مثال ۳: دوحلقه با وزنه‌های برابر آزادانه در امتداد میلۀ افقی ناصافی حرکت می‌کنند که ضریب اصطکاک حد برابر μ است. این دوحلقه با ریسمانی صیقلی به طول l به هم وصل شده‌اند. حلقه‌ای هموزن مجموع دوحلقه دیگر در این ریسمان می‌تواند آزادانه حرکت کند. ثابت کنید هنگامی که دستگاه در حالت تعادل است دوحلقه‌ای که در میله‌اند نمی‌توانند دورتر از $l^{1/2} - \mu(1 + 4\mu^2)^{1/2}$ از یکدیگر بروند.



شکل ۱۴-۱۵

حل : فرض می‌کنیم وزن هریک از وزنه‌های A و B (شکل ۱۴-۱۵) برابر W و وزن C برابر $2W$ باشد.

در این صورت چون C آزادانه در ریسمان حرکت می‌کند، کشش ریسمان

درسراسر آن یکسان است و خط قائم CD که از C می‌گذرد نیمساز زاویه ACB است. فرض می‌کنیم $\angle DCB = \theta$.

با تجزیه در امتداد قائم برای C خواهیم داشت:

$$2T \cos \theta = 2W$$

عکس العمل R میان A و میله برابر است با

$$W + T \cos \theta = 2W$$

و بنابراین حداکثر اصطكاك در A برابر است با $2\mu W$.

در حالت تعادل $T \sin \theta = F > 2\mu W$

$$W \tan \theta > 2\mu W \quad \text{یا}$$

$$\tan \theta > 2\mu \quad \text{یا}$$

اگر $DB = x$ باشد $DC^2 = \frac{l^2}{4} - x^2$ و $\tan \theta = \frac{x}{DC}$ خواهد بود.

$$\therefore \frac{x^2}{\frac{1}{4}l^2 - x^2} > 4\mu^2$$

$$\therefore x^2 > \mu^2 l^2 - 4x^2 \mu^2$$

$$\therefore x^2(1 + 4\mu^2) > \mu^2 l^2$$

$$\therefore x > \frac{\mu l}{\sqrt{1 + 4\mu^2}}$$

تمرین ۴.۱۴

۱ - الواری سنگین به طول a بر روی سطح افقی ناصافی افتاده است. به يك انتهای آن ریسمانی متصل است که با افق زاویه α می‌سازد. به كمك این ریسمان انتهای الوار به آرامی بلند می‌شود. نشان دهید که اگر μ ، ضریب اصطكاك، كوچکتر از $\cot \alpha$ باشد، انتهای دیگر الوار، ناگهان می‌لغزد. اگر، هنگامی که لغزش شروع می‌شود، $\mu \tan \alpha$ از يك بیشتر شود، نسبت کشش ریسمان را به وزن الوار پیدا کنید.

۲ - جسمی به وزن W بر سطحی افقی قرار دارد که ضریب اصطكاك آن μ است. نیروی افقی برابر nW ، که كوچکتر از μW است، بر W وارد می‌شود. نیروی افقی دیگر P ، نیز عمود بر W وارد می‌شود. حداقل اندازه P را که سبب حرکت W شود پیدا کنید و زاویه انحراف جهت حرکت را نسبت به جهت P پیدا کنید.

۳ - داربست مربع شکل صلبی از سیم سنگین یکنواخت تشکیل شده است و در صفحه‌ای

قائم بر روی استوانه‌ای افقی و ناصاف به شعاع a طوری قرار گرفته است که دوضلع آن در تماس با استوانه است. نشان دهید که در حالت حد θ ، زاویه انحراف قطر داربست نسبت به افق، از معادله زیر به دست می‌آید:

$$b \sin \theta = a \sqrt{2} \sin \epsilon \cos(\theta + \epsilon)$$

که در آن ϵ زاویه اصطکاک و b فاصله میان مرکز مربع از محور استوانه است.

۴ - با مقداری سیم مثلی متساوی الاضلاع ساخته شده است. این مثلث در صفحه‌ای قائم طوری قرار گرفته است که یک ضلع آن افقی است. به هر ضلع مثلث دانه تسبیحی به وزن W کشیده شده است و این دانه‌ها با ریسمان درازی که در حالت کشش است به هم متصل شده‌اند. ریسمان از حلقه‌های صیقلی کوچکی که در گوشه‌های مثلث نصب شده‌اند عبور کرده است. ثابت کنید که اگر نیروی افقی که به تدریج زیاد می‌شود بردانه ضلع افقی وارد شود، هنگامی که اندازه نیرو به $2\mu W$ برسد، که در آن μ ضریب اصطکاک میان دانه‌ها و سیم است، دستگاه شروع به حرکت خواهد کرد.

۵ - دو میله یکنواخت و هم‌طول AB و CD هر یک به وزن W آزادانه از وسط به هم مفصل شده‌اند و در صفحه‌ای قائم طوری قرار گرفته‌اند که دوانتهای A و C بر سطح افقی ناصافی به ضریب اصطکاک μ تکیه کرده‌اند. نخ‌کی که به دوسر آن وزنه‌هایی هر یک به وزن W متصل است از B و D می‌گذرد. ثابت کنید که در حالت تعادل حدمیله‌ها با افق زاویه‌ای می‌سازند که تانژانت آن برابر است با

$$\frac{3}{1+2\mu}$$

۶ - گوه‌ای به وزن W بر زمینی ناصاف قرار دارد. انتهای نازک آن به دیواری قائم و صیقلی فشار می‌آورد. وجه شیبدار گوه زاویه‌ای برابر 2θ با دیوار می‌سازد. استوانه قائم مدوری که صیقلی و به وزن W است میان گوه و دیوار قرار دارد. هنگامی که گوه در حالت شروع به بلغزش است و ضریب اصطکاک میان زمین و گوه برابر μ است، رابطه میان W و W_1 را پیدا کنید.

۷ - میله سبک AD در نقطه B از روی میخی ناصاف و در نقطه C از زیر میخی ناصاف که در همان خط افقی قرار دارد می‌گذرد. به دوسر A و D به ترتیب وزنه‌هایی به وزن N و $9N$ متصل است. طولهای AB ، BC و CD به ترتیب برابرند با 0.9 m ، 0.6 m و 0.3 m . اگر کمترین نیروی افقی که میله را به حرکت

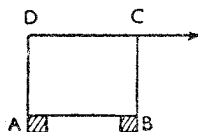
وامی دارد N ۶ باشد، به شرط آنکه ناصافی میخها یکسان باشد، ضریب اصطكاك را پیدا کنید.

۸ - گوه ای به جرم M که وجوه آن با هم زاویه α می سازند از يك وجه با سطحی افقی در تماس است. جسمی كوچك به جرم m در تماس با وجه دیگر قرار دارد و به كمك نیرویی افقی از لغزش آن به سمت پایین جلوگیری می شود. اگر $(\mu < \tan \alpha)$ ضریب اصطكاك جسم و گوه باشد، كوچكترین مقدار اصطكاك میان گوه و سطح افقی چقدر باید باشد تا گوه به حالت سکون باقی بماند؟

۹ - استوانه مدور ناصافی به قطر d بر سطح افقی ناصافی قرار دارد، ناصافی هردو یکسان است. میله ای یکنواخت به طول $2l$ مماس بر استوانه، در صفحه ای قائم که عمود بر محور استوانه است، قرار دارد. سر دیگر میله بر روی سطح افقی است. اگر اصطكاك در هردو سر میله به حالت حد باشد، هنگامی که میله زاویه 30° با قائم می سازد، ثابت کنید که زاویه اصطكاك $\frac{1}{2} \text{Arcsin} \frac{l}{d}$ است.

۱۰ - دو نقطه مادی یکسان، هریك به وزن W ، بر روی میز افقی ناصافی گذاشته شده اند و با ریسمان محکم انعطاف ناپذیری به هم متصل شده اند. ثابت کنید که حداقل نیروی افقی که می تواند بر یکی از آنها، در جهتی که با ریسمان زاویه θ می سازد، اثر کند و سبب شود که نقطه های مادی به حال شروع به حرکت در آیند $2\mu W \cos \theta$ است، که در آن μ ضریب اصطكاك میان هریك از نقطه های مادی و میز است.

۱۱ - شکل ۱۴-۱۶ برش مرکزی ABCD از جعبه ای را نشان می دهد که پر از شن است و با نیرویی افقی که بر C وارد می شود به سوی جلو کشانده می شود. جعبه در A و B بر دو میله عرضی متصل است و کل دستگاه بر روی سطح زمین، که ضریب



شكل ۱۴-۱۶

اصطكاك آن با میله ها در A و B برابر μ است، کشانده می شود. اگر $AB = l$ ، $BC = h$ و وزن جعبه و شن برابر W باشد، ثابت کنید که عكس العمل های قائم در A

$$\text{و B به ترتیب برابرند با } \frac{l - 2\mu h}{2l} W \text{ و } \frac{l + 2\mu h}{2l} W$$

۱۲- میله یکنواخت سنگینی در A بر روی یک میخ ناصاف و در B در زیر یک میخ ناصاف در صفحه‌ای قائم قرار دارد. B بالاتر از A واقع است. نشان دهید که کوتاهترین میله‌ای که می‌تواند در این وضع به حال سکون بماند به طول $a(1 + \operatorname{tg} \alpha \cot \lambda)$ است، که در آن a فاصله میان میخها، α زاویه انحراف خط میان میخها نسبت به افق، و λ زاویه اصطکاک است.

۱۳- تیغه مدور یکنواختی به شعاع a و وزن W ، بر روی دو سطح ثابت ناصاف که هریک با افق زاویه 45° می‌سازد، در صفحه‌ای قائم قرار گرفته است، به طوری که خط تلاقی این دو سطح عمود بر صفحه قائم تیغه است. اگر ضریب اصطکاک در هر محل تماس برابر $\frac{1}{4}$ باشد، ثابت کنید که کمترین زوج لازم برای آنکه تیغه را در صفحه خودش حول مرکز آن بچرخاند دارای گشتاوری برابر $\frac{2\sqrt{2}Wa}{5}$ خواهد بود.

۱۴- کره‌ای بر روی سطح شیبدار ناصافی که با افق زاویه α می‌سازد قرار دارد. در نقطه‌ای از محیط کره و در صفحه‌ای قائم که از مرکز کره و خط بزرگترین شیب سطح عبور می‌کند نیرویی به طور مماس بر کره وارد می‌شود. جهت این نیرو با افق زاویه‌ای برابر β (در همان جهت α) می‌سازد. اگر ضریب اصطکاک برابر μ باشد، ثابت کنید که

$$\mu \geq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

اگر β تغییرپذیر باشد، ثابت کنید که کمترین مقدار μ برای آنکه تعادل امکانپذیر باشد برابر است با $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$.

اما اگر نیرویی که وارد می‌شود حداقل مقدار را داشته باشد، ثابت کنید

که این کمترین مقدار μ برابر است با $\frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha$.

۱۵- چرخ در صفحه‌ای قائم طوری قرار گرفته است که می‌تواند آزادانه حول مرکز خودش، C ، بچرخد. میله یکنواخت AB به وزن W به طور صیقلی در A لولاشده است و A همتراز با C است. میله در نقطه D با چرخ تماس دارد. ثابت کنید که برای چرخاندن چرخ زوجی لازم است که گشتاور آن بزرگتر است از

$$\frac{\mu W \times AB \times CD}{2AC}$$

که در آن μ ضریب اصطکاک میان میله و چرخ است. همچنین ثابت کنید که هنگامی

که چرخ آن چنان می‌چرخد که نقطه تماس D با میله به طرف B حرکت می‌کند، در صورتی که زاویه انحراف میله با افق $\text{Arc } \tan \mu$ باشد، عکس العمل در A قائم خواهد بود.

۱۶- استوانه‌ای مدور به وزن W با دیوار ناصاف قائمی در تماس است. نخ‌کی که سر آن به بخشی از دور استوانه پیچیده شده است و سر دیگر آن به نقطه‌ای از دیوار متصل است و با دیوار زاویه‌ای برابر α می‌سازد استوانه را طوری نگه می‌دارد که محور آن افقی است. نشان دهید که ضریب اصطكاك نباید کمتر از $\frac{1}{\sin \alpha}$ باشد، و فشار قائم بر دیوار برابر است با $W \tan \frac{1}{\mu} \alpha$.

۱۷- کره‌ای به وزن W بر سطح شیب‌دار ناصافی که با افق زاویه 45° می‌سازد، در صورت امکان با نیروی افقی P که بر بالاترین نقطه کره وارد می‌شود، به حال تعادل می‌ماند.

(۱) نشان دهید که اگر μ ، ضریب اصطكاك میان سطح شیب‌دار و کره، کمتر از $1 - \sqrt{2}$ باشد، تعادل ناممکن است.
(۲) نشان دهید که اگر μ برابر یا بزرگتر از $1 - \sqrt{2}$ باشد، تعادل امکانپذیر است. بزرگی P را به دست آورید و تعیین کنید که هنگامی که μ بزرگتر از $1 - \sqrt{2}$ است تعادل به حال حد است یا خیر.

۱۸- صدف نیمکره‌ای شکل نازکی است که سطح انحنادار آن از یک طرف بر روی سطح افقی ناصافی با ضریب اصطكاك μ قرار دارد و از یک طرف با دیوار قائم ناصافی با ضریب اصطكاك μ' در تماس است. اگر هنگامی که لبه آن با افق زاویه 30° می‌سازد، صدف در حال لغزش باشد، رابطه میان μ و μ' را پیدا کنید و ثابت کنید که اگر $\frac{1}{3} < \mu' < \mu$ باشد، μ باید اندازه‌ای میان $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{4}$ داشته باشد (مرکز ثقل صدف نیمکره‌ای شکل نازک، شعاع را نصف می‌کند).

۱۹- جام نیمکره‌ای شکل نازکی از سمت انحنادار آن بر روی سطح افقی ناصافی قرار دارد که ضریب اصطكاك آن μ است. جام به یک دیوار قائم صیقلی تکیه دارد. ثابت کنید که هنگامی که جام در حال شروع به لغزش است، زاویه انحراف محور جام با قائم به اندازه‌ای است که سینوس آن برابر 2μ است.

۲۰- یک سربله یکنواخت AB، با سطح شیب‌دار ناصافی که زاویه آن با افق برابر 30° است در تماس است. میله با جهت روبه بالای سطح شیب‌دار زاویه 45° می‌سازد

و در صفحه‌ای قائم قرارداد که از خط بزرگترین شیب صفحه می‌گذرد. به کمک نخ‌کی که به B، انتهای دیگر میله، بسته شده است، و به موازات سطح کشیده می‌شود، میله به حال تعادل مانده است. ثابت کنید که زاویه اصطکاک در A باید

دست کم به اندازه‌ای باشد که تانژانت آن برابر است با $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$.

۱۵

ماشینها

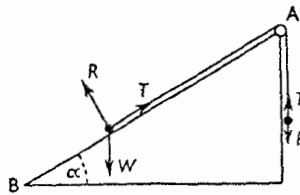
۱۰۱۵. در این بخش چند مثال ساده از ماشینها را در نظر می گیریم. ماشین وسیله ای است که ددآن، دريك بخش از ماشین با وارد آوردن نیرویی به نام نیروی محرك، کار انجام می شود و در بخش دیگر، ماشین با غلبه بر نیرویی خارجی به نام نیروی مقاوم، کار انجام می دهد.

در بسیاری از حالتها ماشین طوری تنظیم شده است که نیرویی کوچک بر نیرویی بزرگتر غلبه می کند.

۲۰۱۵. سطح شیبدار را می توان ماشینی ساده در نظر گرفت.

فرض می کنیم که وزنه W بر سطح صاف شیبدار AB قرار گرفته است. به این وزنه نخ متصل است که از شیار قرقره صافی که بالای سطح شیبدار نصب شده است عبور کرده است و به آن وزنه P آزادانه آویزان است (شکل ۱۵-۱). در این مثال P را می توان نیروی محرك دانست که برای بالا بردن نیروی مقاوم W به کار برده می شود.

اگر W بر سطح شیبدار به حال تعادل باقی بماند، T ، یعنی نیروی کشش نخ برابر خواهد بود با $W \sin \alpha$. اما $T = P$ است. بنابراین $P = W \sin \alpha$. هر نیروی P که اندکی از $W \sin \alpha$ بزرگتر باشد سبب خواهد شد که W به سوی بالای سطح حرکت کند. به این



شکل ۱۵-۱

ترتیب وزن W با نیرویی کمتر از W بالا برده می شود. از این رو، سطح شیب دار ماشین مفیدی خواهد بود. در واقع، از جنبه تاریخی، سطح شیب دار از کهنترین ماشینهایی است که آدمی به کار برده است.

در نظر داشته باشیم که هرگاه P مسافتی برابر x به طرف پایین بیاید، W مسافتی برابر x در راستای سطح شیب دار بالا می رود، یعنی مسافتی برابر $x \sin \alpha$ به طور قائم بالا می رود. پس کاری که P انجام می دهد برابر Px است و آن برابر کاری است که W دریافت می کند، یعنی برابر $Wx \sin \alpha$ است. (اگر سطح شیب دار اصطکاک داشته باشد، Px بزرگتر از $Wx \sin \alpha$ خواهد بود، زیرا $P = W \sin \alpha + F$ است که F نیروی اصطکاک است.) البته این نتیجه را می توانستیم از قانون بقای انرژی به دست آوریم. در یک ماشین ایده آل (مطلوب) انرژی به هدر نمی رود، و کاری که به وسیله P انجام می گیرد برابر است با کاری که W دریافت می کند. به عبارت دیگر مجموع کاری که به وسیله P و W انجام می گیرد برابر صفر است. این مفهوم را گاهی اصل کار می نامند. با این همه، در عمل، کاری که P انجام می دهد بیشتر از کاری است که W دریافت می کند. به گفته دیگر، با استفاده از ماشین کاری که انجام می شود بیشتر از کاری است که دریافت می شود (زیرا باید بر اصطکاک و حرکت بعضی از اجزای ماشین غلبه کرد). بزرگترین فایده ماشین این است که غالباً P کمتر از W است.

تعریفهای زیر بسیار مهمند:

۳.۱۵. اگر نیروی P بر ماشین وارد شود و سبب شود که ماشین نیرویی برابر W اعمال کند، نسبت $\frac{W}{P}$ را مزیت مکانیکی ماشین نامند. نسبت مسافتی که نیروی محرك P می پیماید به مسافتی که W می پیماید نسبت سرعتها نامیده می شود. به طوری که هم اکنون نشان خواهیم داد، این دو نسبت به یکدیگر مربوطند.

اگر اصطکاک نباشد، و اجزای ماشین بیوزن باشند، در این صورت بر طبق اصل کار،

مسافتی که W می پیماید $W \times$ = مسافتی که P می پیماید $P \times$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{\text{مسافتی که } P \text{ می پیماید}}{\text{مسافتی که } W \text{ می پیماید}}$$

$$= \text{نسبت سرعتها}$$

یعنی دريك ماشین ایده آل که اجزای آن بیوزن هستند، و در آن اصطكاك وجود ندارد،

مزیت مکانیکی = نسبت سرعتها

بنابراین در همه حالت هایی که نیروی محرك کمتر از نیروی مقاوم است، مسافتی که نیروی محرك می پیماید بیشتر از مسافتی است که نیروی مقاوم می پیماید. گاهی ماشین را طوری تنظیم کرده اند که به کمک آن بتوانند مسافتی را که نیروی مقاوم می پیماید افزایش دهند. در این حالت نیروی محرك باید بیشتر از نیروی مقاوم باشد. در ماشینهای واقعی که در آنها اصطكاك وجود دارد مزیت مکانیکی کمتر از نسبت سرعتهاست.

۴.۱۵. بازده يك ماشین ساده از نسبت زیر به دست می آید:

$$\frac{\text{کار مفیدی که ماشین انجام می دهد}}{\text{کاری که به ماشین داده می شود}}$$

بنابراین دريك ماشین ایده آل بازده برابر واحد است. نسبتی که بازده ماشین را بیان می کند غالباً به صورت درصد بیان می شود. بنابراین بازده يك ماشین ایده آل ۱۰۰ درصد است.

بازده را ممکن است به طور تجربی تعیین کرد: با اندازه گیری نیروی P که برای غلبه بر W لازم است و نیز با اندازه گیری مسافتهای x و y که به ترتیب به وسیله P و W پیموده می شوند.

$$\frac{W}{P} = \frac{Wy}{Px} = \frac{\overline{P}}{\overline{x}} \cdot \frac{\overline{y}}{\overline{y}}$$

$$= \frac{\text{مزیت مکانیکی}}{\text{نسبت سرعتها}}$$

در بسیاری از حالتها بازده با تغییر نیروی مقاوم (بار) تغییر می کند. باید توجه داشت که تنها کمیت مربوط به ماشین که می توان آن را از روی ابعادش

محاسبه کرد نسبت سرعتهاست.

در يك ماشین واقعی، اغلب رابطه میان P و W رابطه ای خطی به شکل زیر است:

$$P = a + bW$$

که در آن a و b مقدارهایی ثابتند.

این رابطه را اغلب قانون ماشین می نامند.

آشکار است که در این رابطه b همواره مثبت است، اما a هر مقداری را می تواند

داشته باشد. اگر a برابر صفر باشد، در این صورت $P = bW$ یا $\frac{W}{P} = \frac{1}{b}$ است، یعنی

مزیت مکانیکی، و بنابراین بازده ماشین با تغییر W تغییر نمی کند. این حالتی ایده آل است، و b عکس نسبت سرعتهاست.

اگر a مثبت باشد، که معمولاً هست (زیرا حتی وقتی که $W = 0$ است، P به سبب وجود اصطکاک مثبت است)، در این صورت مزیت مکانیکی با افزایش W افزایش می یابد. زیرا

$$\frac{W}{P} = \frac{W}{a + bW} = \frac{1}{\frac{a}{W} + b}$$

اگر a مثبت باشد، نسبت $\frac{W}{P}$ با افزایش W افزایش می یابد و همیشه کوچکتر از $\frac{1}{b}$

است. بنابراین بازده ماشین با افزایش نیروی مقاوم (بار) W افزایش می یابد و پیوسته کوچکتر از $\frac{1}{br}$ است، که در آن r برابر نسبت سرعتهاست.

اگر a منفی باشد، با افزایش W و P نسبت $\frac{W}{P}$ کاهش می یابد، یعنی بازده ماشین با

افزایش بار (نیروی مقاوم) کاهش می یابد. این نتیجه را می توان به کمک این واقعیت توضیح داد که هرچه بار ماشین زیادتر شود، اصطکاک میان اجزای ماشین افزایش می یابد.

مثال: در ماشینی که برای برداشتن وزنه به کار می رود، نسبت سرعتها ۱۶ است. با این

ماشین برای برداشتن وزنه های ۵۶ N و ۱۱۲ N به ترتیب نیروهای ۱۱ N و

۱۹ N لازم است. بازده در هر حالت چقدر است؟ اگر نمودار بار به نیروی محرک

را خطی مستقیم فرض کنیم، نیروی لازم برای بلند کردن وزنه ۲۲۴ N را پیدا

کنید.

حل: در حالت اول مزیت مکانیکی $\frac{56}{11}$ ، و در حالت دوم $\frac{112}{19}$ است.

چون $\frac{\text{مزیت مکانیکی}}{\text{نسبت سرعتها}} = \text{بازده}$

بازده ماشین در حالت اول $\frac{۵۶}{۱۱ \times ۱۶}$ و در حالت دوم $\frac{۱۱۲}{۱۹ \times ۱۶}$ یعنی $\frac{۷}{۲۲}$ و $\frac{۷}{۱۹}$ است.

اگر آنها را بخواهیم به صورت درصد نشان دهیم $۳۱/۸$ درصد و $۳۶/۸$ درصد خواهند بود.

چون، بنابه فرض، رابطه میان P و W رابطه ای خطی است،

$$P = a + bW$$

که در آن a و b مقادارهایی ثابتند، خواهیم داشت:

$$۱۱ = a + ۵۶b$$

$$۱۹ = a + ۱۱۲b \quad \text{و}$$

$$b = \frac{1}{7} \quad \text{و} \quad a = ۳ \quad \text{در نتیجه}$$

$$\therefore P = ۳ + \frac{1}{7}W$$

وقتی که $W = ۲۲۴$ است، خواهیم داشت:

$$P = ۳ + ۳۲$$

$$\therefore ۳۵ \text{ N} = \text{نیروی محرك}$$

۵-۱۵. دستگاه چند قرقره با يك نخ

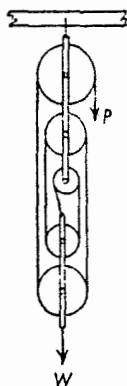
چنین دستگاهی از دوقطعه یا قاب تشکیل شده است که هر قاب شامل چند قرقره است. قاب بالایی به جایی ثابت شده است و قاب پایینی، که وزنه به آن متصل می شود، متحرك است. شکل ۱۵-۲ الف، چنین دستگاهی را که عده قرقره ها در دوقاب یکسان است نشان می دهد. شکل ۱۵-۲ ب، دستگاهی را نشان می دهد که عده قرقره ها در قاب بالایی بیشتر از عده آنها در قاب پایینی است.

در حالت اول يك سرنخ باید به قاب بالایی متصل شود و در حالت دوم باید به قاب پایینی متصل شود.

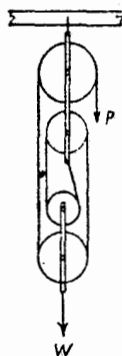
رابطه میان P و W از دوراه ممکن است به دست آید:

(۱) با در نظر گرفتن تعادل یا حرکت یکنواخت قاب پایینی، یا

(۲) با در نظر گرفتن اصل کار.



شکل ۲-۱۵ ب



شکل ۲-۱۵ الف

فرض می‌کنیم وزن قاب پایینی برابر w باشد، و از اصطکاک صرف نظر می‌کنیم.

(۱) چون قرقره‌ها صافند کشش نخ در سراسر آن یکسان و برابر P است.

اگر n تکه نخ به قاب پایینی متصل باشد، کل نیروی روبه بالا بر این قاب برابر nP است. بنابراین در حالت تعادل یا در حالت حرکت با سرعت یکنواخت می‌توان نوشت:

$$W + w = nP$$

باید توجه داشت که این رابطه به شکل رابطه $P = a + bW$ است، که در آن a و

b مقدارهای ثابت مثبتند. از این گذشته، $\frac{W}{P} = n - \frac{w}{P}$ ، که پیوسته کوچکتر از n ، نسبت سرعت‌های دستگاه، است.

فرض این است که همه بخش‌های نخ، جز جاهایی که با قرقره‌ها در تماس است، قائم است. اگر چنین نباشد برآیند دو کشش P که بر دو تکه نخ دوسر یک قرقره وارد می‌شوند $2P$ نیست بلکه بستگی به زاویه میان این دو تکه نخ دارد. در عمل نخها کاملاً موازی نیستند، اما معمولاً می‌توان آنها را موازی دانست.

(۲) اگر وزنه W همراه با قاب پایینی به اندازه x بالا برود، هریک از قطعه نخها باید به اندازه x بالا بروند، در نتیجه در شکل ۲-۱۵ الف، نیروی P باید به اندازه $4x$ و در شکل ۲-۱۵ ب به اندازه $5x$ پایین بیاید. به طور کلی اگر قاب پایینی به n تکه نخ مربوط باشد، نیروی P باید به اندازه nx پایین بیاید. بر طبق اصل کار:

$$(W + w)x = Pnx$$

∴

$$W + w = nP$$

و این همان رابطه‌ای است که قبلاً پیدا کردیم.

پس اگر عده قرقره‌های هر قاب مساوی و برابر q باشد

$$P = \frac{W+w}{n} = \frac{W+w}{2q}$$

خواهد بود.

اگر عده قرقه‌های قاب پایینی q و عده قرقه‌های قاب بالایی $q+1$ باشد،

$$P = \frac{W+w}{n} = \frac{W+w}{2q+1}$$

خواهد بود.

مثال: يك دستگاه قرقه داریم که از شش قرقه تشکیل شده است و تنها يك نخ از دور همه آنها می‌گذرد. يك انتهای نخ به قاب بالایی متصل است. در لحظه حرکت، کشش نخ از حول هر قرقه که می‌گذرد ۲۵ درصد اضافه می‌شود. اگر از وزن قاب پایینی صرف نظر کنیم، برای اینکه وزن $N = 300$ را به حرکت در آوریم چه نیرویی لازم خواهد بود؟ نیز نشان دهید که کار مفیدی که به وسیله دستگاه انجام می‌گیرد تقریباً نصف کاری است که دستگاه گرفته است.

حل: دستگاه مطابق شکل ۳-۱۵ سوار شده است.

فرض می‌کنیم T کشش نخ در انتهای نخ که به قاب بالایی متصل است باشد. کشش نخ پس از عبور از زیر اولین قرقه قاب پایینی به اندازه ۲۵ درصد، یعنی $\frac{1}{4}T$ ،

افزوده می‌شود و بنابراین برابر $\frac{5}{4}T$ خواهد شد. وقتی که نخ از حول اولین قرقه

قاب بالایی می‌گذرد کشش باز هم $\frac{5}{4}$ برابر کشش قبلی، یعنی $\frac{5}{4} \times \frac{5}{4}T$ یا $\frac{5^2}{4^2}T$ خواهد

شد. سرانجام کشش نخ در انتهای آزاد نخ $\frac{5^6}{4^6}T$ خواهد شد.

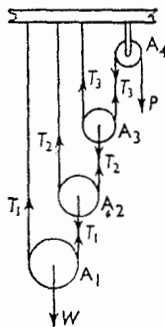
$$\therefore \frac{5^6}{4^6}T = P$$

برای آنکه وزن $N = 300$ به حال تعادل باشد باید وزن آن با مجموع نیروهای

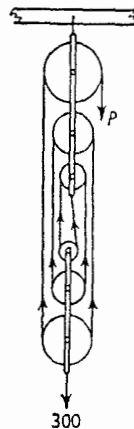
کشش که به طرف بالاست برابر باشد. یعنی

$$T\left(1 + \frac{5}{4} + \frac{5^2}{4^2} + \frac{5^3}{4^3} + \frac{5^4}{4^4} + \frac{5^5}{4^5}\right) = 300$$

$$\therefore T \frac{\frac{5^6}{4^6} - 1}{\frac{1}{4}} = 300$$



شکل ۴-۱۵



شکل ۳-۱۵

$$\therefore \frac{46}{56} \left(\frac{56}{46} - 1 \right) P = 75$$

$$\therefore \left(1 - \frac{46}{56} \right) P = 75$$

$$\therefore P = \frac{56 \times 75}{61 \times 189} = 101/6 \text{ N}$$

اگر قاب پایینی مسافتی برابر x متر بییماید، P مسافتی برابر $6x$ متر می پیماید.

$$\therefore [101/6 \times 6x = 609/6x] \text{ کاری که دستگاه گرفته است}$$

$$\text{و } [300x = \text{کار مفید}]$$

به طوری که معلوم است کار مفید دستگاه تقریباً نصف کاری است که دستگاه

گرفته است.

۶.۱۵. دستگاه چند قرقره که هر نخ به تکیه‌گاه متصل است.

این دستگاه مطابق شکل ۴-۱۵ سوار شده است. وزنه به پایینترین قرقره متصل می شود.

قرقره ثابت A_4 اغلب به این منظور اضافه می شود که جهت نیروی محرك P به طرف پایین بشود و هیچ گونه مزیت مکانیکی ندارد.

همان طور که قبلاً فرض کردیم، همه اجزای نخ، جز قسمت هایی که با قرقره ها در تماسند، قائم هستند و نیز اصطکاک وجود ندارد. از وزن قرقره ها هم صرف نظر می کنیم.

(۱) فرض می کنیم $T_1, T_2, \dots$ کشش نخ هایی باشند که از حول قرقره های $A_1, A_2, \dots$

می گذرند.

از تعادل قرقره‌های $A_1, A_2, \dots$ نتیجه می‌شود:

$$W = 2T_1$$

$$T_1 = 2T_2 \quad \text{و}$$

$$T_2 = 2T_3 \quad \text{و}$$

$$\therefore W = 2^3 T_3 = 2^3 P$$

و واضح است که اگر عدۀ قرقره‌های متحرك برابر n باشد:

$$W = 2^n P$$

(۲) اگر P مسافتی برابر x پایین بیاید، بالاترین قرقرۀ متحرك $\frac{x}{2}$ بالا خواهد آمد.

قرقرۀ بعدی $\frac{x}{4}$ و به همین شیوه بقیۀ قرقره‌ها بالا خواهند آمد. اگر عدۀ قرقره‌های متحرك

برابر n باشد، پایینترین قرقره مسافتی برابر $\frac{x}{2^n}$ بالا خواهد آمد.

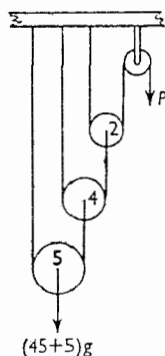
برطبق اصل کار

$$W \times \left(\frac{x}{2^n} \right) = Px$$

$$W = 2^n P \quad \text{یا}$$

و این همان رابطه‌ای است که قبلاً به دست آوردیم.

مثال: شخصی به جرم 70 kg وزنه‌ای به جرم 45 kg را به کمک سه قرقرۀ متحرك حمل می‌کند. قرقره‌ها مطابق شکل ۱۵-۵ سوار شده‌اند. جرم قرقره‌ها به ترتیب ۲، ۴ و ۵ کیلوگرم است. تعیین کنید که این شخص با چه نیرویی بر زمین فشار می‌آورد.



شکل ۱۵-۵

حل : فرض می‌کنیم که انتهای نخ‌ی که این شخص می‌کشد مطابق شکل ۱۵-۵ از دور قرقره ثابتی می‌گذرد. بنابراین اونخ را به طرف پایین می‌کشد. نیرویی که این شخص با آن بر زمین فشار می‌آورد برابر است با اختلاف وزن این شخص و کششی که اعمال می‌کند.

اگر P مسافتی برابر x پیماید، قرقره متحرك بالایی مسافتی برابر $\frac{x}{4}$ می‌پیماید

و کاری که انجام می‌دهد برابر $4g \times \frac{x}{4}$ خواهد بود.

قرقره بعدی مسافتی برابر $\frac{x}{4}$ می‌پیماید و کاری که انجام می‌دهد $4g \times \frac{x}{4}$ خواهد بود.

قرقره پایینی مسافتی برابر $\frac{x}{8}$ می‌پیماید و کاری که انجام می‌دهد $50g \times \frac{x}{8}$ خواهد بود.

بنابراین برطبق اصل کار،

$$Px = \left(1 + 1 + \frac{50}{8}\right) g x = 8/25 g x$$

$$\therefore P = 8/25 g N$$

بنابراین نیرویی که این شخص بر زمین فشار می‌آورد $61/75 g N$ است.

تمرین ۱۰۱۵

- ۱ - چهار قرقره متحرك داریم که جرم آنها از پایینترین به بالاترین قرقره به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ کیلوگرم است. با این دستگاه وزنه‌ای به جرم 500 kg را با چه نیرویی می‌توان نگاه داشت.
- ۲ - اگر سه قرقره متحرك داشته باشیم که جرم آنها از پایینترین به بالاترین قرقره به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ کیلوگرم باشد، با چه نیرویی می‌توان وزنه‌ای به جرم 56 kg را نگاه داشت؟
- ۳ - اگر چهار قرقره متحرك داشته باشیم که وزن هر کدام w باشد و نیروی محرك برابر P باشد، نشان دهید که کششی که بر میله تکیه‌گاه وارد می‌شود $11w - 15P$ است. (فرض آن است که P رو به بالا اثر می‌کند، یعنی نخ‌ی که این نیرو بر آن وارد می‌شود از دور یک قرقره ثابت نمی‌گذرد.)
- ۴ - اگر سه قرقره متحرك داشته باشیم، با صرف نظر کردن از وزن قرقره‌ها، نیروی لازم

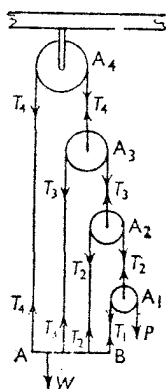
برای نگاه داشتن وزنه‌ای به جرم 400 kg را تعیین کنید. نیز کششی را که هر نخ بر میله تکیه گاه وارد می کند پیدا کنید. اگر مجموع این کششها برابر وزنه نباشد، اختلاف را توضیح دهید.

۷۰۱۵. دستگاه چند قرقره که هر نخ به وزنه متصل است.

این دستگاه مطابق شکل ۶-۱۵ سوار می شود. انتهای همه نخها به میله AB بسته شده است و وزنه به میله AB متصل است.

بنابراین فرض، نخها جز در قسمتهایی که با قرقره‌ها در تماسند به موازات یکدیگر هستند و وزن قرقره‌ها قابل صرف نظر کردن است.

(۱) فرض می کنیم $T_1, T_2, \dots$ کشش نخهایی باشد که از دور قرقره‌های $A_1, A_2, \dots$ می گذرند.



شکل ۶-۱۵

چون A_1 بدون اصطکاک است: $T_1 = P$

و چون A_2 در حال تعادل است: $T_2 = 2T_1 = 2P$

و چون A_3 در حال تعادل است: $T_3 = 2T_2 = 2^2P$

و همچنین $T_4 = 2T_3 = 2^3P$

اگر عدده قرقره‌ها n باشد:

$$\begin{aligned} W &= T_1 + T_2 + \dots + T_n \\ &= P(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= P \frac{2^n - 1}{2 - 1} = P(2^n - 1) \end{aligned}$$

(۲) اگر AB به اندازه x بالاییاید، نخ به اندازه x از دور قرقره بالایی A_4 می‌گذرد و سبب می‌شود که قرقره بعدی یعنی A_4 به اندازه x پایین بیاید. اگر قرقره A_4 به اندازه x پایین بیاید و میله به اندازه x بالا برود، نخ باید به اندازه $2x$ از دور این قرقره بگذرد. در نتیجه قرقره بعدی، یعنی A_4 ، به اندازه $3x + x = 4x$ پایین می‌آید. چون میله به اندازه x بالا آمده است، نخ که حول این قرقره، یعنی A_4 است، باید به اندازه $3x + x$ از دور این قرقره بگذرد. پس نخ میان A_4 و میله به اندازه $4x$ کوتاه می‌شود، و قرقره بعدی، یعنی A_1 ، به اندازه $3x + 4x = 7x$ پایین می‌آید.

بنابراین نخ میان A_1 و میله به اندازه $8x$ کوتاه می‌شود و وزنه P به اندازه $15x + 7x = 22x$ پایین می‌آید.

در این حالت که مثال زدیم چهار قرقره به کار رفته بود، و مسافتی که P پیمود برابر $(1 - 2^4)x$ بود. اگر n قرقره به کار رود، مسافتی که به وسیله P پیموده می‌شود $(1 - 2^n)x$ خواهد شد. بر طبق اصل کار

$$Wx = P(1 - 2^n)x$$

$$W = P(1 - 2^n) \quad \text{یا}$$

چنین دستگاههایی عملاً برای بالا بردن وزنه مفید نیستند. معمولاً از این دستگاهها برای به دست آوردن کششهای کمتر بر روی میله AB استفاده می‌شود، که يك سراین میله به نخ متصل است که از روی بالاترین قرقره می‌گذرد و این قرقره به جسمی مانند بالای يك دکل متصل است که لازم است در آنجا کشش اعمال شود. واضح است که کشش نخهایی که به میله متصل است با هم برابر نیستند، یعنی اگر میله، آن‌طور که در شکل نشان داده شده است، آزاد باشد، افقی نخواهد ایستاد مگر اینکه وزنه به نقطه معینی از میله متصل باشد. اگر قرقره‌ها به يك اندازه باشند فاصله‌های میان نقطه‌های اتصال نخ و میله برابر خواهند بود، و شرط افقی ایستادن میله را می‌توان با تعیین گشتاور نسبت به یکی از دوسر میله به دست آورد.

در حالتی که در شکل نشان داده‌ایم $8P = T_4$ ، $4P = T_3$ ، $2P = T_2$ ، و $W = 15P$.

اگر a فاصله میان نخها باشد مجموع جبری گشتاورهای کششها نسبت به نقطه B

برابراست با

$$24Pa + 8Pa + 2Pa = 34Pa$$

بنابراین برای اینکه میله افقی باشد، W باید به نقطه‌ای از میله متصل شود که

فاصله آن از B برابر x باشد، به طوری که

$$۱۵Px = ۳۴Pa$$

$$x = \frac{۳۴}{۱۵}a$$

یا

مثال: يك دستگاه قرقه مرکب از n قرقه هم اندازه و بیوزن تشکیل شده است. يك سرنخی که از دور هر قرقه می گذرد به میله بیوزن AB متصل شده است. $(n-1)$ قرقه متحرك و يك قرقه ثابت است. يك سرنخی که از دور قرقه ثابت می گذرد در نقطه A به میله AB متصل است. يك سرنخی که از آخرین قرقه متحرك می گذرد به انتهای دیگر میله یعنی B متصل است. با آویزان کردن وزنه W به A و وزنه دیگری به B، میله AB افقی و به حال تعادل قرار گرفته است. ثابت کنید که

$$W = \frac{(n-2)2^n + 2}{n-1}P$$

حل: دستگاه مطابق شکل ۱۵-۷ سوار شده است.

چون قرقه ها هم اندازه هستند، فاصله نقطه های اتصال نخها بر روی میله AB برابرند. این فاصله را به a نمایش می دهیم.

فرض می کنیم $T_1, T_2, \dots, T_n$ کشش نخها باشند، بنابراین فاصله نیروها از نقطه B به ترتیب $0, a, 2a, \dots, (n-1)a$ است.

$$T_2 = 2T_1 = 2P \quad \text{نیز}$$

$$T_3 = 2T_2 = 2^2T_1 = 2^2P \quad \text{و}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$T_n = 2^{n-1}P \quad \text{و}$$

اکنون نسبت به B گشتاور می گیریم:

$$W(n-1)a = 2P \times a + 2^2P \times 2a + 2^3P \times 3a \dots + 2^{n-1}P(n-1)a$$

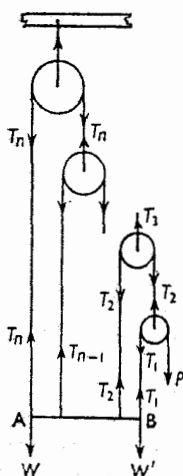
$$= Pa[2 + 2^2 \times 2 + 2^3 \times 3 + \dots + 2^{n-1}(n-1)]$$

مجموع مقادیر داخل کروشه را S فرض می کنیم. پس:

$$S = 2 + 2^2 \times 2 + 2^3 \times 3 + \dots + 2^{n-1}(n-1)$$

$$\therefore 2S = 2^2 \times 1 + 2^3 \times 2 + \dots + 2^{n-1}(n-2) + 2^n(n-1)$$

$$\therefore -S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} - 2^n(n-1)$$



شکل ۱۷-۵

$$= \frac{2(2^{n-1} - 1)}{1} - 2^n(n-1)$$

$$\therefore S = 2^n(n-2) + 2$$

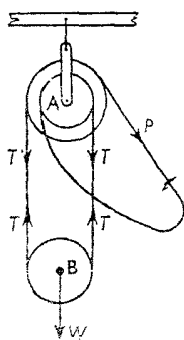
$$\therefore W = \frac{2^n(n-2) + 2}{n-1} P$$

۸-۱۵. قرقره دیفرانسیل دستون

این دستگاه از دو قطعه تشکیل شده است. قطعه بالایی A (مطابق شکل ۸-۱۵) دارای دوشیار است که مجاور یکدیگرند و قطریکی از آنها اندکی بیشتر از قطر دیگری است. وزنه به قرقره پایینی B متصل می شود. زنجیر بسته ای پس از گذشتن از شیار بزرگتر قطعه بالایی از شیار قرقره پایینی می گذرد و سپس به دور شیار کوچکتر قطعه بالایی می چرخد. بقیه زنجیر به شلی آویزان است.

زنجیر را طوری می سازند که ضمن حرکت در داخل شیار متوقف نشود و نیز لغزش نداشته باشد و حرکت آن به ملایمت انجام گیرد. نیروی محرکه مطابق شکل برابر P است.

(۱) اگر کشش قسمتهایی از زنجیر باشد که قرقره پایینی را نگاه داشته اند و W نیروی مقاوم باشد (به فرض آنکه اجزای زنجیر که قرقره B را نگاه داشته اند قائم باشد و از وزن زنجیر و قرقره پایینی صرف نظر کنیم)، خواهیم داشت:



شکل ۸-۱۵

$$2T = W$$

اگر R و r به ترتیب شعاعهای شیارهای بزرگتر و کوچکتر باشند و گشتاورها را نسبت به مرکز قطعه بالایی بگیریم، خواهیم داشت:

$$P \times R + T \times r = T \times R$$

$$\therefore P = T \frac{R-r}{R} = W \frac{R-r}{2R}$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{2R}{R-r}$$

اگر طولهای R و r خیلی به هم نزدیک باشند، مزیت مکانیکی زیادی برای دستگاه به دست خواهیم آورد.

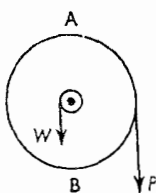
(۲) فرض می‌کنیم که قطعه بالایی به اندازه زاویه‌ای برابر θ به طرف راست بچرخد. بنابراین P مسافتی برابر $R\theta$ می‌پیماید. زنجیری که در قسمت چپ B قرار دارد به اندازه $R\theta$ کوتاه می‌شود، اما زنجیر به اندازه $r\theta$ از سمت راست قرقره B پایین می‌آید. بنابراین W مسافتی برابر $\frac{1}{2}(R\theta - r\theta)$ بالا می‌رود. با توجه به اصل کار

$$\frac{W}{2}(R-r)\theta = PR\theta$$

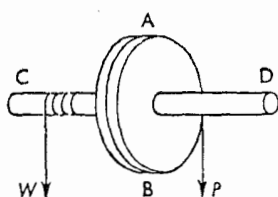
$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{2R}{R-r}$$

۹-۱۵. چرخ و محور

این دستگاه تشکیل شده است از چرخ AB و محور CD که مطابق شکل ۹-۱۵ الف با



شکل ۹-۱۵ ب



شکل ۹-۱۵ الف

هم حول يك محور می چرخند. شکل ۹-۱۵ ب مقطع این دستگاه را نشان می دهد. نیروی محرك P به نخی اثر می کند که به دور چرخ پیچیده شده است و نیروی مقاوم W به نخی اثر می کند که در جهت مخالف به دور محور پیچیده شده است. فرض می کنیم که a و b به ترتیب شعاعهای چرخ و محور باشند. (۱) نسبت به محور مشترك گشتاور می گیریم:

$$Pa = Wb$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{a}{b}$$

(۲) اگر چرخ و محور به اندازه زاویه θ بچرخند (بر حسب رادیان) و P پایین بیاید، P مسافتی برابر $a\theta$ می پیماید، و حال آنکه W مسافتی برابر $b\theta$ بالا خواهد آمد. بنابراین کار:

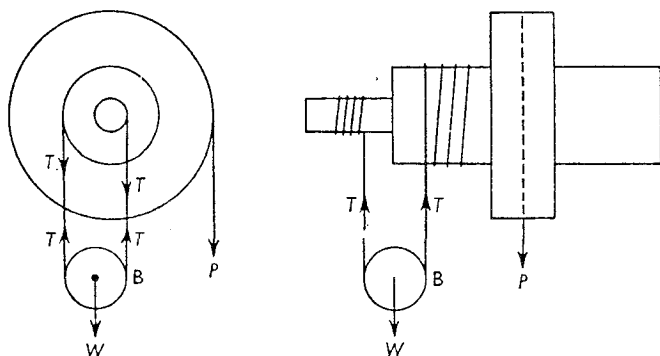
$$Wb\theta = Pa\theta$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{a}{b}$$

بازده مکانیکی دستگاه عملاً محدود است، زیرا اگر چرخ خیلی بزرگ باشد، دستگاه سنگین خواهد شد و اگر محور خیلی باریک باشد، زود می شکند. عمل چرخ لنگر و چرخ چاه شبیه عمل چرخ و محور است. در این دستگاهها فقط يك استوانه وجود دارد که منطبق بر محور است. نیروی مؤثر به انتهای میله ها یا به انتهای دسته بلندی که عمود بر محور است وارد می شود.

۱۰-۱۵ چرخ و محور دیفرانسیل

در این نوع چرخ و محور، محور از دو قسمت تشکیل شده است که دارای شعاعهای مختلف هستند. نیروی مقاوم به يك قرقره متصل است و دو انتهای نخی که این قرقره را نگاه می دارد در دو جهت متفاوت به دو قسمت محور پیچیده شده است. قرقره مطابق شکل ۱۵-۱۰ میان



شکل ۱۵-۱۰

این دو قسمت آویزان است.

اگر P پایین بیاید، نخ که دور قرقره B است بالا می آید و دور محور بزرگتر پیچیده می شود و در این ضمن نخ از دور محور کوچکتر باز می شود.

فرض می کنیم a ، b و c به ترتیب شعاعهای چرخ و محور بزرگتر و محور کوچکتر باشند و T کشش نخ باشد که دور قرقره B است. فرض می کنیم که دو جزء نخ که در دو طرف قرقره B قائم باشند، و از وزن نخ و قرقره صرف نظر می کنیم.

(۱) چون W در حالت تعادل است:

$$2T = W, \text{ یا } T = \frac{1}{2}W$$

نسبت به محور مشترک گشتاور می گیریم:

$$P \times a + T \times c = T \times b$$

$$\therefore P = T \frac{b-c}{a} = W \frac{b-c}{2a}$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{2a}{b-c}$$

اگر b و c را خیلی نزدیک به هم بگیریم، بدون آنکه لازم باشد شعاع چرخ را خیلی زیاد کنیم یا محور را خیلی باریک انتخاب کنیم، مزیت مکانیکی قابل ملاحظه ای به دست می آوریم.

(۲) اگر چرخ به سبب پایین آمدن P زاویه ای به اندازه θ بچرخد، در این صورت مسافتی برابر $a\theta$ پایین خواهد آمد.

در حالی که مقداری نخ به اندازه $c\theta$ از دور محور کوچکتر باز می شود، مقداری نخ

به طول $b\theta$ دور محور بزرگتر پیچیده می‌شود.

بنابراین وزنه مسافتی به اندازه $\frac{1}{4}(b-c)\theta$ بالا می‌رود. برطبق اصل بقای کار:

$$\frac{W}{4}(b-c)\theta = Pa\theta$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{4a}{b-c}$$

۱۱-۱۵. کشش اضافی

در بسیاری از حالتها (مثلاً هنگام بلند کردن وزنه‌های سنگین) لازم است که وقتی که نیروی محرك از میان برداشته می‌شود، وزنه، یعنی نیروی مقاوم، به طرف عقب برنگردد. هرگاه چنین اتفاقی بیفتد می‌گویند که ماشین دچار کشش اضافی شده است و نیاز به تعمیر دارد.

واضح است که برای جلوگیری از کشش اضافی، باید اصطکاک در قسمت‌های مختلف ماشین به قدری زیاد باشد که از برگشتن وزنه جلوگیری کند. به عبارت دیگر بازده ماشین نباید زیاد باشد.

فرض می‌کنیم که P وزنه W را بالا می‌برد، و وقتی که P حذف می‌شود، W ساکن می‌ماند.

وقتی که P وزنه W را بالا می‌برد، اصطکاک برخلاف P عمل می‌کند، و وقتی که P حذف می‌شود، اصطکاک سبب نگهداری W می‌شود.

برای تغییر مکانهای کوچک x و y که به ترتیب P و W انجام می‌دهند، کاری را که به وسیله اصطکاک انجام می‌گیرد به F نشان می‌دهیم. بنابراین وقتی که ماشین کار می‌کند:

$$Px = Wy + F$$

اکنون اگر وقتی که F تنها وجود دارد همین اندازه تغییر مکان به W بدهد:

$$Wy = F$$

بنابراین F نباید کمتر از Wy باشد. بنابراین Px نباید کوچکتر از $2Wy$ باشد.

در نتیجه نسبت $\frac{Wy}{Px}$ نباید بزرگتر از $\frac{1}{4}$ باشد؛ یعنی بازده نایبستی بزرگتر از $\frac{1}{4}$ یا ۵۰ درصد باشد.

هر ماشینی که بازده آن کمتر از ۵۰ درصد است دچار کشش اضافی نخواهد شد. سودمندی قرقره و ستون، صرف نظر از نسبت سرعت‌های قابل ملاحظه آن، به سبب این است که بازده آن

عموماً کمتر از ۵۰ درصد است.

تمرین ۲۰۱۵

- ۱ - قطراستوانه چرخ چاهی ۱۰ cm است. نیروی محرك در ۶۰ cm محور بردسته وارد می شود. نیروی لازم برای نگاهداری وزنه ای به جرم ۱۲۰ kg را پیدا کنید.
- ۲ - از يك چرخ ومحور برای بلند کردن وزنه ای به جرم ۵۰ kg استفاده می شود، شعاع چرخ ۵۰ cm است وهنگامی که هفت دور می زند وزنه ۳/۳ m بالا می آید. کمترین نیرویی که برای نگاهداری وزنه لازم است چقدر است؟
- ۳ - لنگری به جرم ۱ Mg، به كمك زنجیری که به آن بسته شده است وبه دور چرخ لنگری به قطر ۲۲/۵ cm پیچیده می شود، بالا برده می شود. این چرخ لنگر را شش مرد که در سر میله های چرخ کار می کنند می چرخانند، به طوری که طول مؤثر را می توان ۱/۵ m دانست. به فرض آنکه هر کدام نیرویی برابر دیگری اعمال کند، و در صورتی که بازده ۵۶ درصد باشد، نیرویی را که هر کدام از این شش مرد اعمال می کنند پیدا کنید (از وزن زنجیر صرف نظر کنید).
- ۴ - قرقره دیفرانسیلی داریم که دوجزء آن به ترتیب ۲۴ و ۲۵ دندانه دارد و برای بلند کردن وزنه ای به جرم ۵۰۰ kg به کار برده می شود. با نمودار نشان دهید که این دستگاه چگونه کار می کند و نسبت سرعتها را در آن پیدا کنید. همچنین تعیین کنید که اگر بازده ۶۰ درصد باشد، چه نیرویی باید اعمال شود.

۱۲۰۱۵ پیچ

پیچ از میله ای که برش آن مدور است تشکیل شده است که بر روی آن برجستگی هایی به شکل مارپیچ به وجود آمده است. شیب این برجستگی نسبت به صفحه عمود بر محور میله در همه نقاط آن یکسان است.

فاصله میان دو برجستگی متوالی، که نسبت به محور میله موازیند، پای پیچ نامیده می شود.

پیچ می تواند درون مهره ای که شکاری توخالی وشبیه برجستگی های پیچ دارد در راستای برجستگیها بلغزد.

تتها حرکت ممکن برای پیچ، حرکت چرخشی حول محور آن است و در همان زمان، به سبب لغزش برجستگیها در داخل شیار، حرکتی به موازات محور انجام می دهد. پیچ، با يك دور چرخش، مسافتی به اندازه پای پیچ جلو می رود.

اگر برجستگی وشیار صیقلی باشند و محور پیچ نسبت به افق شیب داشته باشد، وزن پیچ تمایل به حرکتی چرخشی و روبه پایین دارد. البته، در عمل، به سبب اصطكاك، این حرکت روی نمی دهد.

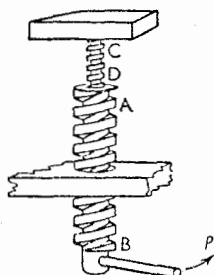
در يك جك پیچی یا در پرس پیچی يك سرپیچ بر جسمی قرار می گیرد که باید بر آن نیرو اعمال شود. و پیچ به كمك میله ای که به سردیگر آن متصل است به جلو رانده می شود (شكل ۱۵-۱۱).

فرض می کنیم که a طول بازویی باشد که نیروی محرك P بر آن وارد می شود، و p پای پیچ باشد.

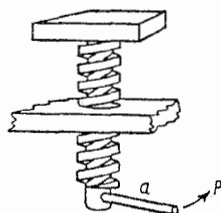
وقتی که پیچ يك دور می زند P مسافتی به اندازه $2\pi a$ می پیماید، و حال آنکه پیچ مسافتی برابر p می پیماید.

$$\therefore \text{نسبت سرعتها} = \frac{2\pi a}{p}$$

اگر پیچ صیقلی باشد، این رابطه مزیت مکانیکی پیچ را نیز به دست می دهد. نسبت سرعتها را با بسیار بزرگ کردن a و بسیار كوچك کردن p ، به طور تئوری می توان بسیار بزرگ کرد. با بسیار بزرگ کردن a ماشین بسیار سنگین و بدقواره می شود، و حال آنکه با بسیار كوچك کردن p ، برجستگیهای پیچ نازك می شوند و در نتیجه پیچ بسیار ضعیف خواهد شد.



شكل ۱۵-۱۲



شكل ۱۵-۱۱

۰۱۳-۱۵ پیچ دیفرانسیل

این ماشین، بی آنکه لازم باشد بازویی بسیار بلند یا پای پیچی بسیار اندك داشته باشد، دارای نسبت سرعتهای بسیار بزرگ است.

در این ماشین پیچ AB (شكل ۱۵-۱۲) دريك قطعه ثابت عمل می کند. درون این پیچ سوراخ است و پیچ دیگر DC که پای آن كوچكتر است قرار دارد. پیچ

کوچکتر در نقطه C به قطعه ای ثابت محکم شده است، به طوری که نمی تواند بچرخد، اما می تواند در راستای طول خود حرکت کند.

وقتی که بازوی محرك يك دور کامل می زند پیچ AB مسافتی برابر p_1 ، پای این پیچ، به جلو می رود، و حال آنکه پیچ کوچکتر مسافتی برابر p_2 ، پای خود، درون AB می رود.

بنابراین پیچ کوچکتر، و در نتیجه وزنه، مسافتی برابر $p_1 - p_2$ به جلو می رود. اگر a طول بازوی محرك باشد نسبت سرعتها برابر خواهد بود با

$$\frac{2\pi a}{p_1 - p_2}$$

اگر p_1 و p_2 را تقریباً مساوی یکدیگر بسازیم رابطه بالا بسیار بزرگ خواهد شد.

تمرین ۳۰۱۵

۱ - در يك دستگاه قرقره كه فقط يك نخ وجود دارد، معلوم شده است كه اگر به قاب پایین به ترتیب وزنه های ۱۸ و ۲۲ واحد بیاویزیم بازوهای ۵ و ۶ واحد می توانیم تعادل برقرار کنیم. عده تکه های نخ و وزن قاب پایینی را تعیین کنید.

۲ - در دستگاهی از چند قرقره كه در آن تنها يك نخ وجود دارد وزنه ۳ واحدی با وزنه ۱۵ واحدی و وزنه ۵ واحدی با وزنه ۲۷ واحدی تعادل برقرار می كند. وزن قاب پایینی را پیدا کنید. نیز اگر وزن قاب پایینی را ناچیز بگیریم مزیت مکانیکی این دستگاه را تعیین کنید.

۳ - در دستگاهی از چند قرقره كه فقط يك نخ وجود دارد پنج تکه نخ از قاب پایینی گذشته است. نسبت سرعتها در این دستگاه چقدر است؟ اگر بازده دستگاه ۵۰ درصد باشد، نیروی لازم برای آنكه وزنه N ۶۰ را نگاه دارد چقدر است؟

۴ - با ماشینی كه نسبت سرعتها در آن برابر ۶۰ است برای بلند کردن وزنه های ۴۰۰، ۸۰۰ و ۱۲۰۰ واحد به ترتیب نیروهای محرك ۲۱، ۳۵ و ۴۹ واحد لازم بوده است. از راه نمودار، یا از راه دیگر، نیروی احتمالی لازم برای بلند کردن وزنه ۲۲۴۰ واحد را تعیین کنید و بازده ماشین را برای هر وزنه به دست آورید.

۵ - دستگاهی از چند قرقره داریم كه در آن هرنخ به میله ای متصل است كه وزنه را نگاه می دارد. فرض می كنیم عده قرقره های متحرك ۳ و وزن هر قرقره w باشد و نیروی محرك P وارد شود و وزن میله (همراه با وزنه ای كه به آن متصل است) كه به آن چهار نخ متصل شده است W باشد. شرط تعادل را در این دستگاه بیاویید. اگر شعاع

هرقرقره، از جمله قرقره ثابت، برابر a باشد نشان دهید که برای آنکه میله افقی و نخها قائم بمانند، فاصله افقی مرکز ثقل میله تا نقطه اتصال بلندترین نخ به میله برابر $a \frac{11P + 5w}{W}$ است.

۶ - اگر یک دستگاه شامل چهارقرقره باشد و در آن هر تکه نخ به وزنه متصل باشد، و وزن هرقرقره 2 N باشد، با نیروی 20 N چه وزنه‌ای را می‌توان بلند کرد؟

۷ - در یک دستگاه قرقره، که در آن ۳ قرقره متحرک هر یک به جرم 1 kg وجود دارد، هر نخ به تکیه‌گاه متصل است. نیروی لازم برای نگهداری وزنه‌ای معین دوبرابر هنگامی است که اگر این قرقره‌ها بیوزن بودند. وزن این وزنه را بیابید.

۸ - شرط تعادل را در یک دستگاه قرقره بیابید که در آن هرقرقره با حلقه نخی جداگانه آویزان است و نخها همگی موازیند و هر نخ به میله متصل است. وزن قرقره‌ها را به حساب بیاورید. اگر در این دستگاه پنج قرقره و جرم هر کدام 1 kg باشد با چه وزنه‌ای می‌توان نیروی 50 g N را نگاه داشت. در این صورت نیرویی که بر میله فشار می‌آورد چقدر است؟

۹ - دستگاهی از n قرقره تشکیل شده است و تنها یک نخ از دور همه قرقره‌ها می‌گذرد. نشان دهید که اگر وزن قرقره‌ها قابل صرف نظر کردن باشد، مزیت مکانیکی این دستگاه برابر n است. مردی به جرم 80 kg با چنین دستگاهی که از هفت قرقره، هر یک به جرم $1/5\text{ kg}$ ، تشکیل شده است، وزنه‌ای به جرم 200 kg را بالا می‌برد. اگر او به طور قائم روبه پایین فشار آورد، نیرویی که بر زمین اعمال می‌کند چقدر خواهد بود؟

۱۰ - نخ‌هایی که یک سر آن به نقطه ثابت A متصل است از زیر قرقره سنگین P می‌گذرد، سپس از روی قرقره ثابت B ، و پس از آن از زیر قرقره سنگین Q می‌گذرد و سر دیگر آن به مرکز قرقره P متصل می‌شود. همه اجزای آویزان نخ به طور قائم هستند. به کمک اصل کار مجازی، یا هر راه دیگر، نسبت وزنه‌های P و Q را، هنگامی که دستگاه در حال تعادل است، بیابید.

۱۱ - قرقره دیفرانسیلی و ستون از دو قطعه پایینی و بالایی تشکیل شده است. قطعه بالایی دارای دوشیار دندانه‌دار است که شعاع آنها به ترتیب 10 cm و 9 cm است. بازده ماشین ۴۰ درصد است. نیروی لازم برای بلند کردن وزنه 1500 N چقدر است؟

۱۲ - در یک چرخ و محور دیفرانسیلی، شعاع چرخ 30 cm و شعاعهای محور 5 cm و $7/5\text{ cm}$ است. برای بلند کردن وزنه‌ای به جرم 1 Mg نیرویی برابر 600 N لازم

است. بازده ماشین را برای این وزنه تعیین کنید.

۱۳- مردی به جرم 65 kg در یک صندلی به جرم 7 kg نشسته است. این صندلی از یک قرقره صیقلی آویزان است که قرقره خود به کمک دو تکه طناب موازی نگاهداری می شود. این دو تکه طناب در دو جهت متفاوت، به دور دو استوانه یک چرخ و محور دیفرانسیلی که شعاع آنها 38 cm و 30 cm است، پیچیده می شوند. این مرد خود را با کشیدن یک طرف طناب بالا می کشد. توضیح دهید که کدام طرف طناب را می کشد و نیز نشان دهید که برای آنکه بتواند خود را بالا بکشد باید نیرویی متجاوز از $8/5 \text{ g N}$ اعمال کند.

۱۴- یک دستگاه قرقره داریم که از سه قرقره متحرك، هریک به وزن W ، تشکیل شده است، و در آن هر قرقره متحرك با یک حلقه نخ جداگانه آویزان است و همه اجزای آویزان نخ قائمند، و یک سر همه نخها به نقطه ای ثابت متصل است. نیروی لازم برای نگاهداری این سه قرقره متحرك را پیدا کنید. دو عدد از این قرقره های متحرك A و B هستند که وزن هر کدام W است. قرقره سوم نیز به وزن W است، اما در حلقه نخ قرار دارد که یک سر آن به محور A و سر دیگر آن به محور B متصل است. اگر B بالاتر از A قرار گرفته باشد، چه نیرویی باید بر سر آزاد نخ که از زیر B گذشته است وارد کرد تا دستگاه به حال تعادل باشد؟

۱۵- اگر قرقره های ثابت قطعه دیفرانسیلی و ستون به ترتیب ده و یازده دندانه داشته باشند، و اثر اصطکاک در ماشین طوری باشد که نسبت ثابتی با افزایش وزن داشته باشد، هنگامی که بازده ماشین $\frac{1}{3}$ است این نسبت ثابت را تعیین کنید.

۱۶- زوج نیرویی برابر 35 N cm بر پیچی که در هرسانتیمتر دو برجستگی دارد وارد می شود و نیرویی برابر 100 N تولید می کند. بازده پیچ چقدر است؟

۱۷- در یک پرس پیچی مرکز اهرمی به طول 50 cm به پیچی متصل شده است که برجستگیهای آن طوری است که با هر دوازده دور کامل 10 cm جلو می رود. نیروهایی برابر 48 N (در دو جهت متفاوت) بر دو سر اهرم وارد می آیند. به کمک اصل کار مجازی، یا همراه دیگر، نیرویی را که پیچ اعمال می کند پیدا کنید.

۱۸- اگر نیروی محرك 50 N بر سر بازویی به طول $0/6 \text{ m}$ وارد شود و در یک پرس پیچی نیرویی برابر 10^4 N تولید کند، پای پیچ را تعیین کنید.

۱۹- اگر پای پیچ در پیچهای یک پیچ دیفرانسیلی به ترتیب $0/8 \text{ cm}$ و $1/2 \text{ cm}$ باشد و گشتاور زوجی که بر پیچ بزرگتر اعمال می شود 3000 N cm باشد و تولید نیرویی

کند که برابر وزن وزنه‌ای به جرم 500 kg است، بازده ماشین را حساب کنید.

۲۰- به کمک يك چرخ‌چاه و يك قرقره سطلی را به درون چاهی می‌برند. سرطناب چرخ‌چاه (که معمولاً به سطل متصل می‌شود) در اینجا به چارچوب چرخ‌چاه متصل است و قرقره که سطل به آن متصل است در حلقه طناب می‌لغزد. اجزای آویزان طناب قائم هستند. با صرف نظر کردن از اصطکاک و وزن طناب، به کمک اصل کار مجازی، یا هر راه دیگر، نیرویی را که باید بر بازوی چرخ‌چاه وارد کرد تا سطل به حال تعادل باشد تعیین کنید. فرض آن است که وزن سطل و اشیای درون آن W و قطر چرخ‌چاه b و طول بازوی محرك a است. در ماشینهای واقعی از اصطکاک نمی‌توان چشم‌پوشی کرد. اگر نیرویی که سبب بالا آوردن سطل می‌شود nW باشد بازده ماشین را پیدا کنید.

۲۱- دو قطعه قرقره داریم که در هر کدام سه قرقره وجود دارد. جرم هر قطعه 12 kg است. وزنه‌ای به جرم 132 kg به قطعه پایینی آویزان است. بازده دستگاه ۶۰ درصد است. نیروی لازم برای بالا بردن وزنه و عکس‌العمل قلابی را که دستگاه از آن آویزان است تعیین کنید. از وزن طناب صرف نظر کنید.

۲۲- دو چرخ با شعاعهای a و b ($a > b$) به محور مشترکی متصل هستند که به کمک میله‌ای به طول c که عمود بر محور است می‌چرخد. يك سرطنابی سبک به نقطه‌ای از محیط چرخ بزرگتر و سر دیگر طناب به نقطه‌ای از محور چرخ کوچکتر متصل شده است، به طوری که وقتی میله محور را می‌چرخاند طناب به دور یکی می‌پیچد و از دور دیگری باز می‌شود. طناب از زیر قرقره صاف و سبکی می‌گذرد که وزنه‌ای برابر W به آن آویزان است.

با نیروی P که عمود بر میله و در صفحه حرکت میله وارد می‌شود تعادل برقرار می‌شود. به فرض آنکه اصطکاک وجود نداشته باشد و اجزای آویزان طناب قائم باشند، رابطه میان P و W را پیدا کنید.

اگر اصطکاک وجود داشته باشد و بازده ماشین ۴۵ درصد باشد، با نیروی $P = 120 \text{ N}$ و وزنه W که می‌توان بلند کرد چقدر است؟ a ، b و c به ترتیب 15 cm ، 10 cm و 40 cm هستند.

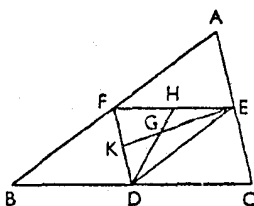
مرکز ثقل

۱۰۱۶. در بخش ۱۱ جای مرکز ثقل بعضی از اجسام را که شکلی ساده دارند بیان کردیم. اکنون نشان می‌دهیم که جای این نقطه را در بعضی از موارد دیگر چگونه تعیین می‌کنند، و سپس نشان می‌دهیم که چگونه فرمولهای کلی را به دست می‌آورند تا در حالت‌های دشوارتر جای مرکز ثقل را بیابند.

۲۰۱۶. سه میله که تشکیل یک مثلث می‌دهند

فرض می‌کنیم AB ، BC ، CA سه میله یکنواخت با کلفتی و مصالح یکسان باشند و تشکیل مثلث ABC را بدهند (شکل ۱-۱۶).

فرض می‌کنیم D ، E ، F وسطهای اضلاع BC ، CA ، AB باشند. DE ، EF و FD را وصل می‌کنیم.



شکل ۱-۱۶

سه مرکز ثقل میله‌ها در D، E و F هستند، و وزن میله‌ها متناسب با طولهای آنها یعنی a ، b و c است که می‌توان فرض کرد براین نقطه‌ها اعمال می‌شوند.

بنابراین مرکز ثقل میله‌های AB و AC در نقطه‌ای مانند H واقع بر EF است،

$$c \times FH = b \times HE \quad \text{به طوری که}$$

$$\frac{FH}{HE} = \frac{b}{c} \quad \text{یا}$$

$$c = 2DE \quad \text{و} \quad b = 2DF \quad \text{اما}$$

$$\frac{FH}{HE} = \frac{DF}{DE}$$

∴

در نتیجه می‌توان گفت که DH نیمساز زاویه FDE است.

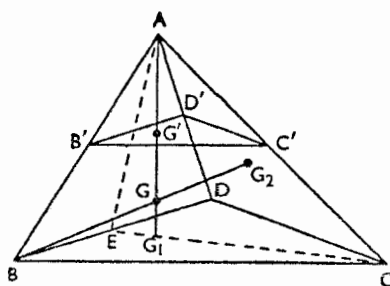
نیز مرکز ثقل وزن a که در D اعمال می‌شود و وزن $b+c$ که در H اعمال می‌شود باید بر روی DH باشد.

بنابراین مرکز ثقل سه میله باید بر روی DH باشد. با همین شیوه در می‌یابیم که مرکز ثقل سه میله باید بر روی EK باشد که نیمساز زاویه DEF است.

بنابراین مرکز ثقل باید در G باشد که این دو نیمساز یکدیگر را در آن قطع می‌کنند، و این نقطه مرکز دایره‌ای است که در مثلث DEF محاط می‌شود.

۳.۱۶. چهاروجهی

فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۶-۲) یک چهاروجهی باشد که از جنسی یکنواخت ساخته شده است. E را نقطه وسط BD و G_1 را مرکز ثقل قاعده BCD می‌گیریم.



شکل ۱۶-۲

فرض می‌کنیم $B'C'D'$ مقطعی از این چهاروجهی به موازات قاعده BCD باشد.

در این صورت، بر طبق نتایج به دست آمده در هندسه، می دانیم که AE از نقطه وسط $B'D'$ می گذرد و AG_1 از محل برخورد میانه های مثلث $B'C'D'$ ، یعنی از مرکز ثقل G' ، می گذرد.

در این صورت، اگر بپذیریم که چهار وجهی از ورقه های مثلث شکل نازکی به موازات BCD تشکیل شده است، نتیجه خواهیم گرفت که، چون مرکز ثقل هر ورقه بر روی AG_1 قرار می گیرد، مرکز ثقل کل چهار وجهی بر روی AG_1 است.

با همین شیوه می توان نشان داد که مرکز ثقل چهار وجهی بر روی خطی است که رأس B را به مرکز ثقل G_1 ، یعنی مرکز ثقل وجه ACD ، که مقابل B است، وصل می کند. همچنین معلوم است که این خطوط در نقطه ای مانند G یکدیگر را قطع می کنند، به طوری که

$$G_1G = \frac{1}{4}G_1A$$

$$G_2G = \frac{1}{4}G_2B \quad \text{و}$$

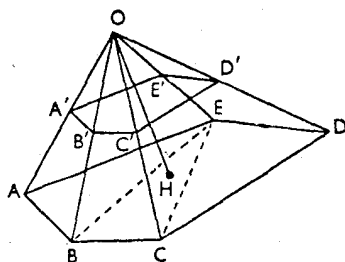
بنابراین مرکز ثقل چهار وجهی بر خطی قرار می گیرد که مرکز ثقل هر وجه را به رأس مقابل وصل می کند و فاصله اش از این وجه، برابر یک چهارم فاصله این وجه تا رأس است. یادداشت. مرکز ثقل یک چهار وجهی با مرکز ثقل چهار نقطه مادی همسان که در رأس آن چهار وجهی قرار گیرند در یک مکان هستند.

زیرا اگر در سه رأس یک مثلث BCD وزنه هایی برابر w قرار دهیم معادل با وزنه ای برابر $3w$ هستند که در G_1 ، مرکز ثقل BCD قرار دهیم. نیز $3w$ در G_1 و w در A معادل با وزنه $4w$ هستند که در G_1 قرار دهیم، به طوری که $G_1G = \frac{1}{4}G_1A$.

۴.۱۶. هرم چند وجهی و مخروط توپر

فرض می کنیم $OABCDE$ (شکل ۱۶-۳) هرمی یکنواخت با قاعده چند ضلعی $ABCDE$ باشد. فرض می کنیم H مرکز ثقل قاعده، و h ارتفاع هرم باشد.

هر صفحه به موازات قاعده، سطحی مانند $A'B'C'D'E'$ مشابه قاعده از مخروط جدا می کند، به طوری که مرکز ثقل آن نیز در نقطه مشابه آن و بر روی خط OH خواهد بود. با در نظر گرفتن این موضوع که هرم از ورقه های نازکی به موازات قاعده تشکیل شده است و با توجه به این مطلب که مرکزهای ثقل این ورقه ها بر روی خط OH واقعند، نتیجه می شود که مرکز ثقل کل هرم نیز بر خط OH واقع است.



شکل ۱۶-۳

اگر قاعده هرم را به مثلثهایی مانند ABE ، BEC ، CED ، تقسیم کنیم، هرم را می‌توانیم به چند چهاروجهی تقسیم کنیم.

مرکز ثقل هر یک از اینها در ارتفاع $\frac{h}{4}$ بالای قاعده است. در نتیجه مرکز ثقل کل هرم در ارتفاع $\frac{h}{4}$ بالای قاعده است.

بنابراین مرکز ثقل بر روی خطی است که رأس هرم را به مرکز ثقل قاعده وصل می‌کند و در یک چهارم فاصله میان این دو نقطه است.

چون مخروط قائم مدور را می‌توان حد هرمی دانست که چند ضلعی قاعده آن از بینهایت ضلع تشکیل شده است، نتیجه‌ای را که در بالا برای هرم به دست آوردیم در مورد مخروط نیز می‌توانیم به کار ببریم.

مرکز ثقل مخروط قائم مدور توپر بر روی خطی است که رأس مخروط را به مرکز قاعده وصل می‌کند و فاصله آن تا قاعده مخروط برابر یک چهارم ارتفاع مخروط است. در مورد هر مخروط توپر مرکز ثقل بر روی خطی است که رأس مخروط را به مرکز ثقل قاعده وصل می‌کند و فاصله اش تا قاعده برابر یک چهارم فاصله رأس تا قاعده است.

۵.۱۶. سطح جانبی مخروط مدور قائم

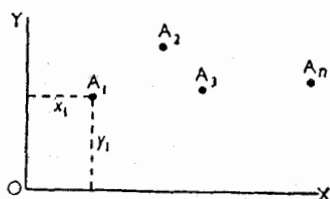
اگر از رأس مخروط خطوطی به نقاط کناره قاعده مخروط وصل کنیم، می‌توانیم بینهایت ورقه مثلث شکل به دست آوریم که قاعده آنها بسیار کوچکند. مرکز ثقل همه این مثلثها بر روی صفحه‌ای قرار می‌گیرند که به موازات قاعده مخروط است و فاصله اش از رأس مخروط برابر دو سوم ارتفاع مخروط است. بنابراین مرکز ثقل کل سطح جانبی مخروط باید بر این صفحه باشد.

از راه تقارن، نتیجه می‌شود که مرکز ثقل باید بر روی محور مخروط باشد.

بنابراین مرکز ثقل سطح جانبی مخروط بر روی نقطه‌ای واقع بر محور مخروط و در دو سوم ارتفاع از رأس است.

۶.۱۶. مرکز ثقل چند نقطه مادی

فرض می‌کنیم در نقاط $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ واقع در یک صفحه (شکل ۴-۱۶)،



شکل ۴-۱۶

نقاطی مادی به وزنهای $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ قرار گرفته باشند، و فرض می‌کنیم که مختصات این نقاط نسبت به دو محور متعامد OY و OX به ترتیب $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ باشند.

فرض می‌کنیم که صفحه افقی است، به طوری که وزنهای به طور قائم عمل می‌کنند، یعنی شکلی که این نیروها عمل می‌کنند عمود بر صفحه کاغذ است.

برایند این وزنهای، وزنی است برابر $w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$ یا برابر $\sum w$. می‌دانیم که گشتاور این برایند نسبت به محور OX یا OY برابر است با مجموع گشتاورهای اوزان جداگانه حول این محورها.

مجموع گشتاورهای اوزان جداگانه حول محور OY برابر است با

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \dots + w_n x_n$$

$$\sum w x$$

یا

بنابراین اگر $\bar{x}$ فاصله راستای برایند از OY باشد،

$$\bar{x} \sum w = \sum w x$$

$$\bar{x} = \frac{\sum w x}{\sum w}$$

با همین شیوه، اگر $\bar{y}$ فاصله برایند از OX باشد،

$$\bar{y} = \frac{\sum w y}{\sum w}$$

بنابراین راستای وزن برایند از نقطه‌ای مانند G واقع در صفحه می‌گذرد که مختصات

آن $\bar{x}$ و $\bar{y}$ است، و این نقطه باید مرکز ثقل نقاط مادی باشد که می‌دانیم نقطه‌ای واقع در صفحه است.

واضح است که این فرمول در هنگامی که $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ وزن اجسامی باشند که مرکز ثقل آنها $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ است نیز به کار برده می‌شود. چون $w = mg$ که در آن m جرم نقطه مادی است، فرمول بالا را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\bar{x} = \frac{\sum mx}{\sum m} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{\sum my}{\sum m}$$

نقطه‌ای که به این ترتیب با در نظر گرفتن جرم نقاط مادی به جای وزن آنها، به دست می‌آید مرکز جرم نامیده می‌شود. مرکز جرم و مرکز ثقل را معمولاً یکی می‌دانند (و این به‌ویژه در حالتی که اجسام در مقایسه با زمین بسیار کوچکند درست است). مکان مرکز جرم جسمی که چگالی یکنواخت دارد بستگی به شکل آن دارد، یعنی صرفاً با استفاده از هندسه به دست می‌آید.

۷۰۱۶. وقتی که تعداد محدودی نقطه مادی با وزن معین و جای معین داشته باشیم برای یافتن مقادیر $\sum wx$ و $\sum wy$ از راه جمع معمولی عمل می‌کنیم.

در مورد جسم صلب عده ذرات نامعین است. در این صورت می‌توانیم تصور کنیم که جسم از ورقه‌های نازکی تشکیل شده است، که محل مراکز ثقل آنها معلوم است. در حالت‌های ساده‌تر، مثلاً شبیه حالت‌هایی که پیش از این در نظر گرفتیم، می‌توانیم با انتخاب ورقه‌های نازک در دو جهت متفاوت نشان دهیم که مرکز ثقل کل جسم باید در نقطه برخورد دو خط مستقیم باشد.

اما در بسیاری از موارد، گرچه شناختن خطی که مرکز ثقل باید بر روی آن باشد آسان است، باید محل مرکز ثقل را بر روی این خط با استفاده از فرمول زیر به دست آوریم:

$$\bar{x} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

که در آن w وزن ورقه نازک و x فاصله مرکز ثقل این ورقه از نقطه ثابتی است که بر روی خط واقع است. اندازه $\sum wx$ را باید از راه انتگرال‌گیری به دست آوریم، زیرا در این حالت با تعداد بیشمار ورقه نازک سروکار داریم.

در حالتی که با صفحه‌ای مسطح به مساحت A سروکار داریم، اگر x و y فاصله‌های هر عنصر سطح δA از این صفحه از دو محور ثابت باشد، در این صورت فرمول‌های

$$\bar{y} = \frac{\sum y \delta A}{A} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{\sum x \delta A}{A}$$

محل شبه مرکز صفحه را به دست می دهند.

در حالتی که با تیغه ای یکنواخت (که در آن جرم متناسب با مساحت است) سروکار داریم، شبه مرکز تیغه همان مرکز جرم تیغه است. اگر تیغه یکنواخت نباشد این دو مرکز یکسان نخواهند بود.

مرکز ثقل، مرکز جرم، و شبه مرکز معمولاً برهم منطبق هستند، و اگر چنین باشد اغلب هرسه واژه را به یک معنی به کار می برند. اما باید به خاطر داشت که این حالت، جز در موردی که اجسام یکنواخت هستند، یعنی جز در موردی که جهتهای اوزان نقطه‌های مادی متوازی هستند، درست نیست.

تمرین ۱۰۱۶

- ۱ - نقطه‌هایی مادی به جرمهای ۲، ۳، ۶ و ۹ کیلوگرم بر خط AB به ترتیب به فاصله‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ سانتیمتر از A قرار دارند. فاصله مرکز ثقل آنها را از A بیابید.
- ۲ - میله یکنواخت AB به طول ۴ m و جرم ۶ kg است. در نقطه A جرمی برابر ۱ kg، و در فاصله ۱ m از A جرمی برابر ۲ kg و در فاصله ۲ m از A جرمی برابر ۳ kg و در فاصله ۳ m از A جرمی برابر ۴ kg و در نقطه B جرمی برابر ۵ kg متصل شده است. فاصله نقطه A را از مرکز ثقل دستگاه بیابید.
- ۳ - وزنه‌هایی به جرم ۳ kg، ۴ kg و ۵ kg به ترتیب در گوشه‌های مثلث متساوی الساقین ABC، که در آن $AB = AC = ۱۲ \text{ cm}$ و $BC = ۸ \text{ cm}$ است، قرار داده شده‌اند. فاصله مرکز ثقل وزنه‌ها را از BC و از AD و نیز از خطی که از A بر BC عمود می‌شود بیابید.
- ۴ - وزنه‌هایی به جرم ۱، ۲، ۳ و ۴ کیلوگرم به ترتیب در رئوس A، B، C و D از مربع ABCD قرار داده شده‌اند. طول هر ضلع مربع ۸ cm است. فاصله مرکز ثقل دستگاه را از AB و AD بیابید.
- ۵ - وزنه‌هایی به جرم ۱ kg، ۲ kg و ۳ kg در رئوس مثلث متساوی الاضلاعی که طول هر ضلع آن ۹ cm است قرار داده شده‌اند. فاصله مرکز ثقل را از وزنه کوچکتر بیابید.
- ۶ - وزنه‌هایی به جرم ۵، ۶، ۹ و ۷ کیلوگرم در رئوس A، B، C، و D از مربعی به ضلع ۲۷ cm قرار داده شده‌اند. فاصله مرکز ثقل آنها را از A پیدا کنید.

۷ - ABC مثلثی متساوی الاضلاع به طول m ۴ است. وزنه‌هایی به جرم ۵، ۱، ۳ و کیلوگرم به ترتیب در رئوس A، B و C قرار داده شده‌اند. در نقاط وسط BC، CA و AB به ترتیب وزنه‌هایی به جرم ۲، ۴ و ۶ کیلوگرم قرار داده شده است. فاصله مرکز ثقل دستگاه را از B بیابید.

۸ - وزنه‌هایی به جرم ۱، ۵، ۳، ۴، ۲ و ۶ کیلوگرم به ترتیب در رئوس متوالی یک شش ضلعی منتظم قرار گرفته‌اند. ثابت کنید که مرکز ثقل این وزنه‌ها مرکز شش ضلعی است.

۹ - وزنه‌هایی به جرم ۱، ۵، ۳، ۲، ۴ و ۱۵ کیلوگرم به ترتیب در رئوس متوالی یک شش ضلعی منتظم قرار گرفته‌اند. فاصله مرکز ثقل آنها را از وزنه ۱۵ کیلوگرمی بیابید.

۱۰ - وزنه‌هایی به جرم ۱، ۲، ۳، ۳، ۵ و ۶ کیلوگرم به ترتیب در رئوس متوالی یک شش ضلعی منتظم قرار گرفته‌اند. فاصله مرکز ثقل آنها را از مرکز شش ضلعی بیابید. طول هر ضلع را 14 cm بگیرید.

۱۱ - ABC تیغه‌ای است به شکل مثلث متساوی الساقین که در آن $AB = AC = 15\text{ cm}$ و $BC = 24\text{ cm}$. جرم تیغه 0.24 kg است. وزنه‌هایی به جرم $0.06/0.06$ و $0.04/0.04$ کیلوگرم به ترتیب در رئوس A، B و C قرار می‌دهیم. فاصله مرکز ثقل دستگاه را از BC بیابید.

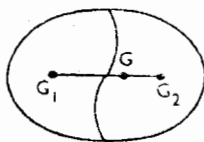
۱۲ - جرم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ کیلوگرم به ترتیب در رئوس A، B، C و D از یک مستطیل قرار گرفته‌اند. $AB = 6\text{ m}$ ، $BC = 12\text{ m}$. فاصله‌های قائم مرکز ثقل را از AB و BC بیابید.

۸.۱۶. مرکز ثقل یک جسم مرکب

اگر وزن و مرکزهای ثقل دو بخش از یک جسم را بدانیم می‌توانیم به ترتیب زیر مرکز ثقل کل جسم را پیدا کنیم.

فرض می‌کنیم G_1 و G_2 مرکزهای ثقل دو بخش از یک جسم و W_1 و W_2 وزنهای این دو بخش باشند (شکل ۱۶-۵).

این وزنها نیروهای همسو و متوازی هستند که بر G_1 و G_2 اثر می‌کنند. برایندها



شکل ۱۶-۵

برابر است با $W_1 + W_2$ که بر نقطه G واقع بر $G_1 G_2$ اثر می کند و طوری است که

$$W_1 \times G_1 G = W_2 \times G G_2$$

$$\therefore \frac{G_1 G}{W_2} = \frac{G G_2}{W_1} = \frac{G_1 G_2}{W_1 + W_2}$$

$$\therefore G_1 G = \frac{W_2}{W_1 + W_2} G_1 G_2 \quad \text{و} \quad G G_2 = \frac{W_1}{W_1 + W_2} G_1 G_2$$

این نتیجه را ممکن بود با استفاده از فرمول کلی، یا با استفاده از شیوه ای که برای اثبات فرمول به کار بردیم، که در واقع کاربرد اصل گشتاورهاست، به دست آوریم.

می دانیم که برای W_1 که در G_1 وارد می شود و W_2 که در G_2 وارد می شود $W_1 + W_2$ است که در نقطه ای مانند G واقع بر $G_1 G_2$ وارد می شود.

G_1 را به عنوان مبدأ می پذیریم و گشتاورها را حول این نقطه می گیریم. خواهیم داشت:

$$(W_1 + W_2) G_1 G = W_2 \times G_1 G_2$$

$$\therefore G_1 G = \frac{W_2}{W_1 + W_2} G_1 G_2$$

۹.۱۶. مرکز ثقل جزء باقیمانده از برش

اگر وزن و مرکز ثقل جسمی را بدانیم و مرکز ثقل و وزن جزئی را که از آن می بریم نیز بدانیم، مرکز ثقل جزء باقیمانده از برش را می توانیم به شرح زیر به دست آوریم.

در شکل بند قبلی فرض می کنیم که G مرکز ثقل کل جسم، W وزن آن، و G_2 و W_2 مرکز ثقل و وزن جزء بریده شده باشد.

واضح است که مرکز ثقل جزء باقیمانده از برش باید بر روی همان خطی باشد که G_2 و G بر روی آنند.

نیز مجموع گشتاورهای وزنهای دو جزء این جسم حول هر نقطه ای واقع بر این خط باید برابر گشتاور وزن کل جسم حول آن نقطه باشد.

بنابراین گشتاور جزء باقیمانده از برش برابر است با گشتاور کل منهای گشتاور جزء بریده شده.

اگر G_1 مرکز ثقل جزء باقیمانده از برش باشد با گرفتن گشتاور حول نقطه G_2 خواهیم داشت:

$$(W - W_2) G_2 G_1 = W \times G_2 G$$

$$\therefore G_2 G_1 = \frac{W}{W - W_2} G_2 G$$

۱۰.۱۶. اگر جسم مرکبی از چند جزء تشکیل شده باشد، یا آنکه برشهای متعددی از یک جسم برداشته شده باشد، دومحور در نظر می گیریم و همان شیوه ای را دنبال می کنیم که با آن فرمول کلی را به دست آوردیم. بهتر است به جای آنکه از فرمول استفاده کنیم مستقیماً اصل گشتاورها را به کار ببریم.

برای جسمی که از چند جزء تشکیل شده است، حول هرمحور خواهیم داشت:

$$\text{مجموع گشتاورهای اجزا} = \text{گشتاور کل}$$

به همین شیوه برای جزء باقیمانده از برش، پس از بریدن اجزاء متعدد می توانیم بنویسیم:

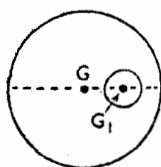
مجموع گشتاورهای اجزاء بریده شده — گشتاور کل = گشتاور جزء باقیمانده از برش
این روشها را در مثالهای زیر روشن کرده ایم.

باید توجه داشت که محل مرکز ثقل تنها بستگی به متادیر نسبی وزنها دارد. اغلب بهتر است که به جای آنکه از خود وزنها استفاده کنیم کمیت های متناسب با آنها را به کار ببریم.

۱۱.۱۶. مثال ۱: در یک قرص مدور به قطر ۱۸ cm سوراخی مدور به قطر ۶ cm ایجاد می کنیم. مرکز سوراخ در فاصله ۴ cm از مرکز قرص است. مکان مرکز ثقل جزء باقیمانده را پیدا کنید.

حل: فرض می کنیم G ، G_1 (شکل ۱۶-۶) مرکزهای قرص و سوراخ باشد. آشکار است که مرکز ثقل جزء باقیمانده باید بر روی $G_1 G$ و در مقایسه با G_1 در طرف دیگر G باشد.

در اینجا بهتر است که گشتاورها را حول G بگیریم. در این صورت گشتاور کل



شکل ۱۶-۶

قرص برابر صفر است. گشتاورهای اجزاء بریده شده و باقیمانده برابر و مخالف یکدیگرند.

با جدولبندی وزنها و فاصله‌ها خواهیم داشت:

قرص	وزن	فاصله مرکز ثقل از G
جزء بریده شده	۸۱	۰
جزء باقیمانده	۹	۴ cm
	۷۲	x cm

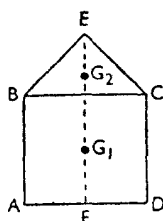
اگر حول G گشتاور بگیریم، خواهیم داشت:

$$72x = 36$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

یادداشت. در این مثال مجذور شعاعها را به عنوان وزن اختیار کردیم. این سبب می شود که از وارد شدن π و وزن حجمی قرص در محاسباتها جلوگیری کنیم.

مثال ۲: ورقه ای است فلزی به شکل مربع ABCD که به ضلع BC آن مثلثی متساوی الساقین با قاعده BC متصل شده است. اگر هر ضلع مربع ۱۲ cm و ارتفاع مثلث ۹ cm باشد، فاصله مرکز ثقل ورقه را از خط AD بیابید.



شکل ۷-۱۶

حل : فرض می کنیم ABCECD (شکل ۷-۱۶) ورقه فلزی باشد. EF را عمود بر AD

رسم می کنیم. مرکز ثقل مربع در G_1 است، به طوری که $FG_1 = 6$ cm. مرکز

ثقل مثلث در G_2 واقع بر EF است، به طوری که $EG_2 = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ cm.

بنابراین $FG_2 = 15$ cm. وزنها متناسب با مساحتها، یعنی متناسب با ۱۴۴ و ۵۴ هستند. با جدولبندی وزنها و فاصله‌های مرکزهای ثقل از محورها، خواهیم

داشت:

فاصله مرکز ثقل از AD	وزن	
۶ cm	۱۴۴	مربع
۱۵ cm	۵۴	مثلث
x cm	۱۹۸	کل ورقه

حول AD گشتاور می گیریم:

$$198x = 144 \times 6 + 54 \times 15$$

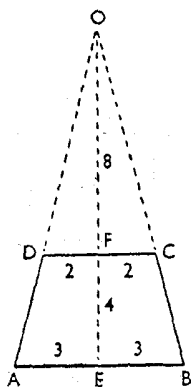
$$= 93 \times 18$$

$$\therefore x = 8\frac{5}{11}$$

مثال ۳: شعاعهای وجوه يك مخروط ناقص ۲ m و ۳ m است، و ضخامت این مخروط ۴ m است. فاصله مرکز ثقل را از وجه بزرگتر بیابید.

حل: فرض می کنیم ABCD (شکل ۱۶-۸) مقطع این مخروط ناقص را از محور EF آن نشان دهد.

AD، BC، و EF را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. رأس مخروطی بوده است که این مخروط ناقص از آن بریده شده است.



شکل ۱۶-۸

با استفاده از مثلثهای متشابه OFC و OEB خواهیم داشت:

$$\frac{OE}{OF} = \frac{EB}{FC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{OF + 4}{OF} = \frac{3}{2}$$

∴

$$\therefore \frac{4}{OF} = \frac{1}{2} \text{ یا } OF = 8 \text{ m}$$

اما حجم اجسام توپر متشابه متناسب با مکعب ابعاد مربوطه آنهاست. بنابراین

$$\therefore \frac{\text{حجم مخروط ODC}}{\text{حجم مخروط OAB}} = \frac{8^3}{12^3} = \frac{8}{27}$$

بنابراین وزنهای مخروط کل، مخروط بریده شده بالایی و مخروط ناقص به ترتیب متناسب با ۸، ۲۷ و ۱۹ است.

مرکزهای ثقل هر سه مخروط بر روی خط OE است.

با جدول بندی وزن و فاصله های مرکزهای ثقل از O خواهیم داشت:

وزن	فاصله مرکز ثقل از O
مخروط کل ۲۷	۹ m
مخروط بریده شده ۸	۶ m
مخروط ناقص ۱۹	x m

با گرفتن گشتاور حول O خواهیم داشت:

$$19x = 27 \times 9 - 48 = 195$$

$$\therefore x = \frac{195}{19}$$

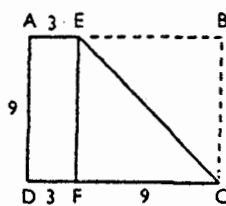
بنابراین فاصله مرکز ثقل از E برابر است با

$$12 - \frac{195}{19} = \frac{33}{19} \text{ m}$$

مثال ۴: ورقه ای است از کاغذ به شکل مستطیل که عرض آن ۹ cm و طول آن ۱۲ cm

است. کاغذ را از یک گوشه طوری تا می کنیم که یکی از دضلع کوچکتر کاملاً بر روی ضلع بزرگتر بخوابد. اکنون مرکز ثقل کل ورقه را که تا شده است بیابید.

حل: فرض می کنیم AECFD (شکل ۱۶-۹) ورقه تا شده را نشان دهد، به طوری که جزء مثلث شکل آن یعنی EFC دولایه است.



شکل ۱۶-۹

بهرتر است DC و DA را به عنوان محورهای x و y انتخاب کنیم.

جرم ADFE متناسب با ۲۷ و جرم EFC متناسب با ۸۱ است.

با جدولبندی جرما و فاصله های مرکزهای ثقل از محورها خواهیم داشت:

جرم	فاصله مرکز ثقل	از DA	از DC
ADFE	۲۷	$\frac{3}{2}$ cm	$\frac{9}{2}$ cm
EFC	۸۱	$3+3=6$ cm	۳ cm
کل شیء	۱۰۸	x cm	y cm

حول DA گشتاور می گیریم. خواهیم داشت:

$$108x = 486 + \frac{81}{2} = \frac{1053}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1053}{216} = 4\frac{7}{8}$$

حول DC گشتاور می گیریم. خواهیم داشت:

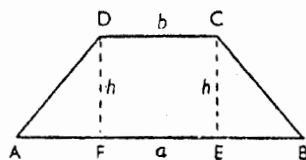
$$108y = 243 + \frac{243}{2} = \frac{729}{2}$$

$$\therefore y = \frac{729}{216} = 3\frac{3}{8}$$

مثال ۵: ABCD دوزنقه ای است که در آن اضلاع AB و CD موازیند و طول آنها a

و b است. ثابت کنید که فاصله مرکز ثقل از AB برابر است با $\frac{1}{3}h \frac{a+2b}{a+b}$ ،

که در آن h فاصله میان AB و CD است.



شکل ۱۰-۱۶

حل: روش (الف). CE و DF را عمود بر AB رسم می کنیم (شکل ۱۰-۱۶).

در این صورت خواهیم داشت:

مساحت	فاصله مرکز ثقل از AB	
ABCD	$\frac{1}{2}(a+b)h$	x
DCEF	bh	$\frac{1}{2}h$
ADF	$\frac{1}{2}AF \times h$	$\frac{1}{3}h$
CEB	$\frac{1}{2}EB \times h$	$\frac{1}{3}h$

بنابراین با گرفتن گشتاور حول AB خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+b)hx &= b \times \frac{h^2}{2} + \frac{1}{2} \times AF \times \frac{h^2}{3} + \frac{1}{2} \times EB \times \frac{h^2}{3} \\ &= \frac{h^2}{2} \left(b + \frac{AF+EB}{3} \right) \\ AF+EB &= a-b\end{aligned}$$

اما

$$\therefore \frac{1}{2}(a+b)hx = \frac{h^2}{2} \left(b + \frac{a-b}{3} \right) = \frac{h^2}{2} \times \frac{2b+a}{3}$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}h \frac{a+2b}{a+b}$$

دوش (ب). محل مرکز جرم را می توان بادر نظر گرفتن این واقعیت به دست آورد که دوزنقه از دو مثلث ADC و ACB تشکیل شده است که مساحت های آنها به ترتیب

$\frac{1}{2}bh$ و $\frac{1}{2}ah$ است. سپس باید به جای هر مثلث سه نقطه مادی تصور کرد که در

رئوس آنها قرار دارد. در رئوس ADC سه نقطه مادی هر یک به جرم $\frac{1}{6}bh$ و در

رئوس ACB سه نقطه مادی هر یک به جرم $\frac{1}{6}ah$.

نتیجه این می شود که در رأس A و C جرم $\frac{1}{6}(a+b)h$ و در رأس B جرم

$\frac{1}{6}ah$ و در رأس D جرم $\frac{1}{6}bh$ قرار می گیرد.

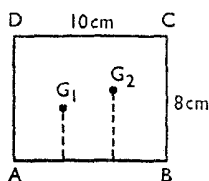
با گرفتن گشتاور حول AB خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}(a+b)hx = \left[\frac{1}{6}bh + \frac{1}{6}(a+b)h \right] h$$

$$= \frac{1}{6}[a+2b]h^2$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}h \frac{a+2b}{a+b}$$

مثال ۶: تخته‌ای است یکنواخت به شکل مستطیل ABCD که در آن $AB = 10 \text{ cm}$ و $AD = 8 \text{ cm}$. دوسوراخ مربع شکل هریک به ضلع 2 cm در این تخته ایجاد شده است. این دوسوراخ با همان ضخامت اولیه از فلزی پر شده است که وزن مخصوص آن ۹ برابر وزن مخصوص تخته است. اگر AB و AD را به عنوان محورهای x و y اختیار کنیم و اگر مختصات مرکزهای ثقل این دوسوراخ نسبت به این دو محور به ترتیب $(4, 3)$ و $(7, 4)$ باشد، مختصات مرکز ثقل تخته را پس از پر کردن سوراخها بیابید.



شکل ۱۱-۱۶

حل : فرض می‌کنیم G_1 و G_2 (شکل ۱۱-۱۶) مرکزهای سوراخها باشند. مساحت هرسوراخ 4 cm^2 است و وزن نسبی آن ۳۶ است. بهتر آن است که تخته‌ای را که سوراخهای آن پر شده است تخته‌ای یکنواخت در نظر بگیریم که در نقاط G_1 و G_2 وزنه‌های ۳۲ افزوده شده است. در این صورت خواهیم داشت:

فاصله مرکز ثقل		وزن	
از AB	از AD		
۴ cm	۵ cm	۸۰	تخته اصلی
۳ cm	۴ cm	۳۲	وزنه در G_1
۴ cm	۷ cm	۳۲	وزنه در G_2
$y \text{ cm}$	$x \text{ cm}$	۱۴۴	تخته پر شده

با گرفتن گشتاور حول AD خواهیم داشت:

$$144x = 400 + 128 + 224 = 752$$

$$\therefore x = \frac{752}{144} = 5\frac{2}{9}$$

با گرفتن گشتاور حول AB خواهیم داشت:

$$144y = 320 + 96 + 128 = 544$$

$$\therefore y = \frac{544}{144} = 3\frac{7}{9}$$

تمرین ۲.۱۶

۱ - ورقه‌ای است از کاغذ که به شکل مستطیل ABCD بوده است که از آن مثلثی متساوی-الساقین به قاعده BC برداشته‌اند. اگر $AB = 12 \text{ cm}$ ، $AD = 8 \text{ cm}$ ، و ارتفاع مثلث 12 cm باشد، فاصله مرکز ثقل ورقه را از AD پیدا کنید.

۲ - در قرص مدوری به شعاع 12 cm سوراخی به قطر 2 cm ایجاد شده است، مرکز سوراخ از مرکز قرص 6 cm فاصله دارد. محل مرکز ثقل باقیمانده قرص را پیدا کنید.

۳ - در یک قرص مدور به شعاع 12 cm دو سوراخ گرد هریک به شعاع 2 cm ایجاد کرده‌اند. مرکز سوراخها بر دو قطر متعامد قرص به فاصله 6 cm از مرکز قرص قرار دارند. محل مرکز ثقل باقیمانده قرص را پیدا کنید.

۴ - ورقه‌ای است از کاغذ به شکل مربع مستطیل ABCD که در آن $AB = 12 \text{ cm}$ ، و $AD = 8 \text{ cm}$ است. E نقطه وسط AD است. از این ورقه مثلث CED را می‌بریم. فاصله مرکز ثقل باقیمانده ورقه را از AD و AB بیابید.

۵ - ABCD تخته‌ای است مربعی شکل که هر ضلع آن 12 cm است. E نقطه‌ای است بر AD، به طوری که $DE = 3 \text{ cm}$. مثلث CED را می‌بریم. محل مرکز ثقل باقیمانده تخته را از AB و AD بیابید.

۶ - در مثلث ABC نقطه D وسط BC است. از مرکز جرم این مثلث خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقطه‌های E و F قطع کند.

ثابت کنید که مرکز جرم چهار ضلعی BEFC بر روی خط AD و به فاصله $\frac{7}{45}AD$ از نقطه D قرار دارد.

۷ - ABCD تیغه‌ای است مربعی شکل که طول هر ضلع آن 9 cm است. E و F به ترتیب نقطه‌هایی واقع بر BC و CD هستند به طوری که EC و CF هریک برابر 3 cm است. مرکز جرم جزء AB EF DA تیغه را بیابید.

۸ - ABCDEF ورقه‌ای است نازک از مقوا به شکل شش ضلعی منتظم. ثابت کنید که

اگر مثلث ABC از آن بریده شود و بر روی مثلث DEF قرار داده شود، مرکز ثقل کل به اندازه $\frac{2}{9}a$ جابه‌جا می‌شود که a طول ضلع شش ضلعی است.

۹ - ABCD ورقه‌ای است به شکل مستطیل که در آن $AB = 8 \text{ cm}$ و $BC = 12 \text{ cm}$ است. E نقطه وسط BC است. اگر جزء مثلثی شکل ABE از ورقه بریده شود و باقیمانده ورقه را از نقطه A آویزان کنیم، زاویه انحراف ضلع AD را نسبت به قائم مکان پیدا کنید.

۱۰ - ABCD تیغه‌ای است به شکل مستطیل که در آن $AB = CD = 2a$ و $AD = BC = 2b$ است. P و Q به ترتیب نقطه‌های وسط BC و CD هستند. جزء مثلثی شکل PCQ را از تیغه می‌بریم. ثابت کنید که فاصله‌های قائم مرکز ثقل باقیمانده تیغه از اضلاع AD و AB به ترتیب $\frac{19}{21}a$ و $\frac{19}{21}b$ است.

۱۱ - تیغه‌ای است مثلثی شکل که از دو فلز ساخته شده است. این دو فلز به وسیله خطی از هم جدا شده‌اند که موازی یکی از اضلاع مثلث است و از یک سوم فاصله میانه وارد بر آن ضلع می‌گذرد. نسبت چگالی‌های بخش‌های مثلثی و ذوزنقه‌ای این تیغه ۵ به ۴ است. مکان مرکز جرم این تیغه را پیدا کنید.

۱۲ - سه ورقه مستطیل شکل به ابعاد 60 cm در 5 cm و 90 cm در 5 cm و 30 cm در 4 cm به هم متصل شده‌اند و شکلی مانند T به وجود آورده‌اند. درازترین ورقه و کوتاه‌ترین ورقه، تکه‌های بالایی و پایینی را تشکیل داده‌اند. فاصله مرکز جرم را از کناره خارجی کوتاه‌ترین ورقه پیدا کنید.

۱۳ - ورقه‌ای است یک‌نواخت به شکل مربع که هر ضلع آن 30 cm است. دو سوراخ گرد در آن پدید آمده است که یکی به شعاع 2 cm است و دیگری به شعاع 1 cm . اگر دو ضلع متقاطع این ورقه را محورهای مختصات فرض کنیم، مختصات مرکز سوراخ بزرگتر $(13, 10)$ و مختصات مرکز سوراخ کوچکتر $(3, 20)$ است. مختصات مرکز جرم جسم باقیمانده را پیدا کنید.

۱۴ - ثابت کنید که، اگر ABCD ذوزنقه‌ای باشد که در آن اضلاع AB و CD با هم موازی‌ند، مرکز ثقل ذوزنقه خط واصل میان نقطه‌های وسط AB و CD را به نسبت

$$\frac{AB + 2CD}{2AB + CD}$$

تقسیم می‌کند.

۱۵ - ABC مثلثی است که در آن $AB = AC$ است. D، E، F به ترتیب نقطه‌های وسط BC، CA، AB است، و G مرکز ثقل مثلث است. اگر بخش AFGE از

مثلث برداشته شود، به شرط آنکه $AD = 0.9 \text{ m}$ باشد، فاصله A را از مرکز ثقل باقیمانده پیدا کنید.

۱۶- ورقه‌ای است یکنواخت به شکل مستطیل $ABCD$. خط میان نقطه‌های وسط CB و CD را برش می‌زنیم و بخش مثلث شکل را از مستطیل جدا می‌کنیم. ثابت کنید که مرکز ثقل جسم باقیمانده در فاصله $\frac{1}{21}AC$ از مرکز مستطیل است.

۱۷- دو مخروط مسدور قائم دارای قاعده‌های یکسان هستند و محورهایشان در دو جهت متفاوت است. اگر این دو مخروط توپرا از قاعده به هم بچسبانیم که جسمی دوکی شکل درست کنند، ثابت کنید که مرکز ثقل آنها در وسط خطی است که دو رأس دو مخروط را به هم وصل می‌کند و از مرکز قاعده مشترک این دو مخروط می‌گذرد.

۱۸- تیغه‌ای است یکنواخت به شکل مثلث متساوی الاضلاع که طول هر ضلع آن 20 cm و جرم آن 240 g است. در گوشه‌های A ، B ، و C از این تیغه، به ترتیب جرمهای 30 ، 40 ، و 50 گرم قرار می‌دهیم. فاصله مرکز ثقل مجموعه را از ضلع BC بیابید.

۱۹- شعاعهای دوانتهای مدور یک مخروط ناقص توپر به نسبت 2 به 3 هستند. ثابت کنید که فاصله‌های مرکز جرم این مخروط ناقص از دوانتهای آن به نسبت 43 به 33 هستند.

۲۰- قطعه‌ای متوا به شکل مستطیل $ABCD$ است، که در آن $AB = 5 \text{ cm}$ و $BC = 8 \text{ cm}$ است. تکه‌ای از این متوا را به شکل مثلث متساوی الاضلاع ABE به قاعده AB می‌بریم. فاصله مرکز ثقل باقیمانده را از DC حساب کنید.

۲۱- جسمی است به شکل یک مخروط مدور قائم که بر روی استوانه‌ای قرار دارد. قطر قاعده 10 m ، ارتفاع استوانه $4/8 \text{ m}$ ، و طول شیب مخروط 6 m است. اگر مخروط و استوانه توپر و از یک جنس باشند، ارتفاع مرکز ثقل را از زمین حساب کنید.

۲۲- چهاروجهی منظم بسته‌ای داریم که از ورقه‌های نازک فلز ساخته شده است. محل مرکز ثقل آن را در دو حالت زیر پیدا کنید: (۱) هنگامی که خالی است، (۲) هنگامی که پر از مایعی است که وزن آن سه برابر وزن چهاروجهی است.

۲۳- مخروط ناقصی است که شعاعهای دوقاعده آن r_1 و r_2 و فاصله میان دوقاعده آن h است. بخش منحنی آن با ماده یکنواخت نازکی پوشانده شده است. ثابت کنید که ارتفاع مرکز ثقل این لایه از قاعده‌ای که شعاع آن r_2 است برابر است با

$$\frac{h(2r_1 + r_2)}{3(r_1 + r_2)}$$

۲۴- تخته‌ای چوبی و یکنواخت به شکل مثلث متساوی الساقین به اضلاع ۱۲، ۸ و ۱۲ سانتیمتر. دو روی این تخته را با لایه فلزی نازکی پوشانده‌اند. اگر وزن این لایه فلزی دو برابر وزن تخته چوبی باشد، محل مرکز ثقل تخته لایه دار را پیدا کنید.

۲۵- سیمی است یکنواخت که خم شده است و به شکل مثلث ABC درآمده است. این جسم را از A آویزان می‌کنیم. ثابت کنید که اگر شاقولی را نیز از A آویزان کنیم، امتداد شاقول BC را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند، به طوری که

$$\frac{BD}{DC} = \frac{a+b}{a+c}$$

که در آن a ، b و c طول اضلاع مثلث است.

۲۶- مخروط ناقصی داریم که قطر دوسر آن به ترتیب ۳۰ cm و ۹۰ cm است. ارتفاع آن ۶۵ cm است. ثابت کنید که مرکز ثقل در $22/5$ cm از قاعده بزرگتر است.

۲۷- از مرکز ثقل يك مثلث خطی به موازات یکی از اضلاع مثلث رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مرکز ثقل بخش چهارضلعی باقیمانده میانه مثلث را به نسبت ۷ به ۳۸ تقسیم می‌کند.

۲۸- يك قوطی حلبی به شکل مخروط قائم است که سطح جانبی و قاعده آن، همه از يك ورقه نازک یکنواخت فلزی تشکیل شده است. نیم زاویه قائم رأس مخروط 30° است. این قوطی را با مایعی پر می‌کنیم که وزن آن دو برابر وزن قوطی است. ارتفاع مرکز ثقل مجموعه را از بالای قاعده مخروط نسبت به ارتفاع مخروط پیدا کنید.

۲۹- مخروط ناقص توپری است که از ماده‌ای یکنواخت تشکیل شده است. ارتفاع آن h و شعاعهای دوقاعده آن a و b است ($a > b$). سوراخی استوانه‌ای شکل در این مخروط ناقص پدید می‌آوریم. محور سوراخ منطبق بر محور مخروط است و شعاع آن برابر شعاع قاعده کوچکتر مخروط ناقص است. ثابت کنید که فاصله مرکز ثقل جسم باقیمانده از قاعده بزرگتر برابر است با

$$\frac{h(a+3b)}{4(a+2b)}$$

۳۰- ثابت کنید که اگر شعاع قاعده يك مخروط ناقص قائم n برابر شعاع قاعده دیگر باشد، مرکز ثقل این مخروط محور مخروط را به نسبت

$$3n^2 + 2n + 1 \text{ به } n^2 + 2n + 3$$

تقسیم می‌کند.

۳۱- مرکز ثقل مخروط توخالی قائمی را بیابید که جنس قاعده آن از جنس سطح جانبی آن است. اگر ارتفاع مخروط و قطر قاعده آن برابر باشند، هنگامی که مخروط از نقطه‌ای واقع بر محیط قاعده آویزان می‌شود، زاویه‌ای که محور آن با خط قائم مکان می‌سازد چقدر است؟

۳۲- ظرف مخروطی شکل توخالی از يك ورقه فلزی تشکیل شده است. قاعده مخروط بسته است. اگر این مخروط به وسیله صفحه‌ای به موازات قاعده و از وسط ارتفاع قائم مخروط بریده شود، و مخروط بالایی برداشته شود، ثابت کنید که مرکز ثقل ظرف باقیمانده برابر است با

$$\frac{21h}{3(31+42)}$$

که در آن h ارتفاع قائم ظرف اصلی، l طول یال جانبی، و π شعاع قاعده است.

۳۳- مرکز ثقل تیغه یکنواختی به شکل L را پیدا کنید که در آن طول و عرض خارجی بازوی قائم به ترتیب 10 cm و 1 cm و طول و عرض خارجی بازوی افقی به ترتیب 6 cm و 2 cm است.

۳۴- گوشه‌ای از يك مكعب توپر چوبی، را باره طوری می‌بریم که سطح برش از نقطه‌های وسط لبه‌هایی که به آن گوشه متصل است می‌گذرد. فاصله‌های مرکز ثقل جسم باقیمانده را از سه وجه بریده نشده پیدا کنید.

۳۵- هرمی مثلث القاعده که طول هروجه آن برابر a است با يك صفحه به موازات قاعده بریده می‌شود. ارتفاع صفحه برش نصف ارتفاع هرم است. محل مرکز ثقل هرم ناقص باقیمانده را پیدا کنید.

۳۶- تیغه‌ای است به شکل مستطیل $ABCD$ که به آن مثلث BEC طوری افزوده شده است که BE در امتداد AB است. اگر طولهای AD ، AB ، و BE به ترتیب a ، b ، و c باشند، پیدا کنید که مرکز ثقل تیغه در چه فاصله‌ای از AB و AD قرار دارد. همچنین ثابت کنید که اگر $c = a/\sqrt{3}$ باشد مرکز ثقل بر روی BC خواهد بود.

۳۷- چهار الوار مشابه، هریک به طول $3/6\text{ m}$ است. الوار دومی طوری بر روی الوار اولی قرار گرفته است که سر آن $5/6\text{ m}$ بیرون زده است. الوار سومی طوری بر روی الوار دومی قرار گرفته است که سر آن $5/9\text{ m}$ از این الوار بیرون زده است. الوار چهارمی نیز طوری بر روی الوار سومی قرار گرفته است که سر آن $1/8\text{ m}$ از این الوار بیرون زده است. الوارها محکم به هم بسته شده‌اند. مکان مرکز ثقل را پیدا کنید.

۳۸- بشکله‌ای است به شکل مکعب که از ورقه‌ای فلزی تشکیل شده است. طول هر ضلع آن برابر a است. در مرکز قاعده آن سوراخی مدور به قطر $\frac{a}{4}$ پدید می‌آوریم. از همان ورقه‌ای که مکعب را ساخته‌ایم لوله‌ای به شکل استوانه با قطر قاعده $\frac{a}{4}$ و به ارتفاع $\frac{a}{4}$ می‌سازیم. لبه استوانه را به لبه سوراخ لحیم می‌کنیم و سردیگر استوانه را با یک ورقه گرد از همان جنس می‌بندیم. مرکز جرم مجموعه را پیدا کنید.

۳۹- استوانه‌ای است توپر به جرم M و شعاع a . به دوسر آن دو قرص مدور کوچک، هر یک به جرم m ، طوری لحیم شده است که خط واصل میان مرکزهای دو قرص به موازات محورها استوانه و به فاصله c از آن است. در این استوانه سوراخی استوانه‌ای شکل به موازات محور آن و به شعاع b پدید می‌آوریم. تعیین کنید فاصله محور این سوراخ تا محور استوانه چقدر باشد تا مرکز ثقل جسم باقیمانده و قرصها بر روی محورها استوانه باشد. بیشترین مقدار نسبت $\frac{m}{M}$ چقدر باید باشد تا پاسخ مسئله امکانپذیر باشد؟

۴۰- داربستی است به شکل یک چهار وجهی که از شش میله یکنواخت تشکیل شده است. هر میله با میله مقابل خود برابر است. ثابت کنید که مرکز ثقل این چهار وجهی در جایی است که مرکز ثقل چهار وجهی توپر قرار دارد.

۱۲-۱۶. تیغه چهار ضلعی

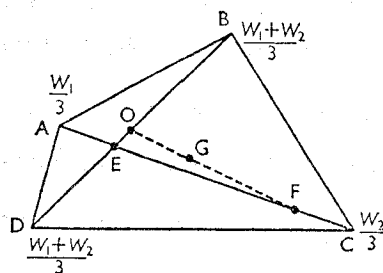
جای مرکز ثقل یک چهار ضلعی را می‌توان به آسانی تعیین کرد. یکی از قطرهای چهار ضلعی را رسم می‌کنیم و چهار ضلعی را به صورت دو مثلث درمی‌آوریم. سپس هر یک از این مثلثها را با سه نقطه مادی در سه رأس مثلث جانشین می‌کنیم که جرم هر کدام یک سوم جرم مثلث است.

برای تعیین جای مرکز ثقل راههای گوناگون وجود دارد، که در اینجا یکی از آن راهها را بیان می‌کنیم.

فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۱۶-۱۲) تیغه چهار ضلعی باشد که قطرهای آن، AC و BD، همدیگر را در نقطه E قطع می‌کنند.

وزن کل چهار ضلعی را W و وزن مثلثهای ABD و BCD را به ترتیب W_1 و W_2 می‌گیریم.

چون مساحت‌های ABD و BCD به نسبت‌های AE به EC است.



شکل ۱۶-۱۲

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{AE}{EC}$$

به جای مثلث ABD سه نقطه مادی، هر یک به جرم $\frac{1}{3}W_1$ در نقاط A، B، و D در نظر می گیریم. به جای مثلث BCD نیز سه نقطه مادی، هر یک به جرم $\frac{1}{3}W_2$ در نقاط B، C، و D در نظر می گیریم. در این صورت در نقطه A جرم $\frac{1}{3}W_1$ ، و در نقطه C جرم $\frac{1}{3}W_2$ و در هر یک از نقاط B و D جرمی برابر $\frac{1}{3}(W_1 + W_2)$ داریم.

اما مرکز ثقل $\frac{1}{3}W_1$ در A و $\frac{1}{3}W_2$ در C نقطه ای است مانند F واقع بر روی AC، به طوری که

$$W_1 \times AF = W_2 \times CF$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{AE}{EC}$$

$$CF = AE$$

بنابراین

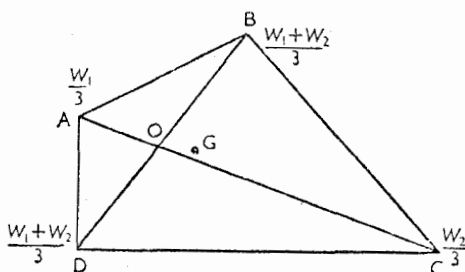
وزنه هایی که در A و C هستند معادلند با وزنه $\frac{1}{3}W$ در F.

وزنه هایی که در B و D هستند معادلند با وزنه $\frac{2}{3}W$ در O، که O نقطه وسط BD است. بنابراین مرکز ثقل کل چهار ضلعی در نقطه ای مانند G واقع بر OF است، به طوری که $2OG = GF$

مثال: G مرکز ثقل یک چهار ضلعی مسطح یکنواخت است. G' مرکز ثقل چهار نقطه مادی

یکسان است که در چهار گوشهٔ این چهارضلعی قرار داده اند. O محل تلاقی قطر هاست. ثابت کنید که O ، G ، و G' بر یک راستا قرار دارند و $OG' = 3GG'$.

حل : فرض می کنیم $ABCD$ (شکل ۱۶-۱۳) چهارضلعی مذکور باشد. وزن مثلثهای ABD و BCD را به ترتیب برابر W_1 و W_2 می گیریم. به جای ABD سه نقطهٔ مادی، هر یک به جرم $\frac{1}{3}W_1$ در A ، B و D می گذاریم و به جای BCD سه نقطهٔ مادی، هر یک به جرم $\frac{1}{3}W_2$ در B ، C و D می گذاریم.



شکل ۱۶-۱۳

G مرکز ثقل این نقطه های مادی است و بنابراین وزن کل یعنی $W_1 + W_2$ بر این نقطه وارد می شود.

اما G' مرکز ثقل این نقطه های مادی به علاوه نقطه های مادی $\frac{1}{3}W_1$ در A و $\frac{1}{3}W_2$

در C است که معادل است با $\frac{1}{3}(W_1 + W_2)$ در O (زیرا $\frac{AO}{OC} = \frac{W_2}{W_1}$).

چون G' مرکز ثقل $W_1 + W_2$ در G و $\frac{1}{3}(W_1 + W_2)$ در O است، باید

بر راستای OG قرار گیرد و $OG' = 3GG'$ باشد.

تمرین ۳.۱۶

۱ - ثابت کنید که مرکز ثقل یک چهارضلعی $ABCD$ در همان جایی است که اگر سه نقطهٔ مادی به جرم هایی متناسب با AO ، OC و AC به ترتیب در A ، C و نقطهٔ وسط BD قرار می دادیم. O محل تلاقی AC و BD است.

۲ - ABCD چهار ضلعی مسطح یکنواختی است که محل تلاقی قطرهای آن L است. برقطرهای AC و BD به ترتیب نقطه‌های M و N را طوری انتخاب می‌کنیم که $AM = CL$ و $BN = DL$ باشد. ثابت کنید که مرکز جرم چهارضلعی ABCD بر مرکز جرم مثلث LMN منطبق است.

۳ - ABCD تیغه‌ای است مسطح و یکنواخت به شکل چهارضلعی ABCD، که در آن AB موازی DC است. طول AB برابر a و طول DC برابر b است. ثابت کنید که مرکز ثقل این تیغه منطبق بر مرکز ثقل چهار نقطه مادی است که وزن آنها متناسب با a ، $a+b$ ، b ، $a+b$ است که به ترتیب در نقاط A، B، C و D قرار گرفته‌اند. اگر $AD = BC = c$ و $b > a$ باشد، در صورتی که محورهای مختصات، یکی DA و دیگری خط عمود بر DA در نقطه D باشد، مختصات مرکز ثقل را پیدا کنید.

۴ - مختصات مرکز ثقل تیغه یکنواختی به شکل چهارضلعی را تا دورقم اعشار به دست آورید. مختصات رئوس این چهارضلعی عبارتند از $(5, 0)$ ، $(3, 7)$ ، $(-2, 5)$ ، و $(-5, 0)$.

۵ - الف- ثابت کنید که مرکز ثقل صفحه یکنواخت مثلث شکل ABC منطبق بر مرکز ثقل سه نقطه مادی یکسان است که در نقاط X، Y، و Z قرار گرفته‌اند که به ترتیب بر اضلاع BC، CA، و AB طوری واقعند که

$$\frac{BX}{XC} = \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{ZB}$$

ب- ABCD دوزننه‌ای است که طول اضلاع موازی آن، AB و DC، به ترتیب a و b است. E و F نقطه‌های وسط AB و DC است. H نقطه وسط EF است. ثابت کنید که مرکز جرم این دوزننه منطبق بر مرکز جرم اجرایی متناسب با a ، b ، $2a+2b$ است که به ترتیب در E، F، و H قرار دارند.

۶ - صفحه‌ای یکنواخت به شکل چهارضلعی ABCD که قطرهای AC و BD در نقطه O برهم عمودند، به طوری که $AO = 5$ cm، $OC = 10$ cm، $BO = 2/5$ cm، و $OD = 7/5$ cm. فاصله مرکز ثقل چهارضلعی را از هر یک از قطرهای آن پیدا کنید.

۷ - AD، BE، و CF میانه‌های مثلث ABC هستند و G نقطه تلاقی آنهاست. اگر بخش AFGE را از مثلث ببریم، ثابت کنید که مرکز ثقل جسم باقی‌مانده بر روی GD و به فاصله $\frac{7}{12}GD$ از D است.

۸ - ABCD، صفحه‌ای است به شکل چهارضلعی که به مثلث ABX با مساحت یکسان تبدیل شده است (C بر روی BX است). ثابت کنید که مرکز ثقل ABCD و ABX از AC به یک فاصله‌اند.

۹ - ABCD تیغه چهارضلعی مسطحی است که قطرهای آن در O تلاقی می کنند. AO کوچکتر از OC و DO کوچکتر از OB است. S نقطه وسط BD است. T نقطه وسط AC است، و OSKT یک متوازی الاضلاع است. ثابت کنید که مرکز ثقل تیغه ABCD بر مرکز ثقل سه نقطه مادی یکسان که در S، T، و K قرار گیرند منطبق است.

۱۰ - X و Y نقطه های وسط دو ضلع متوازی یک چهارضلعی هستند که طول آنها به ترتیب a و b است. ثابت کنید که G، مرکز جرم چهارضلعی، XY را به نسبت $\frac{2b+a}{2a+b}$ تقسیم می کند.

در یک شش ضلعی منتظم یکنواخت، که طول هر ضلع آن برابر a است، برشی به موازات یکی از اضلاع و به فاصله $\frac{1}{3}ka\sqrt{3}$ از این ضلع می دهیم، به طوری که $k < 1$ است. ثابت کنید که فاصله مرکز ثقل جسم باقیمانده از مرکز شش ضلعی برابر است با

$$\frac{k(3-k^2)}{3(6-2k-k^2)}a\sqrt{3}$$

۱۱ - مرکز ثقل صفحه یکنواخت مثلثی شکل ABC در نقطه G است. خطوطی به موازات BC، CA و AB طوری رسم می کنیم تا GA، GB و GC را به یک نسبت قطع کنند. مثلث های حاصل را می بریم. ثابت کنید که مرکز ثقل شش ضلعی باقیمانده منطبق بر مرکز جرم مثلث است.

۱۲ - تیغه ای سنگین به شکل یک چهارضلعی است و وزن آن $3W$ است. نقطه ای مادی به وزن W را بر محل تلاقی قطرها قرار می دهیم. ثابت کنید که اگر بر چهار گوشه این چهارضلعی چهار نیروی قائم یکسان از پایین به بالا وارد شود، تیغه به صورت افقی و در حال تعادل باقی خواهد ماند.

۱۳۰۱۶. هرگاه جسمی را از قاعده در تماس با صفحه ای قرار دهیم (و صفحه به اندازه ای ناصاف باشد که اگر شیب دار باشد، جسم نلغزد)، در صورتی که خط قائم مکانی که از مرکز ثقل جسم می گذرد از درون صفحه قاعده بگذرد، جسم در حال تعادل خواهد بود.

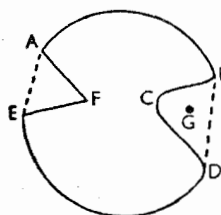
نیروهایی که بر جسم اثر می کنند یکی وزن آن است که به طور قائم وارد می شود و از مرکز ثقل می گذرد، دیگری نیروی عکس العمل صفحه است. اگر صفحه افقی باشد

عکس‌العملهای صفحه بر اجزای گوناگون قاعده نیروهای موازی هم‌راستایی هستند و بر اینند آنها آشکارا باید از نقطه‌ای واقع در درون صفحه قاعده بگذرد.

اگر صفحه شیب‌دار باشد بر ایند نیروهای اصطکاک بر نقاط مختلف قاعده و عکس‌العملهای قائم صفحه نیز باید بر ایند داشته باشند که از نقطه‌ای واقع در درون قاعده بگذرد.

بنابراین، در هر دو حالت، اگر عکس‌العمل برایند صفحه با وزن جسم تعادل داشته باشد، خط قائم مکان که از مرکز ثقل می‌گذرد، باید در درون صفحه قاعده باشد.

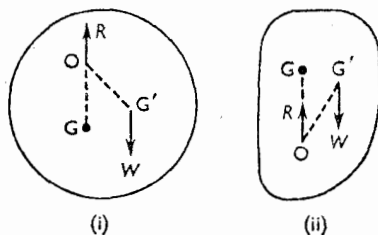
باید توجه داشت که اگر قاعده دارای زاویه‌هایی مقعر مانند شکل ۱۶-۱۴ باشد، سطح قاعده را سطح شکلی در نظر گرفت که از بستن نخ به دور جسم حاصل می‌شود. بنابراین نقطه‌ای مانند G را باید درون سطح قاعده پنداشت.



شکل ۱۴-۱۶

۱۴.۱۶. پایداری تعادل

اگر جسمی که فقط یک نقطه آن ثابت است در حالت تعادل باشد، آشکار است که مرکز ثقل جسم باید بر راستای خط قائم مکانی باشد که از آن نقطه ثابت می‌گذرد.



شکل ۱۵-۱۶

فرض می‌کنیم O (شکل ۱۵-۱۶) نقطه ثابت جسم، و G مرکز ثقل جسم باشد. تنها نیروهایی که بر جسم وارد می‌شوند عبارتند از وزن جسم که به طور قائم وارد می‌شود و از G می‌گذرد، و نیروی عکس‌العمل R که بر نقطه O وارد می‌شود.

اگر این نیروها در حالت تعادل باشند باید همراستا باشند، یعنی G باید در راستای قائمی باشد که از O می‌گذرد.

این شرط در دو حالت زیر برقرار است: (۱) هنگامی که G در امتداد قائم در زیر O است. (۲) هنگامی که G در امتداد قائم در بالای O است.

این هر دو شرط از حالت‌های تعادلند، اما تفاوتی میان این دو حالت وجود دارد. در حالت نخست، اگر جسم اندکی تغییر مکان دهد، به وضع تعادل خود برخواهد گشت. وزن جسم که اکنون از مرکز ثقل جابه‌جا شده می‌گذرد نسبت به O دارای گشتاوری می‌شود که مایل است جسم را به وضع اولیه برگرداند. در این حالت، تعادل را پایدار می‌گویند.

در حالت دوم، اگر جسم اندکی جابه‌جا شود، وزن جسم که اکنون از مرکز ثقل جابه‌جا شده می‌گذرد نسبت به O دارای گشتاوری می‌شود که مایل است جابه‌جایی جسم را افزایش دهد، و جسم مایل نیست که به وضع اولیه برگردد. در این حالت، تعادل را ناپایدار می‌گویند.

جسمی را در حالت تعادل پایدار می‌گوییم که اگر اندکی جابه‌جا شود، به وضع اولیه خود برگردد. دامنه‌ای که می‌توان جسمی را تا آن اندازه جابه‌جا کرد بی‌آنکه جسم واژگون شود اندازه یا درجه پایداری نامیده می‌شود. در اینجا به درجه پایداری کاری نداریم.

۱۵۰۱۶. مخروط مدور قائم که از قاعده بر روی یک صفحه افقی قرار دارد، به حالت تعادل است. اگر اندکی جابه‌جا شود، مایل است که به وضع اولیه برگردد.

اگر رأس مخروط با صفحه افقی در تماس باشد و محور مخروط قائم باشد، تعادل ناپایدار خواهد بود. اگر اندکی جابه‌جا شود سقوط خواهد کرد.

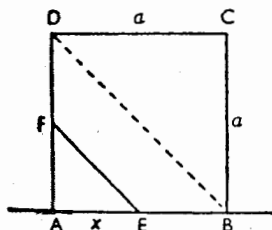
استوانه مدور قائم که سطح یک قاعده آن در تماس با صفحه افقی است، به حالت تعادل پایدار است. اما اگر سطح منحنی آن را در تماس با صفحه افقی قرار دهیم به هر وضعی می‌تواند قرار گیرد.

در این حالت تعادل را بی‌تفاوت می‌گوییم.

کره‌ای نیز که بر سطحی افقی قرار دارد به حالت تعادل بی‌تفاوت است.

در بسیاری از موارد، تشخیص پایدار بودن یا ناپایدار بودن حالت تعادل آسان است. اما در بعضی از موارد، تشخیص آن دشوار است و باید تعیین کرد که اگر جسم اندکی از حالت تعادل خود جابه‌جا شود به وضع اولیه برخواهد گشت یا خیر.

۱۶-۱۶. مثال ۱: جسمی مکعب شکل که طول هر لبه آن برابر a است بر صفحه‌ای افقی قرار دارد. با صفحاتی که نسبت به افق زاویه ۴۵° دارند و به موازات یکی از لبه‌های افقی مکعب هستند، به تدریج برشهایی از مکعب برمی داریم. وقتی که از هریک از چهار لبه مکعب طولی برابر x بریده می شود، مرکز جرم جسم باقیمانده را پیدا کنید، و نشان دهید که وقتی که تقریباً $۹x = ۵a$ است این جسم می افتد.



شکل ۱۶-۱۶

حل : فرض می کنیم ABCD (شکل ۱۶-۱۶) مقطع قائم مکعب از مرکز آن باشد.

بنابراین صفحات بریده شده به موازات DB خواهد بود.

فرض می کنیم EF خط تلاقی صفحه برش با ABCD، و $AE = x$ باشد. مرکز ثقل منشور باقیمانده در مرکز ثقل مثلث AEF خواهد بود.

وزن مکعب و وزن جسم باقیمانده متناسب با مساحت‌های مقاطع آنها،

یعنی a^2 و $\frac{1}{2}x^2$ است.

جدولی از وزن‌ها و فاصله‌های مراکز ثقل از BC و AB تنظیم می کنیم:

از AB	از BC		
$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a^2	مکعب
$\frac{1}{3}x$	$a - \frac{1}{3}x$	$\frac{1}{2}x^2$	منشور AFE
Y	X	$a^2 - \frac{1}{2}x^2$	جسم باقیمانده

نسبت به BC گشتاور می گیریم. خواهیم داشت:

$$(a^2 - \frac{1}{2}x^2)X = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2(a - \frac{1}{3}x)$$

$$\therefore X = \frac{a^3 - x^3 \left(a - \frac{1}{3}x\right)}{2a^2 - x^2}$$

نسبت به AB گشتاور می گیریم. خواهیم داشت:

$$\left(a^2 - \frac{1}{3}x^2\right)Y = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{6}x^3$$

$$\therefore Y = \frac{a^3 - \frac{1}{3}x^3}{2a^2 - x^2}$$

جسم هنگامی می افتد که مرکز ثقل آن به سمت چپ E برود، یعنی هنگامی

که $X > a - x$ باشد. بنابراین هنگامی در حال افتادن است که

$$a^3 - x^3 \left(a - \frac{1}{3}x\right) = (2a^2 - x^2)(a - x)$$

$$a^3 - ax^2 + \frac{1}{3}x^3 = 2a^3 - 2a^2x - ax^2 + x^3 \quad \text{یا}$$

$$\frac{2}{3}x^3 - 2a^2x + a^3 = 0 \quad \text{یا}$$

اگر $x = \frac{5}{9}a$ را در سمت چپ این معادله قرار دهیم:

$$\frac{250}{2187}a^3 - \frac{10}{9}a^3 + a^3 = \frac{250}{2187}a^3 - \frac{1}{9}a^3$$

که تقریباً برابر صفر است.

به همین ترتیب می توانیم بنویسیم:

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{x^3}{3a^2}$$

بنابراین با تقریب اول، $x = \frac{1}{2}a$

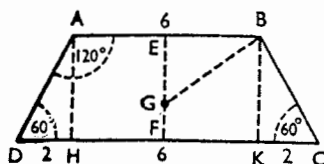
و با تقریب دوم

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^3}{3a^2} = \frac{13}{24}a = 0.54a$$

مثال ۲: مرکز ثقل منشور یکنواخت صلبی را بیابید که مقطع اصلی آن در شکل ۱۶-۱۷

داده شده است. تعیین کنید که اگر وجه BC در این منشور در تماس با صفحه‌ای افقی باشد، آیا منشور می‌تواند به حال تعادل بماند؟

حل : مرکز ثقل منشور درون مقطع آن است (زیرا آن را مقطع اصلی نامیده بودیم). از راه تقارن آشکار است که این مرکز ثقل بر روی خط EF خواهد بود، که نقطه‌های وسط AB و DC را بهم وصل کرده است.



شکل ۱۶-۱۷

خطوط AH و BK را عمود بر DC رسم می‌کنیم.

در این صورت $DH = 2$ و $AH = 2\sqrt{3}$ ، و $tg 60^\circ = \frac{AH}{DH}$ است.

این منشور را ممکن است متشکل از سه منشور بدانیم که مقاطع اصلی آنها دوشکل و یک مستطیل باشد که در شکل دیده می‌شوند. وزن کل و وزن اجزا متناسب با مساحت ABCD و مثلثها و مستطیل است.

مساحتها و فاصله‌های مرکزهای ثقل را از DC در یک جدول تنظیم می‌کنیم.

فاصله مرکز ثقل از DC	مساحت	
x	$16\sqrt{3}$	ABCD
$\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$	ABKH
$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	ADH
$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	BCK

نسبت به DC گشتاور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$16\sqrt{3}x = 36 + 4 + 4 = 44$$

$$\therefore x = \frac{44}{16\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{12}$$

بنابراین مرکز ثقل در G واقع بر EF است، به طوری که $FG = \frac{11}{12}\sqrt{3}$

$$\therefore EG = 2\sqrt{3} - \frac{11}{12}\sqrt{3} = \frac{13}{12}\sqrt{3}$$

بنابراین منشور می تواند بوجه BC به حال تعادل باشد به شرط آنکه زاویه CBG کوچکتر از قائمه، یعنی به شرط آنکه زاویه EBG بزرگتر از 30° باشد.

$$\text{اما } \operatorname{tg} EBG = \frac{EG}{EB} = \frac{13\sqrt{3}}{36}$$

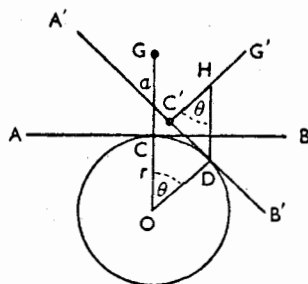
$$\text{و } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3}}{36}$$

$$\therefore \angle EBG > 30^\circ$$

بنابراین منشور می تواند بوجه BC به حال تعادل بماند.

مثال ۳: مکعبی یکنواخت از یک وجه بر روی بالاترین نقطه کره ای ثابت و ناصاف قرار دارد. از راه اصول اساسی ثابت کنید که اگر طول هر ضلع مکعب از قطر کره کمتر باشد، تعادل پایدار خواهد بود.

حل : فرض می کنیم AB (شکل ۱۶-۱۸) مقطع قائمی را نشان دهد که از G، مرکز ثقل مکعب، C، نقطه تماس مکعب و کره، و O، مرکز کره (به شعاع r)، می گذرد.



شکل ۱۶-۱۸

فرض این است که کره به اندازه ای ناصاف است که نمی لغزد، و ما پایداری را فقط برای یک بردن مکعب در نظر می گیریم.

فرض می کنیم طول یال مکعب $2a$ باشد، و اوضاع نقاط A، C، B و G، پس از یک بردن مکعب به اندازه زاویه کوچک θ ، به ترتیب A'، C'، B'

و G' باشد. نقطه تماس جدید را D می گیریم.

حال اگر G' درست چپ قائمی باشد که از D می گذرد، مکعب مایل خواهد بود که به وضع اولیه خود برگردد.

فرض می کنیم $C'G'$ خط قائم مکان D را در H قطع کند. چون لغزش وجود ندارد،

$$C'D = \widehat{CD} = r\theta$$

نیز زاویه $C'HD$ برابر θ است، و

$$C'H = C'D \cot \theta = r \frac{\theta}{\tan \theta}$$

بنابراین تعادل در صورتی پایدار خواهد بود که

$$r \frac{\theta}{\tan \theta} > C'G'$$

اما وقتی که θ خیلی کوچک است نسبت θ به $\tan \theta$ تقریباً برابر یک است، و چون

$C'G' = a$ است، تعادل هنگامی پایدار خواهد بود که

$$r > a$$

یعنی هنگامی که طول یال مکعب کوچکتر از قطر کره است.

تمرین ۴۰۱۶

۱ - در یک مربع با برشی به موازات قطر مربع، تکه ای به شکل مثلث می بریم. ثابت

کنید که جسم باقیمانده بر روی هر یک از اضلاع بریده شده خود هنگامی می تواند

به حال تعادل بماند که بخش باقیمانده از آن ضلع $۵/۵$ طول ضلع باشد، اما اگر بخش

باقیمانده $۴/۵$ طول ضلع باشد، جسم به حال تعادل نخواهد ماند.

۲ - $ABCD$ وجه قائم یک مکعب مستطیل است. وجه افقی این جسم که یک ضلع آن

BC است در تماس با زمین است. $BC = ۴۰ \text{ cm}$. $CD = ۲۵ \text{ cm}$ و نقطه ای

است بر BC به فاصله ۱۵ cm از B . جای نقطه ای مانند F واقع بر CD را چنان

بیماید که اگر از این جسم منشوری عمود بروجه $ABCD$ و در راستای EF ببریم،

جسم باقیمانده در نقطه شروع یک بردن باشد.

۳ - تیغه یکنواختی است به شکل چهارضلعی $ABCD$ که در آن AB موازی DC است.

طول AB برابر a و طول DC برابر b است. ثابت کنید که مرکز ثقل تیغه منطبق

بر مرکز ثقل چهار نقطه مادی است که جرم آنها متناسب با a ، $a+b$ ، b ، $a+b$

است و به ترتیب در نقاط A, B, C و D قرار دارند. اگر $AD = BC = c$ و $b > a$ باشد، مختصات مرکز ثقل را پیدا کنید. برای این منظور DA را یکی از محورهای مختصات و خط عمود بر آن در نقطه D را محور دیگر مختصات فرض کنید. منشور یکنواختی که این چهار ضلعی مقطع آن است، از جوهی که مربوط به BC یا AD است بر سطح افقی قرار می گیرد. ثابت کنید که اگر $2c^2(a+b)$ کوچکتر از $a^3 - b^3$ باشد، منشور نمی تواند به حالت تعادل بماند.

۴ - ورقه قائم فلزی است. A قائمه است و AC در تماس با صفحه افقی است. D نقطه وسط AC است. مثلث ABD را می بریم. ثابت کنید که بخش باقیمانده این ورقه در نقطه شروع سقوط است.

۵ - منشور قائم یکنواختی است که مقطع آن مثلث متساوی الساقین BAC است. AB و AC برابرند. این منشور را از جوهی که شامل BC است بر روی میزی افقی قرار می دهیم. از منشور به تدریج برشهایی موازی وجهی که شامل AB است می بریم. این کار را از لبه ای که از C می گذرد آغاز می کنیم. چه بخشی از کل منشور را می توان برید بی آنکه بخش باقیمانده به حالت واژگون شدن در آید.

۶ - $ABCD$ مقطعی از یک مکعب است که از مرکز آن می گذرد. E نقطه وسط AD است. اگر با صفحه ای که از EC می گذرد و عمود بر مقطع است، بخشی از این مکعب بریده شود، فاصله AB و AE را از مرکز ثقل جسم باقیمانده پیدا کنید. اگر این جسم را روی صفحه ای افقی قرار دهیم، حداقل طول AE را پیدا کنید که جسم واژگون نشود.

۷ - مقطع منشوری یکنواخت به شکل $BDEC$ است، که در آن ABC مثلثی متساوی الاضلاع است و D و E نقطه های وسط AB و AC هستند. اگر این منشور را از یک وجه در تماس با صفحه ای قرار دهیم که با افق زاویه 30° می سازد و به سبب ناصافی آن از لغزش جلوگیری می کند، تعیین کنید که در چه اوضاعی منشور ممکن است به حالت تعادل بماند. همه مقاطعها در صفحاتی قائمند که از خط بزرگترین شیب صفحه شیب دار می گذرند.

۸ - چهار وجهی منظمی از یک وجه بر روی صفحه ای قرار دارد که با افق زاویه α می سازد و به سبب ناصافی آن از لغزش جلوگیری می کند. یک یال وجهی که در تماس با صفحه است، افقی است و در بالای رأس متقابل خود قرار دارد. ثابت کنید که $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ است.

۹ - نیم کره ای صلب و استوانه ای صلب دارای شعاعهای یکسان هستند و هر دو از ماده ای همگن ساخته شده اند. یک سراسطوانه به قاعده نیم کره، یعنی صفحه مستوی آن،

لحیم شده است. ارتفاع استوانه $\frac{2}{3}$ شعاع آن است. ثابت کنید که فاصله مرکز ثقل

کل جسم از سطح مشترک نیمکره و استوانه $\frac{1}{48}$ شعاع است.

۱۰- از فلز نازک یکنواختی ظرفی به شکل یک مخروط ناقص ساخته شده است. قاعده ظرف مسطح است و شعاع دهانه دو برابر شعاع قاعده است. اگر زاویه رأس مخروطی که این ظرف از آن ساخته شده است 30° باشد، معلوم کنید که آیا اگر ظرف را از سطح منحنی آن بر صفحه‌ای افقی قرار دهیم به حالت تعادل خواهد ماند یا خیر.

۱۱- ارتفاع مخروط صلبی سه برابر شعاع قاعده آن است. نیمکره صلبی نیز داریم که سطح مستوی آن به اندازه قاعده مخروط است. مخروط را از قاعده به این سطح مستوی لحیم می‌کنیم. بخش کروی شکل جسم را بر می‌زی افقی می‌گذاریم. حداقل نسبت وزن مخصوص ماده نیمکره را به وزن مخصوص ماده مخروط بیابید تا این جسم واژگون نشود.

۱۲- ظرفی است توخالی که ضخامت آن در همه جا یکسان است. این ظرف از مخروطی توخالی ساخته شده است که قاعده آن به نیمکره‌ای توخالی متصل است. نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعده آن حداکثر چقدر می‌تواند باشد تا اگر ظرف را از طرف سطح نیمکره‌ای آن روی می‌زی افقی بگذاریم به حالت تعادل پایدار بماند. (فاصله مرکز ثقل نیمکره توخالی از مرکز آن برابر نصف شعاع است).

۱۳- n مکعب صلب یکنواخت را که یال هر کدام برابر a است روی هم چنان قرار می‌دهیم که هر مکعب نسبت به مکعب زیری به اندازه طول c در راستای افق به سمت چپ جابه‌جا شده باشد. جای مرکز ثقل مجموعه را بیابید و از روی آن نتیجه بگیرید که اگر $a > c(n-1)$ باشد، این مجموعه واژگون خواهد شد.

۱۴- جسمی است که از یک ماده یکنواخت ساخته شده است و شامل مخروط قائم صلبی است که قاعده آن به شعاع r است و به سطح مستوی نیمکره‌ای صلب به همین شعاع لحیم شده است. حداکثر ارتفاع مخروط چقدر ممکن است باشد که اگر جسم را بر روی سطحی افقی قرار دهیم و مخروط در بالا قرار گیرد، جسم به حالت تعادل باقی بماند.

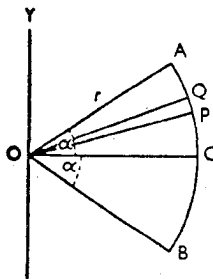
۱۵- تخته‌ای است به شکل مربع که طول هر ضلع آن 60 cm و ضخامت آن 1 cm است. با این تخته می‌زی می‌سازیم که دارای چهار پایه در چهار گوشه آن است. پایه‌ها از همان جنس رویه می‌زنند. هر پایه به طول 60 cm و سطح مقطع 2 cm^2 است. ارتفاع مرکز ثقل را بیابید و معلوم کنید که بزرگترین زاویه انحراف میز برای اینکه

میزروی دوپایه‌اش واژگون نشود چقدر است.

۱۶- ABCD صفحه‌ای است به شکل مربع، یکنواخت و سنگین. بخش CBH را از آن برمی‌داریم. H نقطه‌ای است واقع بر AB. بقیه را طوری قرار می‌دهیم که صفحه جسم قائم بماند و AH مماس با صفحه افقی صیقلی باشد. ثابت کنید که تعادل ممکن نیست مگر آنکه $\frac{AH}{AB}$ بزرگتر از $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ باشد.

۱۷۰۱۶. مرکز ثقل قوس مدور یکنواخت

فرض می‌کنیم ACB (شکل ۱۶-۱۹) قوس مدوری به شعاع r و زاویه مرکزی 2α باشد. O را مرکز قوس و C را نقطه وسط قوس فرض می‌کنیم.



شکل ۱۶-۱۹

از راه تقارن آشکار است که مرکز ثقل قوس بر روی OC خواهد بود، زیرا قوس یکنواخت است.

OC را به عنوان محور x ها و OY، خط عمود بر OC را به عنوان محور y ها اختیار می‌کنیم.

فرض می‌کنیم PQ جزئی از این قوس باشد، به طوری که $\angle POC = \theta$ ، $\angle POQ = \delta\theta$. طول قوس PQ برابر است با $r\delta\theta$ ، و وزن آن برابر است با $w r \delta\theta$ ، که در آن w وزن واحد طول است.

چون فاصله PQ از OY برابر $r \cos \theta$ است، گشتاور وزن نسبت به OY برابر است با $w r \cos \theta \times \delta\theta$ یا $r \cos \theta \times w r \delta\theta$.

مجموع گشتاورهای همه اجزای قوس برابر است با انتگرال مقدار بالا میان دو حد

و $\int_{-\alpha}^{+\alpha} wr^y \cos \theta d\theta$ یعنی $\theta = +\alpha$ و $\theta = -\alpha$ وزن کل قوس برابر است با $2wr\alpha$ ، و اگر فاصله مرکز ثقل آن از OY برابر $\bar{x}$ باشد، با گرفتن گشتاورها نسبت به OY، خواهیم داشت:

$$2wr\alpha\bar{x} = wr^y \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta = wr^y [\sin \theta]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

$$= 2wr^y \sin \alpha$$

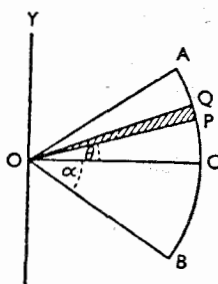
$$\therefore \bar{x} = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

برای قوسی که يك نیمه دایره را تشکیل داده است $\alpha = \frac{\pi}{2}$ است و در این صورت $\bar{x}$

برابر $\frac{2r}{\pi}$ خواهد بود.

۱۸-۱۶. مرکز ثقل قطاع دایره

فرض می کنیم AOB (شکل ۱۶-۲۰) قطاعی از يك دایره به شعاع r و مرکز O است. نیز فرض می کنیم $\angle AOB = 2\alpha$ ، C، نقطه وسط AB، و OC نیمساز زاویه AOB است.



شکل ۱۶-۲۰

از راه تقارن آشکار است که مرکز ثقل بر روی خط OC قرار می گیرد.

OC را به عنوان محور xها و OY، خط عمود بر OC، را به عنوان محور yها

می پذیریم.

فرض می کنیم POQ جزئی از قطاع باشد، به طوری که $\angle POC = \theta$ و

$$\angle POQ = d\theta$$

مساحت این قطاع $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ و وزن آن $\frac{1}{2}wr^2 d\theta$ است، که در آن w وزن واحد سطح است و ثابت فرض می‌شود. چون PQ بسیار کوچک است OPQ خیلی نزدیک به مثلث است و مرکز ثقل آن در فاصله $\frac{2}{3}r$ از O است.

بنابراین فاصله این مرکز ثقل از OY برابر است با

$$\frac{2}{3}r \cos \theta$$

گشتاور وزن POQ نسبت به OY برابر است با

$$\frac{2}{3}r \cos \theta \times \frac{1}{2}wr^2 \delta \theta = \frac{1}{3}wr^3 \cos \theta \delta \theta$$

مجموع گشتاورهای همه قطاعهای جزئی برابر است با

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{3}wr^3 \cos \theta d\theta = \frac{1}{3}wr^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta$$

وزن کل قطاع $wr^2\alpha$ است و اگر $\bar{x}$ فاصله مرکز ثقل از OY باشد، در این صورت، با گرفتن گشتاورها نسبت به OY، خواهیم داشت:

$$wr^2\alpha \times \bar{x} = \frac{1}{3}wr^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{2}{3}wr^3 \sin \alpha$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2r}{3} \times \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

برای یک نیم‌دایره کامل $\alpha = \frac{\pi}{2}$ است و فاصله مرکز ثقل از قطر نیم‌دایره برابر است با

$$\frac{2r}{3\pi}$$

این فرمولها را می‌توانیم با استفاده از نتیجه بند قبلی نیز به دست آوریم. فرض می‌کنیم که سطح قطاع را به نوارهای هم‌مرکز و به عرض dx تقسیم کنیم. وزن نوار به شعاع x برابر $2wx\alpha dx$ است، و فاصله مرکز ثقل آن از OY برابر است با $\frac{x \sin \alpha}{\alpha}$.

بنابراین با گرفتن گشتاورها نسبت به OY خواهیم داشت:

$$wr^2\alpha \bar{x} = \int_0^r 2wx\alpha \times x \frac{\sin \alpha}{\alpha} dx$$

$$= 2w \sin \alpha \left[\frac{x^2}{3} \right]_0^r$$

$$= \frac{2}{3} w r^3 \sin \alpha$$

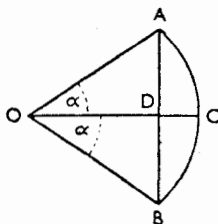
$$\therefore \bar{x} = \frac{2r \sin \alpha}{3 \alpha}$$

۱۹.۱۶. مرکز ثقل يك قطعه از دایره

مرکز ثقل قطعه را می توان با در نظر گرفتن این حقیقت که قطعه تفاوت سطح میان قطاع و مثلث است به دست آورد.

فرض می کنیم ABC (شکل ۱۶-۲۱) قطعه یکنواختی از دایره ای به شعاع r و مرکز O باشد.

قطعه تفاوت میان قطاع OAB و مثلث OAB است. فرض می کنیم $\angle AOB = 2\alpha$ و OC نیمساز این زاویه باشد.



شکل ۱۶-۲۱

از راه تقارن مشاهده می شود که مرکز ثقل باید بر OC باشد.

اگر w وزن واحد سطح باشد وزن قطاع $w r^2 \alpha$ و وزن مثلث $\frac{1}{3} w r^2 \sin 2\alpha$ خواهد بود.

جدولی از مساحتها و فاصله های مرکز ثقل از O تنظیم می کنیم. خواهیم داشت:

فاصله مرکز ثقل از O

وزن

$$\frac{2r \sin \alpha}{3 \alpha}$$

$$w r^2 \alpha$$

قطاع

$$\frac{2}{3} r \cos \alpha$$

$$\frac{1}{3} w r^2 \sin 2\alpha$$

مثلث

x

$$w r^2 \left(\alpha - \frac{1}{3} \sin 2\alpha \right)$$

جسم باقیمانده

با گرفتن گشتاورها نسبت به O خواهیم داشت:

$$wr^2\left(\alpha - \frac{1}{3}\sin 2\alpha\right).x = \frac{2}{3}wr^3\sin\alpha - \frac{1}{3}wr^3\sin 2\alpha\cos\alpha$$

∴

$$x = \frac{\frac{2}{3}r\sin\alpha - \cos^2\alpha\sin\alpha}{\alpha - \frac{1}{3}\sin 2\alpha}$$

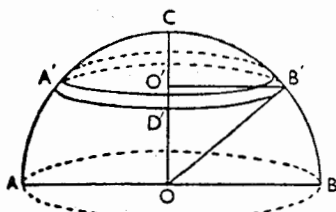
$$= \frac{\frac{2}{3}r\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

اگر شعاع دایره و ارتفاع قطعه CD را داشته باشیم، بهتر است که مانند بالا عمل کنیم، سپس α ، $\sin\alpha$ و غیره را بر حسب CD و r بیان کنیم.

وقتی که قطعه به اندازه نیم‌دایره است $\alpha = \frac{\pi}{2}$ است و پاسخ بالا $\frac{2r}{3\pi}$ خواهد شد که در بند قبلی نیز به دست آوردیم.

۲۰.۱۶. مرکز ثقل نیم‌کره توپر یکنواخت

فرض می‌کنیم ACB (شکل ۱۶-۲۲) مقطع نیم‌کره‌ای را عمود بر صفحه قاعده آن نشان دهد. AB قطر و O مرکز نیم‌دایره است.



شکل ۱۶-۲۲

فرض می‌کنیم r شعاع نیم‌کره، w وزن واحد حجم، و C بالاترین نقطه آن باشد. بنابراین OC عمود بر AB است.

فرض می‌کنیم نیم‌کره را به بینهایت برشهای موازی با سطح قاعده تقسیم می‌کنیم. از راه تقارن آشکار است که مرکز ثقل همه این برشها، و بنابراین مرکز ثقل نیم‌کره، بر OC واقع است.

اگر A'D'B' نمایش یکی از برشها و δx ضخامت و O' مرکز آن باشد، در این

صورت، اگر $OO' = x$ باشد،

$$O'B' = \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

بنابراین حجم این برش برابر است با

$$\pi(r^2 - x^2)\delta x$$

و وزن آن برابر است با

$$w\pi(r^2 - x^2)\delta x$$

می‌توان تصور کرد که این وزن در O' متمرکز است. گشتاور آن نسبت به O برابر

است با

$$w\pi x(r^2 - x^2)\delta x$$

اگر همه این برشها را به همین طریق در نظر بگیریم، مجموع گشتاورهای آنها نسبت

به O برابر خواهد بود با

$$\begin{aligned} \int_0^r w\pi(r^2 x - x^3) dx &= w\pi \left[\frac{1}{2} r^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^r \\ &= \frac{1}{4} w\pi r^4 \end{aligned}$$

وزن کل نیمکره $\frac{2}{3}\pi w r^3$ است و اگر $\bar{x}$ فاصله مرکز ثقل آن از O باشد،

$$\frac{2}{3}\pi w r^3 \bar{x} = \frac{1}{4} w\pi r^4$$

$\therefore$

$$\bar{x} = \frac{3}{8} r$$

۲۱۰۱۶. مرکز ثقل نیمکره توخالی نازک

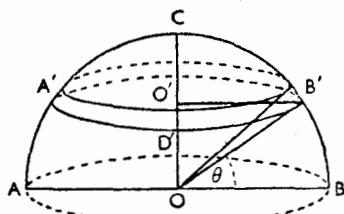
فرض می‌کنیم ACB (شکل ۱۶-۲۳) مقطع نیمکره عمود بر صفحه قاعده باشد. AB قطر و O مرکز نیمکره است.

شعاع نیمکره را r و وزن واحد سطح را w می‌گیریم. بالاترین نقطه نیمکره را C فرض می‌کنیم. بنابراین OC عمود بر AB است.

فرض می‌کنیم جدار نیمکره، به وسیله صفحاتی موازی قاعده، به بینهایت نوارهای باریک مانند $A'D'B'$ تقسیم شده باشد.

اگر O' مرکز $A'D'B'$ و $\angle BOB' = \theta$ باشد، شعاع نوار $O'B'$ برابر است با

$$r \cos \theta$$



شکل ۱۶-۲۳

از راه تقارن آشکار است که مرکزهای ثقل همه نوارها بر روی OC است. زاویه دربرگیرنده قوس نوار از O برابر $\delta\theta$ است و بنابراین عرض نوار $r\delta\theta$ است. بنابراین سطح کل نوار $2\pi r \cos\theta r \delta\theta$ است و وزن نوار $2\pi w r^2 \cos\theta \delta\theta$ است. این وزن بنا به فرض بر O' اثر می‌کند، و بنابراین گشتاور آن نسبت به O برابر است با

$$r \sin\theta \times 2\pi w r^2 \cos\theta \delta\theta$$

مجموع گشتاورهای همه نوارها نسبت به O برابر است با

$$\begin{aligned} & 2\pi w r^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= 2\pi w r^3 \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi w r^3 \end{aligned}$$

وزن کل سطح برابر است با $2\pi r^2 w$ ، و اگر $\bar{x}$ فاصله مرکز ثقل از O باشد،

$$2\pi r^2 w \times \bar{x} = \pi w r^3$$

∴

$$\bar{x} = \frac{r}{2}$$

۲۲۰۱۶. مرکز ثقل بخش یا منطقه‌ای از سطح میان دو صفحه موازی با قاعده که برای آنها $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ است از راه تعیین انتگرالهای وزن و گشتاور محاسبه می‌شود که در بند قبلی به دست آوردیم. اما آنها را به جای آنکه میان دو حد صفر و $\frac{\pi}{2}$ تعیین کنیم بایست میان دو حد α و β به دست آوریم.

وزن یک منطقه جزئی برابر است با $2\pi w r^2 \cos\theta \delta\theta$.

وزن منطقه میان $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ برابر است با

$$2\pi w r^2 \int_{\alpha}^{\beta} \cos\theta d\theta = 2\pi w r^2 (\sin\beta - \sin\alpha)$$

اما $r(\sin\beta - \sin\alpha)$ برابر است با فاصلهٔ میان صفحات برش، یعنی برابر است با h ، ارتفاع منطقه.

$$\text{وزن} = 2\pi wrh$$

گشتاور وزن يك منطقه جزئی نسبت به O برابر است با $2\pi wr^3 \sin\theta \cos\theta d\theta$.
مجموع این گشتاورها برابر است با

$$2\pi wr^3 \int_{\alpha}^{\beta} \sin\theta \cos\theta d\theta = \pi wr^3 (\sin^2\beta - \sin^2\alpha)$$

$$= \pi wr^3 h (\sin\beta + \sin\alpha)$$

بنابراین اگر x فاصلهٔ مرکز ثقل منطقه از O باشد

$$x = \frac{\pi wr^3 h (\sin\beta + \sin\alpha)}{2\pi wrh}$$

$$= \frac{1}{2} r (\sin\beta + \sin\alpha)$$

اما $r\sin\beta + r\sin\alpha$ برابر است با مجموع فاصله‌های صفحات برش از قاعده. بنابراین

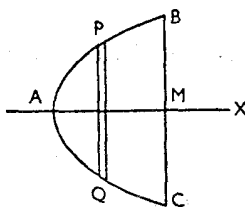
$$\frac{1}{2} r (\sin\beta + \sin\alpha) \text{ برابر است با فاصلهٔ میان دو صفحهٔ برش از قاعده.}$$

به این ترتیب مرکز ثقل منطقه در وسط دو صفحه‌ای است که کره را برش داده‌اند.

۲۳.۱۶. مرکزهای ثقل سطح عرقچین و منطقهٔ کروی محدود میان دو صفحهٔ موازی با قاعده را می‌توان با استفاده از این واقعیت شناخته شده در هندسه به دست آورد که سطح يك نوار یا منطقهٔ بسیار نازک که به وسیلهٔ دو صفحهٔ موازی با قاعده بریده شده است برابر است با سطح نوار مربوطه‌ای که از استوانه‌ای محیط برکره بریده شود. بنابراین مرکز ثقل سطوح کروی در همان ارتفاع مرکز ثقل استوانهٔ محیطی است، یعنی در مورد عرقچین در وسط قاعده و رأس و در مورد منطقهٔ کروی در وسط دو صفحهٔ برش است.

۲۴.۱۶. مثال: مرکز ثقل صفحه‌ای سهموی و یکنواخت را تعیین کنید که سطح آن میان منحنی $y^2 = ax$ و خط $x = b$ محدود است. مرکز ثقل جسمی صلب را نیز پیدا کنید که از دوران این صفحه حول محور x ها حاصل می‌شود.

حل : فرض می‌کنیم $ABMC$ (شکل ۱۶-۲۴) نشان دهندهٔ صفحهٔ سهموی، AX محور سهمی (همچنین محور x ها)، و $AM = b$ باشد.



شکل ۱۶-۲۴

از راه تقارن آشکار است که مرکز ثقل بر روی AM واقع است. سطح نوار PQ موازی BC، به عرض δx و به فاصله x از A برابر است با $2y\delta x$ یا $2a^{1/2}x^{1/2}\delta x$ ، و وزن آن برابر است با $2wa^{1/2}x^{1/2}\delta x$ ، که در آن w وزن واحد سطح است. در این حالت مانمی توانیم وزن کل صفحه را به آسانی بیان کنیم، مگر آنکه مقدار آن از راه انتگرال گرفتن از $2wa^{1/2}x^{1/2}\delta x$ میان دو حد $x=0$ و $x=b$ به دست آوریم. اگر W وزن کل صفحه باشد،

$$W = 2wa^{1/2} \int_0^b x^{1/2} dx = \frac{4}{3} wa^{1/2} \left[x^{3/2} \right]_0^b \\ = \frac{4}{3} wa^{1/2} b^{3/2}$$

وزن هر نوار به نقطه وسط آن اعمال می شود. گشتاور وزن نوار PQ نسبت به A برابر است با

$$2wa^{1/2} x^{3/2} \delta x$$

مجموع گشتاورها نسبت به A برابر است با

$$2wa^{1/2} \int_0^b x^{3/2} dx = \frac{4}{5} wa^{1/2} \left[x^{5/2} \right]_0^b = \frac{4}{5} wa^{1/2} b^{5/2}$$

اگر $\bar{x}$ فاصله مرکز ثقل از A باشد

$$\frac{4}{3} wa^{1/2} b^{3/2} \times \bar{x} = \frac{4}{5} wa^{1/2} b^{5/2}$$

∴

$$\bar{x} = \frac{3}{5} b$$

وقتی که صفحه سهموی حول محور AX دوران کند، مقطع جسم صلب حاصل با صفحه عمود بر AX مدور است. اگر این جسم صلب را با صفحاتی عمود بر AX به برشهای دایره ای تقسیم کنیم، حجم برشی که به فاصله x از A است برابر خواهد بود با

$$\pi y^2 \delta x = \pi a x \delta x$$

و وزن آن برابر است با $\pi w a x \delta x$

W ، وزن کل جسم صلب، از این رابطه به دست می آید:

$$W = \pi w a \int_0^b x dx = \frac{1}{2} \pi w a b^2$$

وزن هر برش در مرکز آن اثر می کند. گشتاور وزن برشی که به فاصله x

از A است، نسبت به A برابر است با

$$\pi w a x^2 \delta x$$

بنابراین مجموع گشتاورها نسبت به A برابر است با

$$\pi w a \int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} \pi w a b^3$$

اگر $\bar{x}$ فاصله مرکز ثقل از A باشد،

$$\frac{1}{2} \pi w a b^2 \times \bar{x} = \frac{1}{3} \pi w a b^3$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2}{3} b$$

تمرین ۵.۱۶

۱- مرکز ثقل قرص نیمدایره یکنواخت را پیدا کنید.

۲- قطعه ای فازی، به ضخامت یکنواخت، از دو بخش تشکیل شده است: نیمدایره ABC به قطر AC ، و مثلث ACD ، که در آن $AD = CD$ است. نسبت ارتفاع مثلث به شعاع نیمدایره چقدر باشد تا اگر این قطعه فلز از طرف مدور آن روی صفحه صیقلی افقی طوری قرار گیرد که صفحه $ABCD$ قائم باشد، هر نقطه قوس نیمدایره که با صفحه افقی در تماس باشد، جسم به حالت تعادل بماند.

۳- مرکز ثقل سیم نازکی به شکل یک قوس مدور را پیدا کنید. نوار نازک فلزی یکنواختی است که بخشی از آن خمیده شده است و به صورت نیم استوانه ای به شعاع r درآمده است، و بخش دیگر به صورت خطی راست، به طول l و به صورت مماس بر نیم استوانه در یکی از دو لبه است. ثابت کنید که اگر بخش خطی را بر روی صفحه ای افقی قرار دهیم، به شرط آنکه $l > 2r$ باشد، جسم می تواند به حالت تعادل باشد.

۴- جسمی است صلب که از نیمکره ای صلب تشکیل شده است که به آن استوانه ای صلب با همان شعاع، اما با ارتفاعی سه برابر شعاع قاعده متصل است. وجه مستوی جسم

را بر روی صفحه ناصافی قرار می‌دهیم و شیب این صفحه را نسبت به افق کم کم زیاد می‌کنیم. ثابت کنید که اگر ضریب اصطکاک میان جسم و صفحه کمتر از $\frac{44}{81}$ باشد، جسم بدون واژگون شدن بر روی صفحه رو به پایین می‌لغزد.

۵ - استوانه مدور صلب یکنواختی را با صفحه‌ای که از محور آن می‌گذرد به دو بخش می‌کنیم. یکی از دو نیمه را از سطح منحنی آن بر روی سطح شیب‌داری می‌گذاریم که به سبب ناصافی از لغزش آن جلوگیری می‌کند. خط تماس عمود بر خط بزرگترین شیب صفحه است. ثابت کنید که اگر زاویه سطح شیب‌دار با افق زاویه‌ای میان $\text{Arctg} \frac{4}{3\pi}$ و $\text{Arcsin} \frac{4}{3\pi}$ باشد دو وضع برای تعادل وجود دارد، اما اگر زاویه سطح شیب‌دار کوچکتر از $\text{Arctg} \frac{4}{3\pi}$ باشد فقط یک وضع برای تعادل وجود دارد.

۶ - کوره‌ای آجری به ضخامت ۴۵ cm طوری ساخته شده است که قطر خارجی آن در پایین ۳/۹ m و در بالا ۲/۷ m است و ارتفاع آن ۳۰ m است. ثابت کنید که مرکز ثقل کوره در حدود ۱/۵۵ m پایینتر از نقطه وسط محور است.

۷ - ثابت کنید که مرکز ثقل میله یکنواختی به شکل نیم‌دایره در فاصله $\frac{2}{\pi}$ شعاع آن از مرکز است. قرص مدوری که وزن واحد سطح آن σr است که در آن σ مقداری ثابت و r فاصله تا مرکز است - از قطر به دو نیم می‌شود. مرکز ثقل هر نیمه را پیدا کنید.

۸ - از راه انتگرال گرفتن، مرکز ثقل مخروط مدور قائم صلب یکنواخت را پیدا کنید.

۹ - ثابت کنید که مرکز ثقل جامی به شکل نیمکره نازک به شعاع r در فاصله $\frac{r}{2}$ از مرکز است. این جام بر روی پایه‌ای مدور قرار دارد که جنس، ضخامت و شعاع آن مانند جنس، ضخامت و شعاع جام است. ارتفاع پایه رابط برابر طول شعاع جام و وزن آن یک چهارم وزن جام است. ارتفاع مرکز ثقل را از بالای پایه پیدا کنید.

۱۰ - ثابت کنید که مرکز ثقل تیغه‌ای به شکل نیم‌دایره به شعاع r در فاصله $\frac{4r}{3\pi}$ از مرکز آن است. استوانه مدور قائم صلبی را با صفحه‌ای که از محور آن می‌گذرد به دو بخش مساوی تقسیم می‌کنند. یکی از این دو بخش را از سمت منحنی آن بر روی سطحی ناصاف طوری قرار می‌دهند که با افق زاویه θ می‌سازد و مولدهای آن افقی هستند. زاویه انحراف سطح مستطیل شکل این جسم با افق هنگامی که جسم در

حالت تعادل است چقدر خواهد بود، به شرط آنکه ناصافی سطح به اندازه‌ای است که از لغزش جلوگیری می‌کند.

۱۱- در دایره‌ای که شعاع آن a است، اگر مرکز ثقل قوس یکنواختی که زاویه مرکزی آن

2θ است در فاصله $\frac{a \sin \theta}{\theta}$ از مرکز باشد، مرکز ثقل قطاع یکنواختی را که میان

این قوس و دوشعاع کناری آن محدود می‌شود پیدا کنید. مرکز ثقل قطعه‌ای را پیدا کنید که با وتری برابر شعاع بریده می‌شود.

۱۲- مرکز ثقل سطح یک نیمکره را به دست آورید. جامی به شکل نیمکره به وزن W از قسمت منحنی آن بر روی سطحی صیقلی و افقی قرار داده می‌شود. چه وزنه‌ای باید بر روی لبه جام قرار داد تا جام طوری قرار گیرد که سطح مستوی آن با افق زاویه α بسازد؟

۱۳- تیر دکل چوبی به شکل مخروط قائم ناقصی است که طول آن 1.5 m و قطر قاعده آن 35 cm و قطر بالای آن 25 cm است. جرم این تیر دکل و محل مرکز جرم آن را به فرض آنکه جرم حجمی چوب 700 kg/m^3 باشد تعیین کنید.

۱۴- سیمی یکنواخت را طوری خم می‌کنیم که به شکل یک نیمدایره درمی‌آید. آن را بر روی میخ افقی ناصافی قرار می‌دهیم. هنگامی که خط واصل میان دوسر این جسم با افق زاویه 30° می‌سازد جسم در حالت شروع به لغزش قرار می‌گیرد. ضریب اصطکاک میان سیم و میخ را پیدا کنید.

۱۵- نیمکره صلب یکنواختی از سمت منحنی آن روی صفحه شیبدار ناصافی قرار دارد. ثابت کنید که بزرگترین شیب ممکن آن با افق زاویه‌ای است که سینوس آن $\frac{3}{8}$ است.

۱۶- نیمکره صلب یکنواختی از طرف منحنی آن بر سطح شیبدار ناصافی قرار دارد و به حالت تعادل است. سینوس زاویه سطح شیبدار با افق برابر است با $\frac{1}{8}$. زاویه انحراف صفحه قاعده نیمکره را نسبت به افق پیدا کنید.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۱- ABCDE زنجیری است که از چهار میله یکنواخت متساوی تشکیل شده است، به طوری که میله‌ها در B، C، و D آزادانه به هم مفصل شده‌اند. دو سر A و E زنجیر به دو نقطه ثابت که در راستای یک خط افقی هستند لولا شده است. به این ترتیب زنجیر طوری آویزان شده است که نسبت به C، پایینترین نقطه آن، حالت تعادل دارد.

اگر در حالت تعادل، θ زاویه انحراف زوج میله‌های بالایی نسبت به افق باشد و φ زاویه انحراف زوج میله‌های پایینی نسبت به افق باشد ثابت کنید که $tg\theta = 3tg\varphi$.
اگر به جای آنکه زنجیر در A و E لولا شده باشد، در این نقطه‌ها به حلقه‌های کوچکی متصل شده باشد که از درون میله افقی ناصافی عبور کرده‌اند، در صورتی که حالت حد تعادل در $\theta = 60^\circ$ به دست آید، ضریب اصطکاک را به دست آورید.

۲- دو میله متوازی ناصاف به‌طور افقی ثابت شده‌اند. فاصله میان آنها l و شیب صفحه آنها نسبت به افق برابر θ است. میله سنگین یکنواختی در تماس با هر دو میله است، به‌طوری‌که از روی میله بالایی و از زیر میله پایینی عبور کرده است. اگر این میله بر دو میله دیگر عمود و در حالت حدی تعادل باشد، با در نظر گرفتن گشتاورهای نیرو یا از هر راه دیگر، ثابت کنید که مرکز ثقل میله سنگین باید از میله بالایی بالاتر باشد. در ضمن، این نتیجه را نیز به دست آورید که طول میله سنگین دست کم برابر است با

$$\frac{l(\mu + tg\theta)}{\mu}$$

که در آن μ ضریب اصطکاک است.

۳- از دو حلقه کوچک، هر یک به جرم m ، میله ناصاف مستقیمی عبور کرده است که با افق زاویه α می‌سازد. حلقه‌ها به وسیله نخ سبک و ناکشسانی به یکدیگر متصل هستند و به‌وسط این نخ وزنه‌ای کوچک به جرم m متصل است. دستگاه به حالت تعادل است و زاویه میان دو بخش نخ برابر 2θ است ($\theta > \alpha$). با در نظر گرفتن حالت تعادل حلقه بالایی و وزنه ثابت کنید که، اگر μ ضریب اصطکاک میان حلقه و میله باشد،

$$\mu \geq \left(\frac{3tg\alpha + tg\theta}{tg\alpha + 3tg\theta} \right) tg\theta$$

۴- میله یکنواختی به طول $2l$ و وزن W از یک سر به نقطه‌ای در صفحه افقی لولا شده است. نقطه وسط میله بر استوانه‌ای تکیه دارد که شعاع آن r و یک مولد آن در صفحه است و با صفحه قائمی که از میله می‌گذرد زاویه قائمه می‌سازد. ضریب اصطکاک میان استوانه و میله برابر μ است و صفحه افقی به اندازه‌ای ناصاف است که از لغزش استوانه جلوگیری می‌کند. ثابت کنید که اگر استوانه در حالت شروع به غلتیدن باشد، $\mu = \frac{r}{l}$ است. عکس العمل را در لولا پیدا کنید.

۵- نردبان یکنواخت AB به وزن W به دیوار قائم ناصاف BC تکیه دارد و نسبت به آن

زاویه α می‌سازد. سردیگر نردبان بر زمین افقی ناصاف AC قرار دارد. ضریب اصطکاک در هر نقطه تماس μ است که $\mu < \tan \frac{1}{4}\alpha$ است. وسط نردبان به کمک ریسمان محکمی به نقطه C متصل است. اگر نردبان در حالت شروع به لغزش باشد، ثابت کنید که کشش ریسمان برابر است با

$$\frac{W}{2\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \sin \alpha - 2\mu \cos \alpha \right\}$$

و مؤلفه‌های قائم عکس‌العملهای در A و B را پیدا کنید.

۶ - اصطلاح «زاویه اصطکاک» را توضیح دهید. جسمی به شکل مکعب مستطیل به حالت تعادل حدی طوری قرار دارد که یک لبه‌اش بر کف اتاق است و لبه دیگرش به دیواری قائم تکیه دارد. در هر دو محل تماس، ضریب اصطکاک برابر λ است. ثابت کنید که اگر مقطع آن در صفحه‌ای که عمود بر دیوار است ABCD باشد و رأس A بر کف اتاق و B بر دیوار باشد، در این صورت زاویه انحراف AB نسبت به قائم، یعنی θ ، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\tan \theta = \tan 2\lambda + \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{\cos 2\lambda}$$

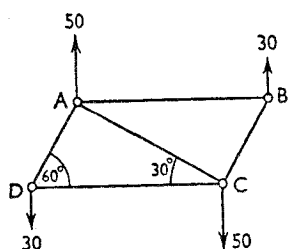
۷ - اصطلاحهای ضریب اصطکاک حد، زاویه اصطکاک حد، و رابطه میان آنها را بیان کنید. دو میله هم‌طول AB و BC، هر یک به طول $2a$ ، در B محکم به هم مفصل شده‌اند. این جسم را به صورت دویای بازبروی استوانه مدور افقی ناصافی به شعاع a قرار می‌دهند، به طوری که زاویه‌های هردو میله نسبت به قائم برابرند. وزنه‌های w و W ($W > w$) را به ترتیب از A و C آویزان می‌کنیم. W را به اندازه‌ای برمی‌گزینیم که جسم در حالت شروع به لغزش باشد. عکس‌العملهای قائم استوانه را بر میله‌ها پیدا کنید و ثابت کنید که

$$\frac{W}{w} = \frac{1 + \mu + \mu^2}{1 - \mu + \mu^2}$$

که در آن μ (که کوچکتر از واحد است) ضریب اصطکاک حد است.

۸ - شکل ۱۶-۲۵ داربستی را نشان می‌دهد که از میله‌های سبک AB، BC، AC، و CD تشکیل شده است و در A و D با دیوار قائم لولایی صیقلی تشکیل داده‌اند. وزنه‌ای به جرم 100 g از B آویزان است و دستگاه در صفحه‌ای قائم به حالت سکون قرار دارد. نیروهایی را که بر هر کدام از میله‌ها فشار وارد می‌آورد پیدا کنید و نشان دهید که این نیروها گشتش‌دهنده میله‌ها هستند یا فشاردهنده. نیروهایی را نیز که در

میله‌ها حالت کشش به وجود می‌آورند یا حالت فشردگی.

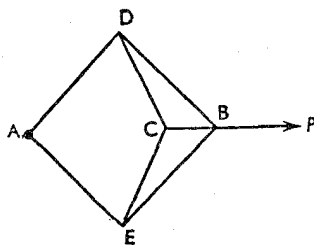


شکل ۱۶-۲۷

۱۱- شش میله سبک و همطول به طور صیقلی به هم مفصل شده‌اند و شش ضلعی منتظم OABCDE را تشکیل داده‌اند. سه میله سبک دیگر OB، OC و OD را متصل می‌کنند. نقاطی مادی به وزن w به A و E متصل است. دستگاه در صفحه‌ای افقی قرار دارد، به طوری که OC افقی است (A در راستای قائم بالای E است). نقطه O به میخ ثابتی محکم شده است. دستگاه به وسیله نخ‌هایی که به B متصل شده است و راستای آن در امتداد CB است به این وضعیت قرار گرفته است. کشش نخ را پیدا کنید. نیروهای را که بر AO، OB، OC، OD، OE وارد می‌شوند پیدا کنید و توضیح دهید که میله‌ها به حالت ستون هستند یا به حالت قید.

۱۲- ABCD دایره‌ای است که از چهار میله همطول تشکیل شده است که به طور صیقلی به هم مفصل شده‌اند. این دایره به وسیله میله سبک و قائم OA، که در A به طور صیقلی مفصل شده است، و همچنین به وسیله ریسمانهای همطول OB و OD از نقطه O آویزان شده است، به طوری که AC قائم $\angle ABC = 120^\circ$ و $\angle BOD = 30^\circ$ است. هنگامی که وزن W از نقطه C آویزان است، به طور نموداری، یا از راه محاسبه، نیروهای کششی در میله‌ها و نخ‌ها را پیدا کنید و نشان دهید که کدامیک از آنها فشارنده هستند.

۱۳- نمودار (شکل ۱۶-۲۸) دایره‌ای را نشان می‌دهد که از هفت میله سبک که به طور صیقلی به هم مفصل شده‌اند تشکیل شده است. این دایره از A به نقطه ثابتی لولاشده است. میله‌های خارجی تشکیل مربع می‌دهند، و A و B و C بزرگ استقامت هستند و $AC = 3CB$. هرگاه مطابق شکل، نیرویی مانند P بر B وارد شود، از راه نموداری، یا از هر راه دیگر، نیروی را که بر هر میله وارد می‌شود تعیین کنید و معلوم کنید که این نیرو از نوع کششی است یا فشاری.

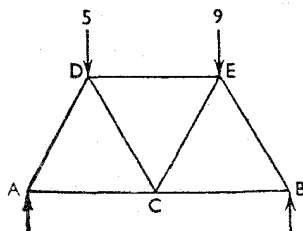


شکل ۱۶-۲۸

۱۴- سه میله سبک و همطول به طور صیقلی از دوسر به هم مفصل شده اند و مثلث متساوی-الاضلاع ABC را تشکیل داده اند. این داربست آزادانه از A آویخته شده است. در B و C به ترتیب وزنه های 30 kg و 10 kg را نگه می دارد. داربست به حالت سکون است. به طور نموداری، یا به شیوه ای دیگر، انحراف BC را نسبت به افق و نیروهای را که بر میله ها وارد می شوند پیدا کنید.

۱۵- شش میله سبک، یکنواخت و همطول AB ، BC ، CD ، DE ، EF و FA آزادانه از دوسر به هم لولا شده اند و دستگاه از A آویخته شده است. میله های سبک BE ، FB و EC ، که دارای چنان طولهایی هستند که $ABCDEF$ شش ضلعی منتظم است، در دستگاه جاداده می شوند و از دوسر به میله های قبلی آزادانه لولا می شوند. از راه ترسیم، هنگامی که وزنه های 10 kg از D ، C و E آویزان باشد، نیرویی را پیدا کنید که بر هر یک از نه میله وارد می شود.

۱۶- داربستی که در نمودار (شکل ۱۶-۲۹) نشان داده شده است شامل هفت میله سبک همطول است که آزادانه به هم مفصل شده اند. داربست در صفحه قائم به حالت تعادل است و AB افقی است و A و B بر تکیه گاههایی قرار دارند. نیروهایی مطابق شکل به طور قائم بر D و E وارد می شوند.



شکل ۱۶-۲۹

عکس العملهایی را که در تکیه گاهها وارد می شوند و نیروهای را که بر میله های

CD، CE، و DE وارد می شوند پیدا کنید و توضیح دهید که هر يك از این میله ها به حالت کشیدگی قرار دارند یا به حالت فشرده گی.

۱۷- مرکز ثقل هر يك از اجسام زیر را پیدا کنید: الف) تیغه مثلثی شکل یکنواخت، ب) مخروط قائم توخالی نازك. مخروط قاعده ای دارد که از جنس مخروط است. اگر مخروط از نقطه O واقع بر محیط قاعده آن آویزان شود، قطر قاعده و مولدی که از O می گذرد با خط قائمی که از O می گذرد زاویه های یکسان می سازند. زاویه رأس مخروط را پیدا کنید.

۱۸- ثابت کنید که مرکز ثقل سه نقطه مادی یکسان که در سه رأس مثلثی قرار گیرند در محل تلاقی میانه های مثلث است. در ورقه مربعی شکل ABCD که طول هر ضلع آن $2a$ و مرکز آن O است سه سوراخ گرد به شعاع b به وجود می آوریم. مرکز سوراخها در وسط OA، OB، و OD است. مرکز ثقل جسم باقیمانده را پیدا کنید.

۱۹- تیغه ای یکنواخت به شکل يك چهارضلعی است. رئوس این چهارضلعی، نسبت به محورهایی متعامد، نقطه های $(4, 0)$ ، $(5, 0)$ ، $(0, 12)$ ، $(0, 3)$ است. مختصات مرکز جرم تیغه را پیدا کنید.

همچنین مختصات مرکز جرم سیم یکنواختی را که به شکل محیط چهارضلعی خم شده است پیدا کنید.

۲۰- ثابت کنید که مرکز ثقل تیغه یکنواخت به شکل نیم دایره که شعاع آن a است در فاصله $\frac{4a}{3\pi}$ از مرکز آن است.

AOB قاعده تیغه نیم دایره ای شکل یکنواخت به شعاع $2a$ و مرکز آن O است. تیغه نیم دایره ای شکلی به شعاع a و قاعده AO از تیغه اولی می بریم و باقیمانده را آزادانه از A آویزان می کنیم. در حالت تعادل، انحراف AOB را نسبت به قائم پیدا کنید.

۲۱- ثابت کنید که مرکز ثقل لایه نیم کره ای شکل نازك یکنواخت در وسط شعاع تقارن است. جام نازك نیم کره ای شکلی به وزن W از سطح منحنی آن بر روی صفحه ای افقی قرار می گیرد. به نقطه ای از لبه آن وزنه ای به وزن $\frac{1}{p}W$ متصل می کنیم. ثابت کنید که در حالت تعادل، صفحه لبه با افق زاویه ای برابر 45° می سازد.

۲۲- الف) ثابت کنید که مرکز جرم مثلثی که از میله هایی یکنواخت تشکیل شده است که جرم واحد طول آنها یکسان است در مرکز مثلثی است که رئوس آن در نقاط وسط میله ها است. ب) اگر تیغه ای یکنواخت به شکل ذوزنقه ای متقارن باشد که طول یکی از

دو ضلع متوازی آن دو برابر طول دیگری باشد، ثابت کنید که مرکز جرم آن در فاصله يك هشتم فاصله میان دو ضلع متوازی از مرکز جرم چهار نقطه مادی هموزن است که در چهار گوشه این دوزنقه قرار گیرند.

۲۳- ثابت کنید که مرکز ثقل نیمکره توپریکنواختی به شعاع a در فاصله $\frac{3a}{8}$ از مرکز قاعده

آن است. یکی از وجوه مکعبی یکنواخت را به قاعده نیمکره می چسبانیم، به طوری که قطار این وجه مکعب همان قطر قاعده نیمکره باشد. اگر ρ_1 چگالی ماده نیمکره و ρ_2 چگالی ماده مکعب باشد، ثابت کنید که مجموعه این دو جسم اگر از طرف منحنی نیمکره در تماس با صفحه افقی باشد، هنگامی به حالت تعادل است که $\pi\rho_1 = 8\rho_2$.

۲۴- مقطع مرکزی منشور قائم توپری دوزنقه ABCD است که در آن زاویه های A و D قائمه اند و $AD = CD = a$ و $AB = b$ است. فاصله های مرکز جرم جسم را از AB و AD پیدا کنید.

ثابت کنید که اگر منشور بتواند از وجهی که از AB می گذرد بر صفحه ای افقی

به حالت سکون قرار گیرد، در این صورت کمترین اندازه ممکن $\frac{b}{a}$ برابر $\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$ است.

۲۵- ظرفی توخالی از ماده ای یکنواخت تشکیل شده است. ضخامت ظرف قابل صرف نظر کردن است. این ظرف به شکل مخروط قائمی است که چگالی سطحی آن ρ است. مخروط بر نیمکره ای با چگالی سطحی σ سوار شده است. شعاع نیمکره برابر با شعاع لبه مدور مخروط است. اگر يك مولد مخروط در تماس با صفحه صیقلی افقی باشد و ظرف به حالت سکون درآمده باشد، ثابت کنید که α ، نیم زاویه رأس مخروط از معادله زیر به دست می آید:

$$\rho(\cot^2\alpha + 3) = 3\sigma(\cos\alpha - 2\sin\alpha)$$

۲۶- ثابت کنید که مرکز ثقل لایه نیمکره ای شکل نازک در وسط شعاع تقارن آن است. اگر این نیمکره از طرف سطح منحنی آن با سطح شیب داری در تماس باشد که با صفحه افقی زاویه α می سازد و آن قدر ناصاف است که از لغزش جسم جلوگیری می کند. ثابت کنید که α باید کوچکتر یا برابر 30° باشد.

۲۷- جسمی صلب از مخروط مدور قائمی تشکیل شده است که چگالی آن ρ ، شعاع آن r ، و ارتفاع آن $4r$ است و بر نیمکره ای یکنواخت که چگالی آن σ و شعاع آن r است طوری سوار شده است که وجوه سطح آنها برهم منطبق هستند. ثابت کنید که فاصله مرکز جرم کل جسم از وجه مشترک برابر است با

$$\frac{r}{\lambda} \left[\frac{16\rho - 3\sigma}{2\rho + \sigma} \right]$$

اگر $\rho = \sigma$ باشد و جسم به وسیله نخ‌آویزان باشد که به نقطه‌ای از لبه‌ی وجه مشترك متصل است، انحراف محور مخروط را نسبت به قائم پیدا کنید.

۲۸- جسمی صلب از استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع r تشکیل شده است که نیمکره‌ای به شعاع r بر یکی از دو قاعده آن سوار شده است. مرکز وجه سطح نیمکره بر محور استوانه واقع است. وجه مسطح این جسم با صفحه‌ی ناصافی در تماس است که شیب آن آهسته آهسته نسبت به افق زیاد می‌شود تا آنکه تعادل جسم از میان برود. ثابت کنید که اگر ضریب اصطکاک کوچکتر از $\frac{20}{17}$ باشد جسم بر روی سطح شیب‌دار خواهد لغزید و از آن سرنگون نخواهد شد.

۲۹- ثابت کنید که اگر جسمی صلب تحت اثر سه نیروی هم‌صفحه به حالت تعادل باشد، در این صورت راستای این نیروها یا متوازی هستند یا متقاطع.

ظرفی مخروطی شکل و توخالی که ارتفاع داخلی آن h و زاویه‌ی رأس آن 90° است طوری ثابت شده است که محور آن قائم و رأس آن روبه پایین است. میله‌ی صیقلی یکنواختی را طوری در این ظرف قرار داده‌ایم که یک سر آن در داخل ظرف و سر دیگر آن خارج از ظرف است. میله به حالت تعادل است. اگر انحراف میله نسبت به افق زاویه‌ی θ ، $(\theta < 45^\circ)$ باشد ثابت کنید که طول آن برابر است با

$$\frac{2h}{\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)^2}$$

۳۰- مرکز جرم نیمکره‌ی یکنواخت توپری به شعاع a را پیدا کنید. ثابت کنید که مرکز جرم لایه‌ی یکنواخت نیمکره‌ای که شعاعهای داخلی و خارجی آن a و b است از مرکز آن برابر است با

$$\frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8a^2+ab+b^2}$$

و از این رابطه محل مرکز جرم لایه‌ی نازک نیمکره‌ای شکل را به دست آورید. ۳۱- کره‌ی صلب یکنواختی را با صفحه‌ای کروی که همان شعاع را دارد به دو بخش تقسیم می‌کنیم. مرکز صفحه‌ی کروی بر سطح کره‌ی صلب قرار دارد. مرکز جرم بخش بزرگتر را که باقی می‌ماند پیدا کنید.

ثابت کنید که اگر این بخش بزرگتر از نقطه‌ای واقع بر لبه‌ی مدور آن آویزان باشد، و به حالت تعادل قرار گیرد، محور تقارن آن با افق زاویه‌ی θ می‌سازد، به طوری

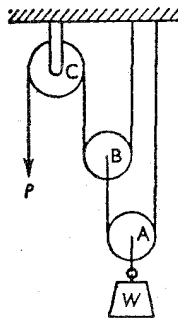
$$\text{که } \operatorname{tg} \theta = \frac{16\sqrt{3}}{33}$$

۳۲- در هر قاب از يك دستگاه «قاب و قرقره» سه قرقره وجود دارد. ريسمان به قاب ثابت متصل است و از زیر هر قرقره می‌گذرد و انتهای آزاد از روی قرقره‌ای از قاب ثابت می‌گذرد. اگر وزن قاب متحرك قابل صرف نظر کردن باشد و بازده دستگاه ۶۳ درصد باشد، معلوم کنید که برای بالا بردن وزنه 60 N چه نیرویی باید به کار برد.

۳۳- در ماشینی ساده که نسبت سرعتها r است رابطه میان P ، نیروی وارد شده، و W ، وزنه، بر طبق معادله $P = a + bW$ به دست می‌آید که در آن a و b اعداد ثابت مثبتی هستند. ثابت کنید که با افزایش وزنه از صفر تا حد $\frac{1}{br}$ بازده افزایش پیدامی‌کند. اگر به ازای نیرویی مانند P_r بازده دو برابر هنگامی باشد که نیرویی برابر P_1 وارد می‌شود، ثابت کنید که

$$\frac{2}{P_1} - \frac{1}{P_r} = \frac{1}{a}$$

۳۴- نمودار (شکل ۱۶-۳۰) دستگاهی از قرقره‌های بی اصطکاک را نشان می‌دهد که با آن وزنه‌ای برابر W را با نیرویی برابر P بالا می‌کشند. قرقره‌های A و B متحركند و جرم آنها به ترتیب ۲ و ۳ کیلوگرم است. قرقره C ثابت است. نسبت سرعتها در این دستگاه چقدر است؟ مزیت مکانیکی و بازده را هنگامی که جرم 50 kg بالا برده می‌شود پیدا کنید. اگر n قرقره متحرك موجود می‌بود که جرم هر کدام w بود برای بالا بردن وزنه W چه نیرویی می‌بایستی به کار برده می‌شد؟



شکل ۱۶-۳۰

۳۵- مزیت مکانیکی ماشینی که وزنه‌ای را بالا می‌برد از فرمول $4 - \frac{2w}{W+w}$ به دست

می‌آید، که در آن w مقداری است ثابت و W وزن وزنه‌ای است که بالا برده می‌شود. اگر نسبت سرعتها در این ماشین برابر ۵ باشد، برای نیروی محرك و بازده عبارتتهایی را بر حسب w و W به دست آورید و نشان دهید که با افزایش W عبارتی که بر حسب W به دست می‌آید به مقدار $\frac{4}{5}$ نزدیک می‌شود. اگر ماشین از دوقاب قرقره مناسب تشکیل شده باشد، نمودار روشنی از آن رسم کنید که آرایش قرقره‌ها و چگونگی ریسمان را نشان دهد. برای w نیز تفسیری مناسب بیابید.

۳۶- پیچ يك جك پیچ را با اهرمی می‌چرخانند که انتهای آن دایره‌ای به شعاع ۹۰ cm می‌پیماید. با هردور چرخش کامل پیچ، وزنه ۵/۶ cm بالا می‌آید. آزمایش نشان داده است که برای بلند کردن وزنه ۵۰۰ kg نیروی ۲۰ N باید بر انتهای اهرم وارد شود، و حال آنکه برای بلند کردن وزنه ۱۰۰۰ kg نیروی ۳۶ N باید وارد شود. به فرض آنکه قانون ماشین $P = aW + b$ است، که در آن a و b مقادیری ثابت هستند، نیروی P لازم برای بلند کردن وزنه W مساوی ۲۰۰۰ kg را پیدا کنید. هنگامی که W برابر ۱، ۲، ۳ مگاگرم است، بازده جک را پیدا کنید و نشان دهید که این بازده همواره کمتر از $\frac{49}{48\pi}$ است. نمودار بازده را نسبت به وزنه رسم کنید.

بردارها

۱۰۱۷. در سراسر کتاب در قلمرو مکانیک از مفهوم بردار استفاده کردیم و گاهی هم از شیوه‌های برداری برای اندازه‌گیریها استفاده کردیم. اکنون همه جبر برداری را که پیش از این آموختید با گسترش مفاهیم آن در این بخش می‌آوریم.

۲۰۱۷. کمیت اسکالر تنها با يك عدد، یعنی با بزرگی آن، به طور کامل مشخص می‌شود. کمیت اسکالر هیچ ارتباطی به جهت آن در فضا ندارد. جرم، طول، زمان، انرژی، دما همگی کمیتی اسکالر هستند.

کمیت برداری، دارای بزرگی به مفهوم جبری و جهت در فضا است. برای آنکه يك کمیت برداری کاملاً مشخص شود باید هم بزرگی آن معلوم باشد، هم جهت آن در فضا. نیرو، تندی، شتاب، مقدار حرکت همگی کمیتی برداری هستند.

ساده‌ترین بردار تغییر مکان يك نقطه مادی، یا تغییر مکان انتقالی يك جسم صلب در فضا است. اگر نقطه‌ای مادی از نقطه P به نقطه P' برود، تغییر مکان آن را با بردار $\overrightarrow{PP'}$ (یا PP') نشان می‌دهند. بزرگی این بردار برابر PP' و جهت آن از P به P' است.

همه بردارها را می‌توان با خطی مانند PP' نشان داد. اما اغلب بهتر است که

بردار را تنها با یک حرف مانند $\vec{a}$ (یا $\mathbf{a}$) نشان داد، که در این صورت بزرگی آن را با a نشان می‌دهند.

بزرگی هر بردار $\vec{AB}$ را، که گاهی هم مدول یا قدر مطلق آن می‌نامند، با $|\vec{AB}|$ نیز نشان می‌دهند.

در برابر جبر اعداد اسکالر مثبت و منفی جبر برداری نیز وجود دارد. در این مبحث می‌خواهیم جبر برداری را مورد مطالعه قرار دهیم.

۳۰۱۷. برابری بردارها

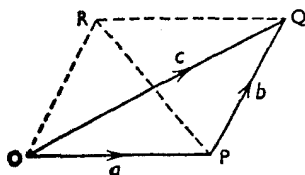
دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هنگامی با هم برابرند که بزرگی آنها یکسان باشد و جهت آنها نیز در فضا یکسان باشد.

وقتی که می‌نویسیم: $\vec{a} = \vec{b}$ بدان معنی است که $a = b$ و بردارها موازیند و جهت آنها یکسان است. تأکید می‌کنیم که این تعریف برابری بردارها فقط برای بردارهای آزاد صادق می‌کند، نه برای بردارهایی که در یک خط متمرکز شده‌اند (مانند نیروهایی که بر یک جسم صلب اثر می‌کنند).

۴۰۱۷. جمع و تفریق بردارها

جمع هردو بردار هم‌نوع که با $\vec{OP}$ و $\vec{PQ}$ نمایش داده شده باشند برداری است مانند $\vec{OQ}$. می‌نویسیم: $\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$.

جمع را همواره می‌توان به صورت نموداری انجام داد و آن از راه رسم مثلث OPQ (شکل ۱۷-۱) است.



شکل ۱۷-۱

باید توجه داشت که $\vec{OP} + \vec{PQ} \geq \vec{OQ}$ است.

اگر $\vec{OP}$ را به $\vec{a}$ و $\vec{PQ}$ را به $\vec{b}$ و $\vec{OQ}$ را به $\vec{c}$ نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

متوازی الاضلاع OPQR را کامل می‌کنیم. در این صورت از تعریف برابری بردارها

نتیجه می‌گیریم که

$$\vec{OR} = \vec{PQ} = \vec{b}$$

$$\vec{RQ} = \vec{OP} = \vec{a}$$

و

$$\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ}$$

اما

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

∴

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$$

همچنین

که بیانگر قانون تبدیلیپذیری در جمع بردارهاست.

حالت مخصوصی که در آن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چنانند که $\vec{OQ}$ و $\vec{O}$ برهم منطبق هستند اهمیت

بسیار دارد. در این حالت $\vec{OQ}$ برابر صفر است، و بنابراین

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OQ} = \vec{0}$$

بردار صفر دارای بزرگی صفر است. چنین برداری با یک نقطه نشان داده می‌شود و جهت ندارد.

اگر $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ باشد می‌نویسیم $\vec{b} = -\vec{a}$ ، یعنی $-\vec{a}$ ، برداری است با بزرگی

$\vec{a}$ ، که موازی بردار $\vec{a}$ اما در خلاف جهت آن است.

به همین طریق، چون

$$\vec{OP} + \vec{PO} = \vec{0}$$

$$\vec{PO} = -\vec{OP}$$

می‌نویسیم

$$\vec{LM} = -\vec{ML}$$

به طور کلی

از شکل ۱۷-۱ ممکن بود چنین بنویسیم:

$$\vec{RP} = \vec{RO} + \vec{OP}$$

$$= -\vec{OR} + \vec{OP}$$

$$= -\vec{b} + \vec{a}$$

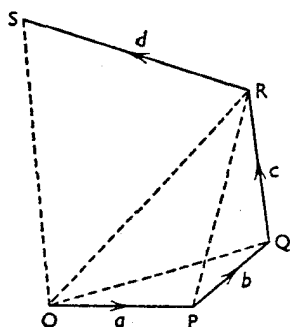
$$\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{PR} = \vec{b} - \vec{a}$$

به همین طریق

به این ترتیب متوجه می شویم که قطره های متوازی الاضلاع نشان دهنده مجموع و تفاضل دوبرداری است که با اضلاع مجاور یکدیگر نشان داده می شوند. استواری این قاعده های جمع و تفریق را ممکن است به راه های گوناگون نشان داد. بعدها نشان خواهیم داد که بعضی از استدلال های هندسی را نیز ممکن است مبتنی بر این قواعد بکنیم.

۵۰۱۷. مجموع هر چند بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots$ را ممکن است با تکرار کاربرد قاعده بالا درباره جمع بردارها به دست آورد. این شیوه در شکل ۱۷-۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۷-۲

$\vec{OP}, \vec{PQ}, \vec{QR}, \dots$ را به ترتیب برای نمایش بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ رسم می کنیم.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OQ}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{OQ} + \vec{QR} \\ &= \vec{OR} \end{aligned}$$

و این کار را همچنان ادامه می دهیم تا مجموع کل بردارها به دست آید. آشکار است که

$$\begin{aligned}\vec{OR} &= \vec{OP} + \vec{PR} \\ &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

و بنا براین

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

این معادله نشان می‌دهد که ترتیب جمع شدن بردارها با یکدیگر تفاوتی در نتیجه جمع ندارد و بنا براین پرانتزها ضرورت ندارند. این نتیجه را قانون شرکتپذیری می‌نامند. جمع بردارها را به آسانی می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

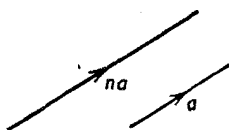
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \dots$$

از قانون تبدیله‌پذیری نیز نتیجه می‌شود که ترتیب نوشتن بردارها اهمیتی نداشته باشد.

$$۶.۱۷. \text{ در حالت ویژه که } \vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \vec{d} = \dots \text{ است،}$$

خواهیم داشت $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{a}$ ، که می‌توانیم آن را به صورت $۲\vec{a}$ بنویسیم. همچنین $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ ، که می‌توانیم آن را به صورت $۳\vec{a}$ بنویسیم.

در واقع $n\vec{a}$ ، که در آن n کمیتی اسکالر مثبت است، برداری است همجهت با بردار $\vec{a}$ و به بزرگی na (شکل ۳-۱۷).



شکل ۳-۱۷

اگر n منفی باشد، مثلاً برابر $-m$ باشد که m کمیتی اسکالر مثبت است، در این صورت $n\vec{a} = -m\vec{a}$ یعنی در جهت مخالف بردار $m\vec{a}$ ، یعنی برداری در خلاف جهت بردار $\vec{a}$ و به بزرگی ma .

از گفته‌های بالا نتیجه می‌شود که بردار واحد در جهت $\vec{a}$ را می‌توان به صورت $\frac{1}{a}\vec{a}$

نوشت. علامت $\hat{a}$ را گاهی برای این بردار واحد به کار می‌بریم. بنابراین:

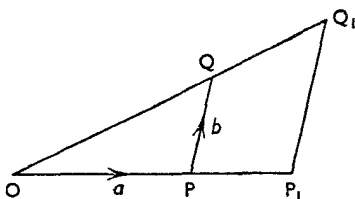
$$\hat{a} = \frac{1}{a} \vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = a \hat{a}$$

۷۰۱۷. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه و n کمیتی اسکالر باشد، نشان خواهیم داد که

$$n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$$

اگر OP (شکل ۴-۱۷) بردار $\vec{a}$ را نشان دهد، در این صورت $OP_1 = nOP$

بردار $n\vec{a}$ را نشان خواهد داد. همچنین اگر PQ بردار $\vec{b}$ را نشان دهد و اگر P_1Q_1 به موازات PQ چنان رسم شود که $P_1Q_1 = nPQ$ باشد، در این صورت P_1Q_1 بردار $n\vec{b}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱۷

بنابراین $\frac{OP_1}{OP} = \frac{P_1Q_1}{PQ} = n$ و بنابراین Q_1 بر امتداد OQ واقع خواهد شد و چنان

$$\text{است که } \frac{OQ_1}{OQ} = n$$

$$\therefore \vec{OQ_1} = n\vec{OQ}$$

$$\therefore \vec{OP_1} + \vec{P_1Q_1} = n(\vec{OP} + \vec{PQ})$$

$$\therefore n\vec{a} + n\vec{b} = n(\vec{a} + \vec{b})$$

شکل ۴-۱۷ برای حالتی که n مقداری مثبت دارد رسم شده است، اما استدلال را

می‌توان به ازای مقادیر منفی n نیز به کار برد.

۸۰۱۷. باید به خاطر سپرد که قاعده‌هایی که برای بردارها در جمع، تفریق و ضرب در کمیت

اسکالر برقرار است با قاعده‌هایی که برای این اعمال در جبر معمولی برقرار است شباهت دارد. این قاعده‌ها را به آسانی می‌توان درباره بردارها به کار برد، زیرا لازم نیست که شیوه‌های تازه‌ای آموخته شود. این قاعده‌ها در سراسر این کتاب، هر جا که مناسب بوده است، به کار رفته است، و مثالهای بسیار از کاربرد آنها داده شده است. با این همه، دامنه کاربرد این قاعده بسیار گسترده است. مثلاً در هندسه، شیوه‌های برداری منجر به استدلالهای بسیار کوتاه و عالی می‌شود. مثال ساده‌ای از این کاربردها، پیش از این، در بند ۱-۱۲ آمده است. مثالهای دیگر در زیر آورده می‌شود.

مثال ۱: ثابت کنید که قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

حل: فرض می‌کنیم که S محل تلاقی قطرهای متوازی الاضلاع $OPQR$ (شکل ۱۷-۵)

باشد. $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{OR} = \vec{b}$ را اختیار می‌کنیم.

در این صورت

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= k\overrightarrow{OQ} \\ &= k(\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

که در آن $k = \frac{OS}{OQ}$ است.

و از آنجا

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SP} &= \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OP} \\ &= -k(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} \\ &= (1-k)\vec{a} - k\vec{b}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{SP} = m\overrightarrow{RP} \quad \text{اما}$$

$$= m(\vec{a} - \vec{b})$$

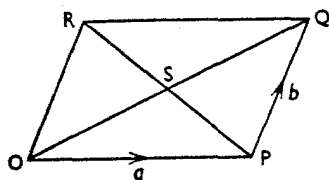
که در آن $m = \frac{SP}{RP}$ است.

از مقایسه این دو عبارت $\overrightarrow{SP}$ نتیجه می‌شود که

$$1 - k = m = k$$

$$k = m = \frac{1}{2}$$

پس



شکل ۵-۱۷

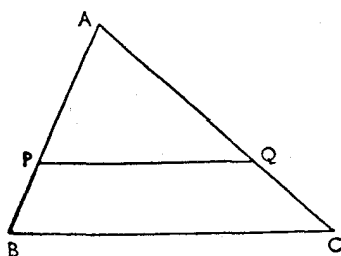
$$\vec{SP} = \frac{1}{2}\vec{RP} \text{ و } \vec{OS} = \frac{1}{2}\vec{OQ}$$

بنابراین

یعنی قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند.

مثال ۲: ثابت کنید که اگر PQ به موازات ضلع BC از مثلث ABC رسم شود و AB و

AC را به ترتیب در P و Q قطع کند، در این صورت $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$



شکل ۶-۱۷

حل : چون PQ ، در شکل ۶-۱۷، به موازات BC است، می توانیم بنویسیم

$$\vec{PQ} = k\vec{BC}$$

$$k = \frac{PQ}{BC}$$

که در آن

$$\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AQ}$$

اما

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

و

$$\therefore \vec{PA} + \vec{AQ} = k\vec{BA} + k\vec{AC}$$

$$\therefore \vec{PA} - k\vec{BA} = k\vec{AC} - \vec{AQ}$$

$$\therefore \left(\frac{PA}{BA} - k\right)\vec{BA} = \left(k - \frac{AQ}{AC}\right)\vec{AC}$$

اما BA و AC دوبردار دلخواهند و بنابراین چنین نتیجه‌ای فقط هنگامی ممکن

است که ضریبهای $k - \frac{PA}{BA}$ و $k - \frac{AQ}{AC}$ هر دو برابر صفر باشند،

یعنی هنگامی که $k = \frac{PA}{BA} = \frac{AQ}{AC}$.

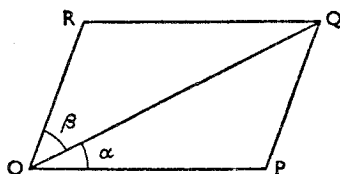
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \quad \text{بنابراین}$$

۹.۱۷. مؤلفه‌های يك بردار

چون دوبردار را می‌توان با هم جمع کرد یا به يك بردار تبدیل کرد، هر بردار را نیز می‌توان به دو بردار تجزیه کرد. بردارهایی که از تجزیه يك بردار به دست می‌آیند مؤلفه‌های آن بردار نامیده می‌شوند.

هر بردار دلخواه $\vec{OQ}$ را می‌توان به دو بردار، $\vec{OP}$ و $\vec{PQ}$ ، تجزیه کرد. يك راه

آن است که مثالی رسم کنیم که OQ یکی از اضلاع آن باشد. راه دیگر، رسم متوازی-الاضلاع $OPQR$ است که در آن OQ یکی از قطرهاست. این کار را می‌توان به راههای گوناگون انجام داد.



شکل ۷-۱۷

بنابراین اگر بخواهیم که مؤلفه‌های بردار $\vec{OQ}$ با $\vec{OQ}$ به ترتیب زاویه‌های α و β بسازند، متوازی‌الاضلاع $OPQR$ (شکل ۷-۱۷) را رسم می‌کنیم که در آن $\angle QOP = \alpha$ و $\angle QOR = \beta$ است.

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} \quad \text{در این صورت}$$

$$\frac{OP}{\sin \beta} = \frac{PQ}{\sin \alpha} = \frac{OQ}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{و}$$

$$\therefore OP = OQ \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$PQ = OQ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{و}$$

اینها بزرگیهای مؤلفه‌های بردار درجهت‌های مطلوب است.

حالت ویژه، که اغلب پیش می‌آید، حالتی است که در آن مؤلفه‌های بردار برهم عمودند. به این حالت باید توجه بیشتری کرد:

اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ باشد، در این صورت:

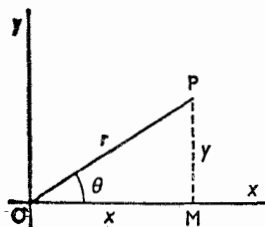
$$OP = OQ \cos \alpha \quad \text{و} \quad PQ = OQ \sin \alpha$$

۱۰-۱۷. چون هر مؤلفه بردار را می‌توان به نوبه خود به دو مؤلفه تجزیه کرد، با تکرار کاربرد قانون جمع بردارها، نتیجه می‌شود که هر بردار را می‌توان به هرچند مؤلفه که بخواهیم تجزیه کرد.

بنابراین بردار $\vec{OQ}$ را می‌توان از راه رسم یک چند ضلعی که دارای $(n+1)$ ضلع است و در آن OQ یکی از ضلع‌هاست، به n مؤلفه تجزیه کرد. از این گذشته، نیازی هم نیست که چند ضلعی در یک صفحه باشد. مجموعه‌های بیشماری از این نوع مؤلفه‌ها برای یک بردار وجود دارد.

۱۱-۱۷. اغلب بهتر است که مؤلفه‌هایی از بردار به کار برده شوند که به موازات محورهای مختصات ویژه‌ای باشند.

اگر P نقطه‌ای با مختصات (x, y) (شکل ۱۷-۸) باشد، مکان P را نسبت به مبدأ می‌توان با بردار $\vec{OP}$ نمایش داد. این بردار را بردار مکان P می‌نامند و اغلب آن را با $\vec{r}$ نمایش می‌دهند.



شکل ۸-۱۷

اگر PM عمود بر Ox رسم شود، خواهیم داشت

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$$

اما $\vec{OM}$ را می‌توان به صورت $\vec{i}x$ نوشت که در آن $\vec{i}$ برداری به بزرگی واحد

و به موازات Ox است، و $\vec{MP}$ را می‌توان به صورت $\vec{j} y$ نوشت که در آن $\vec{j}$ برداری با بزرگی واحد و به موازات Oy است.

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad \text{خواهیم داشت}$$

اگر زاویه $\theta = \text{POM}$ باشد، در این صورت

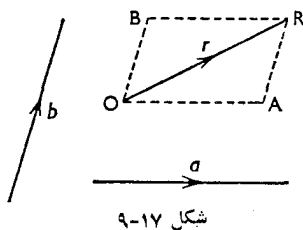
$$x = r \cos \theta \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta$$

برای هر بردار $\vec{r}$ مؤلفه‌های x و y را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. به خاطر داشته باشید که $r^2 = x^2 + y^2$ است، یعنی

$$r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

۰۱۲۰۱۷. در حالت کلی، فرض می‌کنیم که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر متوازی در یک صفحه باشند. در این صورت هر بردار $\vec{r}$ را که هم‌صفحه با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد می‌توان به دو مؤلفه، به ترتیب به موازات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، تجزیه کرد.

اگر OR (شکل ۹-۱۷) بردار $\vec{r}$ را نشان می‌دهد، متوازی الاضلاع OARB را که اضلاع آن به موازات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است کامل می‌کنیم.



شکل ۹-۱۷

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{OA} + \vec{OB} \\ &= x \vec{a} + y \vec{b} \end{aligned} \quad \text{در این صورت}$$

که در آن x و y کمیت‌هایی اسکالرند. در واقع $x = \frac{OA}{a}$ و $y = \frac{OB}{b}$ است.

به همین طریق، اگر $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ مجموعه دلخواهی از بردارهای هم‌صفحه

باشند، آنها را می‌توانیم به مؤلفه‌هایی به موازات بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به شرح زیر تجزیه کنیم:

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b}$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b}$$

$$\vec{r}_3 = x_3 \vec{a} + y_3 \vec{b}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

بنابراین مجموع برداری آنها چنین است:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \cdots = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots) \vec{a} + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots) \vec{b}$$

نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌های مجموع هر گروه بردار، مجموعهای مؤلفه‌های بردارهای جداگانه است.

از این گذشته، اگر مجموع بردارها صفر باشد، در این صورت

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots = 0$$

و

عکس این عبارت نیز درست است.

۱۳.۱۷. اگر بردار $\vec{r}$ در صفحه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (یا در صفحه‌ای موازی این صفحه) نباشد ممکن است آن را به مؤلفه‌ای در این صفحه و مؤلفه‌ای در صفحه دیگر تجزیه کرد.

نتیجه آن که هر بردار $\vec{r}$ را می‌توان به مؤلفه‌هایی موازی $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ، سه بردار دلخواه غیر واقع در یک صفحه، تجزیه کرد و می‌توان نوشت:

$$\vec{r} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$$

که در آن x ، y ، و z کمیت‌هایی اسکالرند.

در حالت مخصوص، اگر $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد به موازات محورهای متعامد

Ox ، Oy ، و Oz باشند، بردار مکان $\vec{r}$ هر نقطه‌ای به مختصات (x, y, z) را در فضا می‌توان به صورت زیر نوشت:

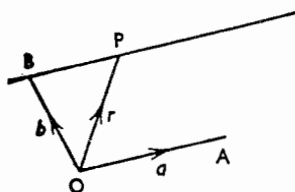
$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{باید در نظر داشت که}$$

جهت بردار در فضا از جهت‌های کسینوسهای $\frac{x}{r}$ ، $\frac{y}{r}$ ، $\frac{z}{r}$ به دست می‌آید.

۱۴.۱۷. معادله برداری یک خط

اگر $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ (شکل ۱۷-۱۰) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نشان دهند، و P نقطه‌ای دلخواه برخطی باشد که از B به موازات $\vec{OA}$ رسم می‌شود، در این صورت $\vec{r}$ ، بردار مکان نقطه P ، نسبت به O چنین به دست می‌آید:



شکل ۱۷-۱۰

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OB} + \vec{BP} \\ &= \vec{b} + m\vec{a}\end{aligned}$$

که در آن $m = \frac{BP}{OA}$ کمیتی است اسکالر.

این معادله $\vec{r} = \vec{b} + m\vec{a}$ معادله برداری خطی است که از نقطه B (که با $\vec{b}$ تعریف می‌شود) به موازات بردار $\vec{a}$ رسم می‌شود. به ازای هر مقدار m نقطه ویژه‌ای بر روی خط به دست می‌آید. m می‌تواند هر مقداری از منهای بینهایت تا بعلاوه بینهایت داشته باشد.

به همین طریق، اگر P نقطه‌ای واقع بر خط BA باشد $\vec{r}$ ، بردار مکان آن، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OB} + \vec{BP} \\ &= \vec{b} + m\vec{BA} \\ &= \vec{b} + m(\vec{a} - \vec{b}) \\ &= m\vec{a} + (1 - m)\vec{b}\end{aligned}$$

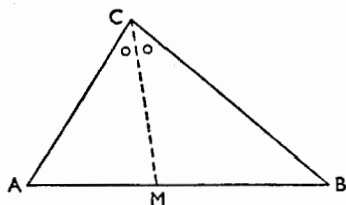
که در آن $m = \frac{BP}{BA}$ است.

این معادله برداری خطی است که از دو نقطه می گذرد که بردارهای مکان آنها $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند.

نقطه A متعلق به $m=1$ و نقطه B متعلق به $m=0$ است. هر نقطه دلخواهی واقع بر AB یا بر امتداد AB متعلق به مقدار معینی از m است. نقطه وسط AB متعلق به $m=\frac{1}{2}$ است. برای این نقطه $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ است.

۱۵-۱۷. مثال ۱: ABC مثلث دلخواهی است که در آن نیمساز زاویه ACB ضلع AB را

در نقطه ای مانند M قطع می کند. به شیوه برداری ثابت کنید که $\frac{CA}{CB} = \frac{AM}{MB}$.



شکل ۱۱-۱۷

حل : برای هر نقطه M واقع بر AB (شکل ۱۱-۱۷) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\vec{CM} &= \vec{CA} + \vec{AM} \\ &= \vec{CA} + \frac{AM}{AB} \times \vec{AB} \\ &= \vec{CA} + \frac{AM}{AB} (\vec{AC} + \vec{CB}) \\ &= \left(1 - \frac{AM}{AB}\right) \vec{CA} + \frac{AM}{AB} \vec{CB} \\ &= \frac{MB}{AB} \times \vec{CA} + \frac{AM}{AB} \vec{CB}\end{aligned}$$

که مؤلفه های $\vec{CM}$ را در امتدادهای CA و CB به دست می دهد.

اما اگر CM زاویه ACB را نصف کند بزرگی مؤلفه های CM در امتدادهای CA و CB یکسان باشند.

$$\therefore \frac{MB}{AB} \times CA = \frac{AM}{AB} \times CB$$

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{AM}{MB}$$

مثال ۲: بردار $\vec{r} = 10\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ تابع خطی بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، و $\vec{c}$ را توضیح دهید، به شرط آنکه

$$\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \text{ و } \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \text{ باشد.}$$

حل: $\vec{r}$ هنگامی تابع خطی $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، و $\vec{c}$ است که بتوان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\vec{r} = m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b} + m_3 \vec{c}$$

که در آن m_1 ، m_2 ، m_3 کمیت‌هایی اسکالر هستند.

اگر این رابطه برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$10\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} = m_1(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + m_2(3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}) + m_3(-\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$$

با برابری مؤلفه‌ها خواهیم داشت:

$$2m_1 + 3m_2 - m_3 = 10$$

$$-m_1 + 2m_2 + 3m_3 = -3$$

$$3m_1 - 4m_2 - 2m_3 = -1 \quad \text{و}$$

از این معادله‌ها نتیجه می‌شود که $m_1 = 1$ ، $m_2 = 2$ و $m_3 = -2$ است.

$$\vec{r} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} \quad \text{بنابراین}$$

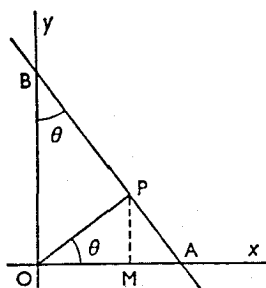
مثال ۳: پای عمودی را که از مبدأ برخط $\vec{r} = 3m\vec{i} + 4(1-m)\vec{j}$ رسم می‌شود بیابید.

حل: شکل ۱۷-۱۲ خطی با معادله برداری $\vec{r} = 3m\vec{i} + 4(1-m)\vec{j}$ را نشان

می‌دهد. این خط از نقطه A واقع برمحور x می‌گذرد به طوری که $\vec{OA} = 3\vec{i}$

است. در ضمن از نقطه B واقع برمحور y ها می‌گذرد به طوری که $\vec{OB} = 4\vec{j}$

نقطه‌های A و B به ترتیب متعلق به $m = 1$ و $m = 0$ هستند.



شکل ۱۷-۱۲

اگر P پای عمودی باشد که از O بر AB فرود می‌آید، دراین صورت زاویه POA، که با θ نشان داده شده است، برابر زاویه ABO خواهد بود.

$$\operatorname{tg} POA = \frac{PM}{OM} = \frac{4(1-m)}{3m} \quad \text{اما}$$

$$\operatorname{tg} ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4} \quad \text{و}$$

به این ترتیب P متعلق به مقداری از m است که برای آن

$$\frac{4(1-m)}{3m} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 16(1-m) = 9m$$

$$\therefore m = \frac{16}{25}$$

پس بردار مکان P چنین است:

$$\frac{48}{25} \vec{i} + \frac{36}{25} \vec{j}$$

$$\operatorname{MP} = \frac{36}{25} \quad \text{و} \quad \operatorname{OM} = \frac{48}{25} \quad \text{یعنی}$$

توجه داشته باشید که طول عمود OP برابر است با

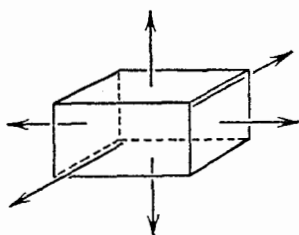
$$\left\{ \left(\frac{48}{25} \right)^2 + \left(\frac{36}{25} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

یعنی برابر است با $\frac{12}{5}$.

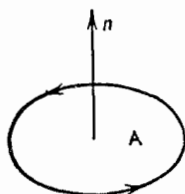
۱۶.۱۷. بردارهای سطحی

هر صفحه مسطح در فضا دارای بزرگی و جهت است. جهت هر صفحه را می‌توان بر اساس جهت عمود بر آن صفحه مشخص کرد. بنابراین هر صفحه را می‌توان با برداری عمود بر آن صفحه، یعنی مثلاً بردار $\vec{A} \cdot \vec{n}$ ، نشان داد که در آن A بزرگی سطح و $\vec{n}$ بردار واحد در جهت عمود بر صفحه است. $\vec{A} \cdot \vec{n}$ را گاهی به صورت $\vec{A}$ نشان می‌دهند و چنین برداشت می‌کنند که $\vec{A}$ برداری است عمود بر صفحه A .

درباره جهت مثبت عمود بر صفحه مشکلاتی وجود دارد. بنابراین باید برای هر مورد ویژه به دقت تعیین شود. گاهی جهت مثبت عمود بر صفحه را با توجه به جهت مثبت حرکت به دور محیط صفحه بر اساس قاعده پیچ راست‌دست (شکل ۱۷-۱۳) می‌گیرند. حرکت بر محیط صفحه هنگامی مثبت گرفته می‌شود که صفحه همیشه در سمت چپ واقع باشد. اما اگر صفحه بخشی از یک سطح بسته را تشکیل داده باشد، عمود بر آن صفحه به طرف بیرون به عنوان جهت مثبت انتخاب می‌شود. مثلاً سطوح یک مکعب مستطیل را می‌توان با شش بردار عمود بر سطوح به طرف بیرون نشان داد (شکل ۱۷-۱۴). این بردارها جفت جفت برابر و در دو جهت مخالف یکدیگرند.



شکل ۱۷-۱۴



شکل ۱۷-۱۳

اگر سطح S مسطح نباشد، می‌توان آن را به اجزای dS_1 ، dS_2 ، dS_3 ، تقسیم کرد که هر یک آن قدر کوچک است که می‌توان آن را به عنوان سطحی مسطح در نظر گرفت. در این صورت بردار $\vec{S}$ که نشان دهنده کل سطح است مجموع برداری $d\vec{S}_1 \cdot \vec{n}_1$ ، $d\vec{S}_2 \cdot \vec{n}_2$ ، ... است که در آن $\vec{n}_1$ ، $\vec{n}_2$ ، ... بردارهای واحد عمود بر صفحه در نقاط مختلف

بر اجزای آن است.

این مجموع برداری در مورد يك صفحه بسته برابر صفر است، یعنی برداری که صفحه‌ای بسته را نشان می‌دهد برابر صفر است. این موضوع در مثال ویژه‌ای که برای مکعب مستطیل در شکل ۱۷-۱۴ آوردیم به خوبی روشن است. اما آن را در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد.

۱۷-۱۷. بردار سطحی را نیز می‌توان مانند بردارهای دیگر به مؤلفه‌هایی تجزیه کرد. می‌توان ثابت کرد که بزرگی مؤلفه يك بردار سطحی در هر جهت دلخواه برابر است با بزرگی تصویر آن سطح بر صفحه‌ای عمود بر آن جهت دلخواه.

زیرا تصویر قائم مثلث ABC بر يك صفحه مثلثی است مانند abc به طوری که

$$\cos \theta = (\text{مساحت } \triangle ABC) / (\text{مساحت } \triangle abc)$$

که در آن θ زاویه میان سطوح ABC و abc است. اگر $90^\circ < \theta < 180^\circ$ باشد، در این صورت $\triangle abc$ منفی است.

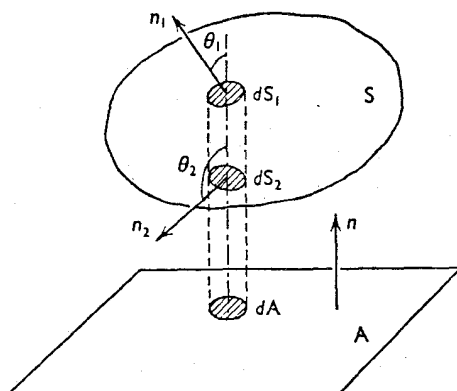
این نتیجه را می‌توان تعمیم داد و برای هر شکل مستوی محدود به خطوط راست به کاربرد، زیرا چنین شکلی از مجموعه چند مثلث تشکیل شده است. به همین شیوه، این نتیجه را می‌توان برای شکلهایی نیز که به خطوط منحنی محدود شده‌اند به کاربرد، زیرا این شکلهای محدوده‌شکلهایی هستند که به خطوط مستقیم محدود شده‌اند، و عده خطوط تا بینهایت افزایش پیدا کرده‌اند.

به این ترتیب، تصویر قائم هر سطح را بر صفحه‌ای دلخواه می‌توان مؤلفه بردار سطح در جهت عمود بر صفحه تصویر دانست.

این نتیجه باید برای هر صفحه‌ای به هر صورت که باشد درست باشد، زیرا چنین صفحه‌ای را می‌توان به عناصرهای سطحی مستوی تقسیم کرد که این قضیه درباره هر يك از آنها صدق می‌کند. از راه جمع برداری این قضیه در حالت کلی نیز ثابت می‌شود.

در حالت مربوط به يك صفحه بسته تصویر هر صفحه صفر است، زیرا عده صفحه‌های مثبت برابر عده صفحه‌های منفی است.

این موضوع از شکل ۱۷-۱۵ آشکار می‌شود، که در آن dS_1 عنصری دلخواه از صفحه S است. اگر تصویر dS_1 بر صفحه دلخواه A با dA نشان داده شود و اگر $\vec{n}_1$ بردار واحد عمود بر عنصر dS_1 باشد، که از صفحه روبه بیرون است، در این صورت dA برابر است با مؤلفه $\vec{n}_1 \cdot dS_1$ عمود بر صفحه A یعنی در جهت بردار واحدی است که در شکل نشان داده شده است. اکنون استوانه‌ای را که در آن dS_1 و dA دوسر آن هستند



شکل ۱۷-۱۵

در نظر می گیریم. این استوانه از صفحه S عنصری مانند سطح dS_1 را می برد. اگر $\vec{n}_1$ بردار واحد عمود بر عنصر dS_1 باشد، که روبه بیرون سطح است، در این صورت مؤلفه $dS_1 \vec{n}_1$ در جهت عمود بر A است، یعنی در جهت بردار واحد $\vec{n}$ یا $-dA$ است.

این نتیجه برای هر جفت عنصر dS_1 و dS_2 درست است. بنابراین با جمع کردن بردارها برای کل سطح، نتیجه می شود که بردار مربوط به هر صفحه بسته برابر صفر است.

۱۷-۱۸. کاربرد نتیجه هایی که در بالا مورد بحث قرار گرفتند برای مقاطع مستوی برخی از اجسام آشکار است.

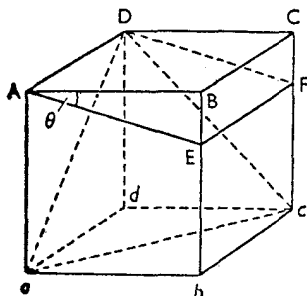
به عنوان مثال، مقطع قائم مکعبی به ضلع x مربعی است به مساحت x^2 . مقطع $AEFD$ (شکل ۱۷-۱۶) با صفحه ای که زاویه θ با وجه $ABCD$ می سازد مستطیلی است

به اضلاع x و $\frac{x}{\cos \theta}$ ، یعنی به مساحت $\frac{x^2}{\cos \theta}$ است. بنابراین

$$ABCD \text{ مساحت} = (\text{مساحت } AEFD) \cos \theta$$

و این نتیجه ای است که با آنچه برای حالت کلی در بند ۱۷-۱۷ در بالا بیان کردیم تطبیق دارد.

اگر شش وجه جسم $abcd$ $AEFD$ با بردارهایی عمود بروجه و در جهت رو به بیرون نمایش داده شوند، به آسانی می توان ثابت کرد که مجموع برداری آنها صفر است. این نتیجه را می توان برای گوئه پنج وجهی $ADCB EF$ نیز به دست آورد. به همین طریق، مقطع Dca از مکعب (شکل ۱۷-۱۶) مثلثی متساوی الاضلاع



شکل ۱۶-۱۷

است که طول هر ضلع آن $x\sqrt{3}$ است و بنابراین مساحت آن $\frac{1}{2}x^2\sqrt{3}$ است و $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

است. تصویر آن بروجه abcd از مکعب، مثلث dca به مساحت $\frac{1}{2}x^2$ است. بنابراین اگر زاویه میان مقطع Dca با وجه abcd برابر α باشد خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}x^2 = \left(\frac{1}{2}x^2\sqrt{3}\right)\cos\alpha$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

این نتیجه را ممکن بود از این راه به دست آورد که مساحت های وجوه منشور Ddca را با بردارهایی عمود بر هر وجه و روبه بیرون نمایش دهیم. بزرگی های این بردارها به ترتیب

$$\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x^2, \text{ و } \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} \text{ است، و به شرط آنکه } \cos\alpha = \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2}x^2\sqrt{3}\right)$$

یعنی $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مجموع این بردارها برابر صفر است. به عکس، می توانیم از راه

هندسه ثابت کنیم که $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، سپس تحقیق کنیم که مجموع بردارهایی که چهار وجه را نشان می دهند صفر است.

نیز مقطع قائم استوانه ای به شعاع a دایره ای است به مساحت πa^2 . مقطعی که با مقطع قائم زاویه θ می سازد مساحتی برابر A دارد که درباره آن می توان نوشت:

$$A\cos\theta = \pi a^2$$

$$\therefore A = \frac{\pi a^2}{\cos\theta}$$

این مقطع در واقع به شکل بیضی است که نیم قطرهای آن a و $\frac{a}{\cos\theta}$ است، و آن را می-

توان با برداری به بزرگی $\frac{\pi a^2}{\cos \theta}$ نشان داد که با محور استوانه زاویه ای برابر θ می سازد.

تمرین ۱۰۱۷

۱ - ABCDEF شش ضلعی منتظم است. بردارهایی با بزرگی ۲، $\frac{4}{3}$ ، ۸، $\frac{4}{3}$ و $\frac{2}{3}$ واحد به ترتیب در جهت های AB، AC، AD، AE و AF رسم شده اند. بزرگی مجموع بردارها و زاویه انحراف آن را نسبت به AB پیدا کنید.

۲ - بردارهای مکان نقطه های A، B، C به ترتیب $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ هستند که برای آنها $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$ ، $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}$ ، $\vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j}$ اندازه طولهای AB، BC، و CA را بیابید.

۳ - الف) اگر $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ، $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ و $\vec{c} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ باشد $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ، $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ، و $\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{c}$ را تعیین کنید. ب) اندازه های m و n را چنان تعیین کنید که $m\vec{a} + n\vec{b}$ موازی $\vec{c}$ باشد.

پ) بردارهای واحد $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، و $\vec{c}$ را پیدا کنید.

۴ - ثابت کنید که بردارهای $a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$ و $b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}$ در صورتی که $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ باشد عمود بر یکدیگرند. بردار عمود بر بردار $3\vec{i} - 2\vec{j}$ را پیدا کنید.

۵ - ثابت کنید که $\vec{r}$ ، بردار مکان نقطه P که AB را به نسبت m به n تقسیم می کند از معادله $(m+n)\vec{r} = n\vec{a} + m\vec{b}$ به دست می آید که در آن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای مکان A و B هستند.

۶ - ثابت کنید که سه نقطه، که بردارهای مکان آنها $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ هستند، در صورتی هم صفحه اند که $m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b} + m_3 \vec{c} = 0$ که در آن $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ است.

۷ - ثابت کنید که می توان مثلثی ساخت که اضلاع آن موازی و برابر میانه های یک مثلث دلخواه باشند.

۸ - به طور برداری ثابت کنید که اگر میانه های AD و BE از مثلث دلخواه ABC در نقطه G یکدیگر را قطع کنند، در این صورت نقطه G خطهای AD و BE را به

- نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. همچنین ثابت کنید که سه میانه در یک نقطه متقاطعند.
- ۹ - ثابت کنید که اگر نقطه‌های وسط اضلاع یک چهارضلعی دلخواه به هم متصل شوند شکلی که به دست می‌آید متوازی‌الاضلاع است.
- ۱۰ - قطرهای یک چهارضلعی معین یکدیگر را نصف می‌کنند. ثابت کنید که این چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

- ۱۱ - اگر نقطه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ بردارهای مکان $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ نسبت به O باشند، ثابت کنید که بردار مکان نقطه G که بر طبق رابطه زیر بیان می‌شود مستقل از نقطه O است:

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \vec{OG} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n$$

در این رابطه $m_1, m_2, \dots, m_n$ کمیت‌هایی اسکالرند.

- ۱۲ - به‌طور برداری ثابت کنید که اگر خطی اضلاع BC, CA, AB مثلث ABC را به ترتیب در نقطه‌های D, E, F قطع کند، در این صورت

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = -1$$

- ۱۳ - به‌طور برداری ثابت کنید که نیمسازهای داخلی یک مثلث متقاطعند.
- ۱۴ - محل تلاقی خط‌هایی را پیدا کنید که معادله‌های برداری آنها $\vec{r} = k\vec{i} + 2(1-k)\vec{j}$ و $\vec{r} = 3(1-m)\vec{i} - m\vec{j}$ است. همچنین این خطوط را به‌صورت نمودار رسم کنید، و زاویه میان آنها را بیابید. همچنین مساحت شکل مسدود میان این دو خط و محور x ها را پیدا کنید.

- ۱۵ - اگر A و B دارای بردارهای مکان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشند، و متوازی‌الاضلاع $OACB$ طوری رسم شود که OA و OB اضلاع مجاور یکدیگر باشند، معادله برداری خطی را که از C به موازات قطر AB رسم می‌شود پیدا کنید. تحقیق کنید که اگر این خط امتداد OA را در D قطع کند، در این صورت $\vec{OD} = 2\vec{a}$.

- ۱۶ - $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و E نقطه وسط BC است. AE قطر BD را در نقطه F قطع می‌کند. تعیین کنید که نقطه F خط BD را به چه نسبتی تقسیم می‌کند.
- ۱۷ - ثابت کنید که خط‌هایی که معادله‌های برداری آنها عبارتند از

$$\vec{r} = k\vec{a} + (1-k)\vec{b} \quad \text{و} \quad \vec{r} = 2(1+m)\vec{a} - (1+2m)\vec{b}$$

بر یکدیگر منطبق هستند.

۱۸- بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ اضلاع مجاور یک متوازی السطوح را تشکیل می دهند. معادله های برداری چهار قطر متوازی السطوح را پیدا کنید و نشان دهید که این قطرها متقاربند و یکدیگر را نصف می کنند.

۱۹- اگر بردارهای مکان رئوس یک هرم مثلث القاعده $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_3$ ، $\vec{r}_4$ باشند ثابت کنید که بردار مکان مرکز جرم هرم مثلث القاعده برابر است با

$$\frac{1}{4}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4)$$

۲۰- ثابت کنید که سه خط مستقیم که نقاط وسط یالهای مقابل یک هرم مثلث القاعده را به هم وصل می کنند با هم متقارب هستند و یکدیگر را نصف می کنند.

۲۱- معادله برداری خطی را پیدا کنید که از نقطه هایی می گذرد که مختصات آنها عبارتند از $(1, 2, 3)$ و $(4, -1, 5)$. همچنین معلوم کنید که این خط صفحه (x, y) را در کجا قطع می کند.

۲۲- ثابت کنید که چهار نقطه A, B, C, D هنگامی بر یک راستا واقعند که بردارهای

مکان آنها $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_3$ ، $\vec{r}_4$ چنان است که

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + m_4 \vec{r}_4 = \vec{0} \text{ که در آن } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$$

است. m_1, m_2, m_3, m_4 را در حالت های زیر پیدا کنید: (۱) $ABCD$ متوازی-الاضلاع است. (۲) D نقطه وسط BC است. (۳) D مرکز جرم مثلث ABC است. ثابت کنید که معادله صفحه ای که از نقطه هایی می گذرد که بردارهای مکان آنها

$\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_3$ است می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\vec{r} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + (1 - m_1 - m_2) \vec{r}_3$$

۲۳- بردارهای مکان A, B, C به ترتیب عبارتند از:

$$\vec{r}_A = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{r}_B = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \text{ و } \vec{r}_C = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

پیدا کنید: (۱) معادله خطی را که از A به موازات BC رسم می شود، (۲) معادله صفحه ای که از A و B و مبدأ O می گذرد.

۲۴- اگر

$$\vec{c} = -5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

باشد، بردارهای واحد $\hat{a}$ ، $\hat{b}$ ، $\hat{c}$ را پیدا کنید.

ثابت کنید که اگر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ چنان باشند که

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad \text{باشد در این صورت در حالت کلی } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad \text{برابر}$$

صفر نیست. شرایطی را که باید موجود باشد تا $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ و همچنین

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad \text{هر دو صفر باشند پیدا کنید.}$$

۲۵- اضلاع مجاور مکعبی در راستای محورها Ox ، Oy ، Oz هستند. این مکعب با صفحه قطری آن به دو بخش مساوی تقسیم شده است. بردارهایی را پیدا کنید که پنج وجه یکی از این دو بخش مکعب را نشان دهد، و سپس تحقیق کنید که مجموع برداری آنها صفر است.

۲۶- معادله بردارهایی را بنویسید که چهار وجه یک هرم منتظم را نشان می‌دهند و سپس تحقیق کنید که مجموع برداری آنها صفر است.

۲۷- رئوس A ، B ، C از هرم مثلث القاعده $OABC$ به ترتیب بر محورها Ox ، Oy ، Oz واقعند. به فرض آنکه مجموع بردارهایی که چهار وجه را نشان می‌دهند صفر باشد، مساحت وجه ABC و جهت عمود بر آن را پیدا کنید.

۲۸- تصویر پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ که طول هر ضلع آن a است به طور قائم بر صفحه‌ای افتاده است که از ضلع AB می‌گذرد و با صفحه $ABCDE$ زاویه θ می‌سازد. اگر تصویر مثلث ADB مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، θ را پیدا کنید. نیز مساحت تصویر مثلث BDC را بیابید.

۲۹- مثلث متساوی‌الاضلاعی است که طول هر ضلع آن 6cm است. رئوس این مثلث در ارتفاعهای 7 ، 9 ، 11 سانتیمتر از صفحه‌ای افقی است. ابعاد تصویر مثلث را بر صفحه افقی و زاویه انحراف مثلث متساوی‌الاضلاع را نسبت به افق تعیین کنید.

۳۰- شش وجهی منتظم $ABCDEF$ که طول هر ضلع آن 2cm است به طور قائم بر صفحه‌ای که از ضلع AB می‌گذرد و با صفحه شش وجهی زاویه 30° می‌سازد تصویر شده است. طولهای اضلاع شکل تصویر شده، و همچنین زاویه میان BC و تصویر آن را پیدا کنید.

پاسخها

تمرین ۱۰.۱ (صفحه ۱۷)

۱ - الف) ۱۵؛ ب) ۱۲؛ پ) ۱۳؛ ت) $\sqrt{76}N - ۱۲$

۱۰؛ ث) $\left(-\frac{2}{5}\right) \text{ Arc cos}$ (ج) $\sqrt{58}$ $- ۱۳ - ۱۰/۳N$

۳ - الف) 120° ؛ ب) 60° $- ۱۴ - ۴/\sqrt{3}N$ ، بازویی 90° نسبت به نیروی $4N$.

$Q = \sqrt{3}P - ۴$ $- ۱۶ - \text{Arc tg} \frac{3}{4}$ ، $20N$

۵ - $15N$ ، $9N$ $\text{Arc cos}\left(-\frac{3}{5}\right)$.

۶ - $10gN$ برهم ریخت. $- ۱۷ - 5/\sqrt{2}$ ؛ $3/\sqrt{10}$ و $1/\sqrt{10}N$

۷ - $5\sqrt{3}gN$ برمیخ بالایی؛ $5gN$ برمیخ $\text{Arc cos} \frac{1}{4}$ نسبت به P $- ۱۸ - 1/4$

$- ۱۹ - 8/8N$ ؛ 43° با $3N$

۸ - $\text{Arc cos}\left(\frac{7}{15}\right)$

$- ۲۰ - 353/5N$ ؛ $234/5N$

$10 - 120^\circ$

$- ۲۱ - 8/7$ ؛ $22/0gN$

$- ۱۱ - 4N \text{Arc cos}\left(-\frac{3}{5}\right)$

تمرین ۱۰.۲ (صفحه ۲۸)

۶ - $1/4gN$ و $4/8gN$

۱ - $12gN$ و $16gN$

۷ - الف) $5\sqrt{3}gN$ ؛ ب) $10/\sqrt{3}gN$

۲ - $54gN$ و $72gN$

۸ - $5/5gN$ و $8/1gN$

۳ - $10gN$ و $24gN$

۹ - $M = 3$ ؛ $3/\sqrt{3}gN$

۵ - $6/6gN$ و $7/8gN$

$$۱۰- gN \ ۹/۰۳ \text{ در } AC$$

$$gN \ ۷/۱ \text{ در } BC$$

$$۱۲- (الف) \ ۷/۵ \ gN, \ ۶ \ gN$$

$$(ب) \ ۶۰ \ gN, \ ۳۶ \ gN$$

$$(پ) \ ۱۰۳ \times ۲/۸۹ \ gN$$

$$۲/۵ \times ۱۰۳ \ gN$$

$$۱۳- ۵ \ gN, \ ۵\sqrt{۳} \ gN$$

$$۱۴- \text{زاویه قائمه نسبت به نخ اول}$$

$$۲/۵ \ gN \text{ و } ۲/۵\sqrt{۳} \ gN$$

تمرین ۳.۱۰ (صفحه ۳۸)

$$۱۱- ۱۲/۱۷ \ N, \ ۲۵/۲۵^\circ$$

$$۱۲- ۶/۳ \ N \text{ و زاویه } \left(\frac{۷\sqrt{۳}}{۳} \right) \text{ Arc } tg$$

بانیروی $۲N$

$$۱۳- \sqrt{۲۸۱} \ N \text{ و زاویه } \left(\frac{۱۶}{۵} \right) \text{ Arc } tg$$

با AB

$$۱۴- ۸ \ N \text{ در راستای } GA$$

$$۱۵- ۳۰ \ N, \ ۳۴N$$

$$۱۶- ۱۰ \ N, \ ۵۳^\circ ۸', \ ۱۰ \ N, \ ۳۶^\circ ۵۲'$$

شمال شرقی

$$۱۷- ۲/۹۱ \ N, \ ۲۹۰^\circ ۶'$$

$$۱۸- ۲\sqrt{۲} \ N \text{ به موازات } DB \text{ که از } E$$

می گذرد

$$۱۹- \sqrt{۳} \ N \text{ عمود بر } BC, \ ۷/۵ \ cm \text{ از } B$$

$$۱- ۷/۷ \ N, \ ۲۹^\circ$$

$$۲- ۱۰ \ N \text{ و با زاویه } \left(\frac{۳}{۴} \right) \text{ Arc } tg \text{ نسبت}$$

به نیروی $۴N$

$$۳- ۷ \ N, \text{ میان نیروهای } ۱۳ \text{ و } ۱۰$$

$$\text{نیوتون و با زاویه } \left(\frac{۵\sqrt{۳}}{۱۱} \right) \text{ Arc } tg$$

نسبت به نیروی $۱۰ \ N$

$$۴- ۹/۱۹۸ \ N$$

$$۵- ۶۴/۵ \ N, \ ۱۳^\circ ۵۷' \text{ جنوب غربی}$$

$$۶- ۲۰ \ N \text{ با زاویه } ۶۰^\circ \text{ نسبت به } AB$$

$$۷- ۲۲۸/۸ \ N, \ ۴۹^\circ ۳۹' \text{ جنوب شرقی}$$

$$۸- ۲۳/۹ \ gN \text{ بر } A; \ ۱۰ \ gN \text{ بر } B \text{ و } C$$

$$D \text{ بر } ۱۰\sqrt{۳} \ gN$$

$$۹- F \sqrt{۳}; \text{ Arc } tg(۳-۲\sqrt{۲})$$

$$۱۰- ۱۱۲/۸ \ N, \text{ جنوب شرقی}$$

$$\text{Arc } tg ۳(\sqrt{۲}-۱)$$

تمرین ۴۰.۱۰ (صفحه ۴۳)

۶ - ۱۶ N در خلاف جهت ۵ N.

۱ - ۸ N ؛ ۱۵ N.

۷ - ۳/۷۷ N با زاویه ۱۴۲°.

۲ - ۲۱/۵ ؛ ۲۱/۲.

۹ - ۱/۲ ، ۱/۲√۳ -

۳ - ۳۱/۴ N ؛ ۲۵ N = P.

۴ - ۵۰/۰۷۲۶ gN.

۵ - ۱۳ N ؛ $\text{Arc tg} \left(\frac{12}{5} \right)$ نسبت به BA.

تمرین ۵۰.۱۰ (صفحه ۵۳)

صیقلی است.

۱ - ۸/۹۶ gN ، ۱۰ gN.

۱۶ - الف (۵/۵۳۶ ؛ ب) ۱۷۰/۹ N.

۲ - ۵/۲۵.

۱۷ - $P = W \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}$ ؛

۳ - ۴/۸۵ gN.

۵ - ۱/۸.

۱۸ - $W \cos \beta \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}$

۶ - ۱۰/۳√۳ gN.

۶۰۸ J

۷ - الف (۸/۸ gN ؛ ب) ۱۵/۲ gN.

۸ - ۱/√۳۹.

۱۸ - $\cos \lambda = \frac{PW}{Q\sqrt{P^2 + W^2}}$

۹ - ۲۱۳ gN ، ۱۲ gN.

۱۰ - ۷۳/۵۷ gN.

۱۹ - ۵۲°۳۰' ، ۷°۳۰' و ۷/۵۰ نس

۱۳ - زاویه $\text{Arc tg} \left(\frac{1}{4} \right)$ با سطح شیبدار ؛

به سطح شیبدار.

۵۶ gN

۲۰ - $2R\alpha$ که بر حسب رادیان است.

۲۱ - ۵/۳۵۳۵ ؛ ۱/۰۹۶ gN.

۲۲ - ۱۴/۳۳ gN ، ۱۰ gN.

۱۴ - $\sin \alpha = \sin \beta + \mu \cos \beta$ که در آن μ ضریب اصطکاک و α زاویه شیب سطح

تمرین ۱۰.۱۱ (صفحه ۶۵)

۱ - 110 N ، 14 cm از A ؛ 30 N ،

$51\frac{1}{3}\text{ cm}$ از A و در آن سوی B .

۲ - 21 N ، 24 cm از A ؛ 3 N ، 168 cm

از A و در آن سوی B .

۳ - 4 N ، 24 cm از A بر روی امتداد BA .

۴ - 12 N ، 10 cm از نیروی 8 N .

۵ - 75 N ، 25 N ، نیروی 75 N در يك

متری برآیند.

۱۱ - ۲ واحد؛ قطر BD را در فاصله $\frac{1}{10}$ طول

قطر از مرکز قطع می‌کند.

۱۲ - اگر D بر روی CA و چنان است که

$CD = 2\text{ cm}$ ، برآیند BD را نصف

می‌کند.

تمرین ۲۰.۱۱ (صفحه ۷۱)

۴ - صفر ، 18 N m .

۵ - 3 N m ، 5 N m .

۶ - $21\sqrt{3}\text{ N cm}$ ، $21\sqrt{3}\text{ N cm}$.

۱ - 32 N cm ، 64 N cm ، 16 N cm ،

به ترتیب حول A ، B ، C .

۲ - 180 N cm ، 180 N cm .

۳ - $5\sqrt{3}\text{ N m}$.

تمرین ۳۰.۱۱ (صفحه ۷۵)

۷ - ۵ واحد از ۱۴ متری A در امتداد DA .

۸ - $2/1\text{ m}$ از A .

۹ - $0/6\text{ m}$.

۱۰ - $7/35\text{ gN}$ از C ؛ $4/65\text{ gN}$ از D ؛

$51/5\text{ gN cm}$.

۱۱ - $\frac{9}{34}\text{ m}$ از یکی از دو طرف مرکز.

۱۳ - کمتر از $17/5\text{ cm}$ از هیچ يك از نخها

نیست.

۱۴ - زوجی با گشتاور 37 واحد ، 10 gN و

۱ - 7 gN بر پایه نزدیکتر به 3 kg ؛ 6 gN

بر پایه دیگر.

۲ - 20 gN بر A ؛ 40 gN بردیگری.

۳ - $62/5\text{ gN}$ بر نفر نزدیکتر ؛ $37/5\text{ gN}$

بر نفر دیگر.

۴ - $37/5\text{ kg}$.

۵ - $7\frac{1}{3}\text{ gN}$ بر A ؛ $10\frac{2}{3}\text{ gN}$ بر B .

۶ - $0/865\text{ m}$ از همان انتها که فاصله‌ها

اندازه گیری شده‌اند.

O از ۳/۷ m

$$۱۶ - \frac{4}{3} gN \text{ برپایه دورتر از وزنه } ۲ \text{ kg} ;$$

$$۷\frac{1}{3} gN \text{ برپایه نزدیکتر.}$$

$$۱۷ - ۲۶ gN \text{ و } ۱۴ gN$$

$$۱۸ - ۱۲/۵ \text{ kg}$$

$$۱۹ - p + q$$

$$۲۰ - DB = ۰/۳ \text{ m} , AC = ۰/۶ \text{ m}$$

$$۲۱ - ۱/۷۸ \text{ m} , ۲۰۲ \text{ N}$$

هریک برابر ۶ kg.

$$۲۳ - ۰/۴۶ \text{ m}$$

$$۲۴ - ۶۰^\circ$$

$$۲۵ - ۲۵ gN \text{ در } ۲/۴ \text{ m از انتهای که فاصله ها}$$

از آنجا اندازه گیری می شود؛ ۱۵ gN از

این انتها، ۱۰ gN از انتهای دیگر.

تمرین ۴۰۱۱ (صفحه ۸۷)

$$x = ۷\sqrt{۲} \text{ kg}$$

$$۷ - ۱۴ gN ; \frac{۳}{۱۴} \text{ m از مرکز.}$$

$$۹ - \frac{1}{۲} \text{ cm} ; ۴W_0 = W_0$$

$$۱ - \frac{1}{۸}$$

۳ - فاصله ها را a ، $۲a$ و مانند آنها نشانه.گذاری می کنیم، از M به طرف A ، a فاصله وسط BD از C .۵ - x نباید کمتر از $v \text{ kg}$ باشد،

تمرین ۱۰۱۲ (صفحه ۱۰۳)

$$۹ - \text{تقریباً } ۴/۲ gN = ۵ g \text{tg } ۴۰^\circ$$

$$۱۰/۸ gN \text{ و } ۶۷^\circ ۱۴' \text{ نسبت به افق.}$$

$$۱۰ - \frac{1}{۶} W ; W \sqrt{\frac{۳۷}{۶}} : \text{Arctg}(۶) \text{ بازایه}$$

نسبت به افق.

$$۱۱ - \frac{W\sqrt{۳}}{۳} : ۲W\sqrt{\frac{۳}{۳}} \text{ با زاویه } ۶۰^\circ$$

نسبت به افق.

$$۱ - ۴۵^\circ$$

$$۲ - \text{Arctg}\left(\frac{۳}{۲}\right) ; \frac{1}{۳} \text{ برابر وزن میله}$$

$$\text{و زاویه } \text{Arctg}\left(\frac{۴}{۳}\right) \text{ نسبت به افق.}$$

$$۴ - W \sin ۱۵^\circ : W \cos ۱۵^\circ \text{ بازایه } ۱۵^\circ$$

نسبت به قائم.

$$۸ - \frac{۴}{۸} gN$$

$$۲۱- ۳\frac{1}{8} gN$$

$$۲۲- ۴/۵ gN ، ۲۰/۵ gN$$

$$۲۴- عمود بر AB ؛ $\frac{1}{2}w\sqrt{4-3\sin^2\theta}$$$

$$۲۵- ۵\sqrt{3}N ؛ ۱۰N$$

$$۲۶- ۱۰\sqrt{3} gN بر صفحه 30° ؛ $10 gN$$$

$$بر صفحه 60° ؛ 30° نسبت به افق.$$

$$۱۲- $\frac{W\sqrt{3}}{3}$ ؛ $2W\frac{\sqrt{3}}{3}$$$

$$۱۵- $7\frac{1}{4} gN$$$

$$۱۶- $77/1 gN$ ؛ $163/4 gN$ ، و زاویه$$

$$۶۳^\circ ۳۹'$$

$$۱۸- هریک $0.046m$$$

$$۱۹- $ACB=90^\circ$ ، و B زیر C است.$$

$$کمترین نیرو $= W\sin\alpha$$$

تمرین ۲۰۱۲ (صفحه ۱۱۹)

$$۱- ۲۳ gN ؛ ۳۰/۵ gN ، با زاویه$$

$$\text{Arctg}\left(\frac{25}{56}\right) \text{ نسبت به افق.}$$

$$۲- ۱/۵ gN ؛ تقریباً $9/1 gN$ ، با زاویه$$

$$\text{Arctg}(6) \text{ نسبت به افق.}$$

$$۴- $11/4 gN$$$

$$۶- \frac{1}{8} \text{ طول میله از انتهای که بر صفحه } 30^\circ$$

$$\text{است.}$$

$$۸- $5/25 gN$ ، $7 gN$ ، قائم.$$

$$۹- $R_1 = \frac{67}{56}W$ ؛ $R_2 = \frac{45}{56}W$$$

تمرین ۳۰۱۲ (صفحه ۱۳۳)

به افق بر هریک از مفصلهای بالایی.

$$۱- $\frac{\sqrt{3}}{6}W$ افقی بر پایینترین مفصل؛$$

$$۲- $2W$ در AC ؛ $\frac{W}{2}$ افقی بر B و D.$$

$$۳- کشش در نخ $= 2W$ ؛ عکس العمل در B$$

۱۲- مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل در B یا E عبارتند از:

$$\left(\frac{1}{4\sin 18} - \frac{1}{2}\right)W \text{ و } \frac{W}{4\cos 18}$$

۱۳- $\frac{\sqrt{19}}{2}W$ بر A و D؛ $\frac{\sqrt{7}}{2}W$ بر B و C.

۱۴- 0.05 m برطرف نزدیکتر به B.
مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهای فشاری عبارتند از:

بر A، 0.184 و 1.63 gN

بر B، 0.184 و 1.87 gN

بر C، 0.184 و 0.37 gN

$$15- \frac{W}{\sin \alpha} ; W \cot \alpha$$

$$16- \frac{1}{2}W \left(\tan \alpha + \frac{a}{c \sin^2 \alpha} \right)$$

۱۷- 2 gN ، 2 gN

۲۰- 200 gN افقی و قائم بر D و B.

۲۳- 11.74 gN

۲۴- 0.6 m از B؛ 2.5 gN

۲۵- 2.5 gN افقی.

$$26- \text{Arccos} \left(\frac{M}{2M+m} \right)$$

$$D = \frac{\sqrt{3}}{6}W \text{ افقی.}$$

۴- W ؛ W قائم بر A و C؛ W افقی بر B.

$$5- \frac{3}{4}W$$

۶- مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل در B،

$$\frac{a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)}Mg, \frac{ab(a+b)}{2(a^2 + b^2)}Mg$$

و در C،

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2(a^2 + b^2)}Mg, \frac{ab(a+b)}{2(a^2 + b^2)}Mg$$

و در A،

$$\frac{ab(a+b)}{2(a^2 + b^2)}Mg,$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2(a^2 + b^2)}Mg$$

$$7- \left(2 - \frac{b}{2a}\right)W ; \left(1 + \frac{b}{2a}\right)W$$

$$\frac{c(a+b)}{2a\sqrt{a^2 - c^2}}W$$

۹- $2W$ ؛ مؤلفه‌های افقی و قائم عکس‌العمل

$$\text{در لولا عبارتند از } 2W \text{ و } \frac{5}{3}W$$

تمرین ۴۰.۱۲ (صفحه ۱۴۵)

۴- $6/55$ بازایه $70^\circ 42'$ نسبت به AB بر

ضلع مقابل مربع.

۵- BC را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند.

۱- $a = 0.74$ از A برضلع مقابل B.

۲- بر C.

۳- 0.75 m

الف) ۲ در امتداد BC؛ ب) زوجی با گشتاوری دو برابر ضلع مربع.

۱۱- نیروی ۲۱ واحد از B تا A؛ تقریباً $۵۴/۵$

$$۱۲- \frac{۵\sqrt{۲}}{۴}N ; ۵\sqrt{۲}N$$

۱۴- N ۲ از D تا A

$$۱۵- ۱۳، \sqrt{۱۷۳}$$

۱۶- P ۲ از وسط AD به موازات AB.

$$۶- ۲۴\sqrt{۲}N$$

$$۷- ۳۰N$$

$$۸- ۵۷/۶$$

۹- $P=۳۷/۲$ ، BC را در $\frac{۷}{۹}BC$ از B قطع

می‌کند و با BC زاویه $\left(\frac{\sqrt{۱۵}}{۵}\right)$ Arcctg

می‌سازد.

۱۰- ۱ از C تا D، ۱ از C تا B، ۱ از D تا A

تمرین ۵.۱۲ (صفحه ۱۵۳)

به هم وصل می‌کند؛ شعاع برابر PG است.

$$۱۲- CF=AE$$

۱۶- $N=10\sqrt{۱۰}$ باز زاویه $\left(\frac{۱}{۳}\right)$ Arcctg نسبت به

AB، امتداد AB را در $AB/۳۶$ از A قطع می‌کند.

۲۱- از نقطه وسط AB.

$$۲۲- m=۳-l ; ۱:۲$$

۸- دایره دیگر.

۹- DG که در آن D نقطه وسط AB، G

طوری است که BC را به سه قسمت می‌کند و G به C نزدیکتر است.

۱۰- خطی عمود بر وسط AC و C نقطه وسط AB است.

۱۱- مرکز در G، نقطه وسط خطی است که

نقاط وسط اضلاع متقابل چهار ضلعی را

تمرین ۶.۱۲ (صفحه ۱۶۱)

و در C، نیروی قائم W، نیروی افقی

۲W، زوج W که در آن وزن AB، W=

و طول AB = ۲a.

۶- دو نیروی مساوی $\frac{۱۲P}{۵}$ که يك زوج

$$۱- \frac{۱}{۳}Wa$$

۲- نیروی قائم $۷/۵N$ ؛ زوج $۱۸Nm$.

۵- عکس العمل بر BC در B: نیروی قائم

۲W، نیروی افقی ۲W، زوج $۵Wa$ ؛

۱۰- kb به موازات AD ، $\frac{3}{4}a$ از A ؛ زوج

kab .

تشکیل می‌دهند.

$$k = -4 - 8$$

تمرین ۲۰۱۲ (صفحه ۱۷۲)

افقی مربع؛ $23/11$ واحد در خلاف جهت عقربه‌های ساعت.

۱۲- $6N$ در راستای CO ؛ $90/9 Ncm$.

۱۳- 10 ، $5\sqrt{2}$ ، $5\sqrt{2}N$.

۱۴- $4\frac{\sqrt{5}}{5}N$ در راستای BC ،

$16\frac{\sqrt{5}}{15}N$ در راستای AC ،

$8\frac{\sqrt{5}}{15}N$ در راستای AB .

۱۵- $6N$ از نقطه وسط BC به طرف داخل؛

$8N$ از نقطه وسط AC به طرف خارج.

۱۷- الف) $\sqrt{10}N$ با زاویه $\text{Arc tg}(3)$ با

$6Nm$ در خلاف جهت عقربه‌های

ساعت. ب) $\sqrt{160}N$ بر B ؛ $\sqrt{90}N$

بر C .

۲۰- $1/59 Nm$.

$$5x + 13y - 17a = 0 \quad ; \quad \sqrt{194} \quad 22$$

۲۴- $2P$ ، عمود بر BD در فاصله $\frac{1}{2}BD$

از D .

$$1 - \frac{3}{4} : 5$$

۲- $\frac{\sqrt{3}}{4}a$ ؛ که در آن a طول ضلع ش

ضلعی است؛ 6 واحد موازی با نیروی 5 واحد.

۳- F ، زاویه $\left(5\sqrt{5} - \frac{9}{8}\right)$ با Arc tg

AB ؛ $3/17$ از AB در آن سوی A ،

و $27/5$ از BC در آن سوی C .

$$5 - \frac{G}{a\sqrt{3}} = \text{که در آن } G^2 \text{ برابر است با}$$

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - G_1G_2 - G_2G_3 - G_3G_1 - G_1G_2$$

$$6 - N - xY + yX = 0$$

۷- 50 ؛ $0/047m$ بر امتداد BA ،

$0/094m$ میان A و D .

$$8 - 1N : \sqrt{3}x - y - \sqrt{3}a = 0$$

۱۰- $\sqrt{74}N$ با زاویه $\left(-\frac{7}{5}\right)$ با Arc tg

نسبت به AB ؛ 36 واحد در خلاف

جهت عقربه‌های ساعت.

۱۱- $19/55$ واحد با زاویه $1^\circ 36'$ با اضلاع

تمرین ۸.۱۲ (صفحه ۱۷۹)

$$۱۰۰gN : ۱۶\frac{۲}{۳}gN - ۵$$

$$۱۴/۹۳gN - ۶$$

$$۳۴/۸\pi N : ۵۸/۸\pi N - ۷$$

$$۲۰\pi - \pi^2 J, ۲۰\pi - ۸$$

$$۱۲۰/۷gN - ۱$$

$$\frac{۴۰}{۳} + ۱۰\sqrt{۳}N, \frac{۴۰}{۳} + ۶\sqrt{۳}N - ۲$$

$$\frac{۲۲۰}{۳} - ۱۶\sqrt{۳}N \text{ به ترتیب در } A,$$

$$C \text{ و } B$$

$$۲۰gN - ۴$$

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل
(صفحه ۱۸۱)

$$CB ۲۸۰gN, CD ۱۶۸gN: \text{ستون}$$

$$kab : A \text{ از } \frac{۳}{۲}a, AD \text{ به موازات } kb - ۲۲$$

$$(P-Q)\sin\alpha, (P+Q)\cos\alpha - ۲۳$$

$$\sqrt{۲} - ۲۴$$

$$\frac{\Delta M}{۱۲a} - ۲۵$$

$$۱/۲\sqrt{۳}m : AB \text{ موازی } - ۲۶$$

$$BA \text{ موازی } ۱N : ۱/۲\sqrt{۳}Nm$$

$$۱۰a \text{ در جهت } DCBA : ۳\sqrt{۲} \text{ از } C \text{ به } A - ۲۷$$

$$۱۰\sqrt{۴-\sqrt{۳}}N \text{ با زاویه } - ۲۸$$

$$\text{Arc tg } \frac{(۲-\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}}$$

$$نسبت به BA : ۱۰Nm$$

$$(۴\cos ۳۶^\circ - ۱)(۶\cos ۳۶^\circ + ۱) - ۲۹$$

$$۱۸a\sqrt{۳} : -۸\sqrt{۳}, ۴ - ۳۰$$

$$۳\sqrt{۳}, ۶ - ۱$$

$$P\sin(\pi-\theta), P\cos(\pi-\theta) - ۳$$

$$\text{Arc tg}\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}\right) - ۷$$

$$\text{Arc tg}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}-۱}\right) : \frac{\sqrt{۳}-۱}{۲} - ۸$$

$$۴ : ۳ - ۱۱$$

$$\frac{w}{۲\sqrt{۳}} - ۱۲$$

$$W + w\left(1 - \frac{d}{fb}\right) : W + \frac{wd}{fb} - ۱۳$$

$$\frac{\Delta W}{\pi} \frac{\pi}{۲\cos\frac{\Delta}{\delta}} - ۱۴$$

$$\frac{۳}{۲}W, \frac{۱}{۲}W - ۱۷$$

$$۵۵۳gN - ۱۸$$

$$AC ۲۲۴gN, DA ۱۱۷gN : قید - ۱۹$$

تمرین ۱۰۱۳ (صفحه ۱۹۸)

- ۹ - $m = ۶/۳$ از انتهای نزدیکتر به ۴ kg ؛
 $۸/۲ \text{ gN}$ بر انتهای نزدیکتر به ۴ kg ،
 و $۱۳/۸ \text{ gN}$ بر انتهای دیگر.
 ۱۰ - $m = ۵/۴۶$

۱۱ - $۱۰۵/۶۲۵ \text{ gN}$ ؛ $A = ۴۴/۳۷۵ \text{ gN}$ بر B ؛
 بر تکیه گاه نزدیکتر به B .

۱۳ - $۲/۸ \text{ gN}$ ، $۵/۵ \text{ gN}$ ، $۲/۵ \text{ gN}$ ؛
 $۳/۹ \text{ gN}$

۱۴ - $۶/۲ \text{ N}$ با زاویه ۷۶° با AB ،
 AB را میان A و B در جایی قط

می کند که $\frac{۶}{۷} \text{ cm}$ از A فاصله داشته باشد

۱۵ - $۵/۹ \text{ N}$ با زاویه ۱۳° با نیروی ۳ N

۱ - میان نیروهای ۵ و ۴ نیوتون؛ $m = ۰/۰۸$ از آخری.

۲ - $۹/۷ \times ۱۰^۳ \text{ gN}$ در سمت چپ ؛
 $۹/۳ \times ۱۰^۳ \text{ gN}$ در سمت دیگر.

۳ - میان نیروهای ۷ و ۴ N ، $m = ۰/۲۴$ از آخری.

۴ - $m = ۱/۰۸$ از انتها.

۵ - $۷/۲ \text{ gN}$ از انتهایی که مبنای اندازه گیری فاصله هاست ، $۷/۸ \text{ gN}$ از انتهای دیگر.

۶ - $۱۰/۵ \text{ gN}$ و $۸/۵ \text{ gN}$

۷ - $۲/۶۶ \text{ m}$ از نیروی ۲ N .

۸ - $۴/۸ \text{ m}$ از نخستین و زنه ۱۰ Mg .

تمرین ۲۰۱۳ (صفحه ۲۱۱)

۷ - AB و DC ؛ $-۰/۳۸$ ؛ AD و BC ؛
 $-۰/۷۶$ ؛ BD ؛ $+۰/۶۶$.

۸ - AB و AD ؛ $+۱۸/۷۵$ ؛ BC و CD ؛
 $+۲۵$ ؛ AE ؛ $-۲۲/۵$ ؛ BE و ED ؛
 $-۳۱/۲۵$.

۹ - AB ؛ -۱۵ ؛ BC ؛ -۹ ؛ CD ؛
 $-۵/۵$ ؛ AC ؛ $+۹/۲۵ \text{ N}$ ؛
 -۱۰ ؛ BD ؛ $+۱۰$ ؛ BC و AD ؛ $-۸/۳$ ؛
 $-۵/۵$ ؛ CD و AB .

۱۱ - YC و YD ؛ $-۱/۷۳$ ؛ AD و BC ؛
 $-۱/۵$ ؛ XD و XC ؛ $+۰/۸۶$ ؛

۱ - $N = ۱۴/۵$ ؛ BC و CD ؛ $+۱۲/۲$ ؛
 AB و AD ؛ $+۸/۴۵$.

۲ - $gN = ۹۰$ ؛ ۶۴ gN با زاویه $۳۶'$ ؛
 با DB .

۴ - AB ؛ $-w$ ؛ BC ؛ $-w$ ؛ CD ؛
 EA ؛ $-۰/۳۸ w$ ؛ DE ؛ $-۰/۶۲ w$ ؛
 BD ؛ $+۰/۶۲ w$ ؛ BE ؛ $-۰/۶۲ w$ ؛
 $+۰/۶۲ w$.

۵ - $gN = ۲/۱۹$ ؛ $۴/۸ \text{ gN}$.

۶ - $N = ۲۵$ ؛ $P = ۴۳/۳$ ؛ AB ؛ AC ؛
 -۵۰ ؛ BC ؛ $+۸۶/۵$.

$$\begin{aligned} & AC : +22/3, AB : -60, OB -19 \\ & : -14/2, BC : -20, BD : +30 \\ & DE : +10, CE : +14/2, CD \\ & .66/9 = A \text{ در عکس العمل} \\ & : -20, AB : -40, AF -20 \\ & FE : +28/3, BF : +20, BC \\ & : +10, CD : +14/1, CE : -20 \\ & .-20, CF : -14/1, ED \\ & \text{۲۱- عکس العمل در} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & : +56/5, AC : 126 = A \\ & CD : +80, AD : -120, BC \\ & DE : -40, CE : -56/5 \\ & EF : +20, DF : +28/2 \\ & .-28/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & : +1/12W, AC : -0/5W, AB -22 \\ & CD : -1/12W, EB : +W, BC \\ & .-1/4W, EC : +3/3W \\ & TD : 1/10, TC : 1/03, TB -23 \\ & .1/4, TE : 1/25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & BD : +2/3, BC : -4/62, AC -24 \\ & .-4, CD : +5/63 \\ & BG : +18, BF : +18, AB -25 \\ & CG : -18, FG : -11/3 \\ & .+15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & : +0/66, AD : \text{صفر}, BG \text{ و } AF -26 \\ & FE : +0/66, DE : -0/94, DF \\ & FG : +0/37, ED : -0/37 \\ & CG : +0/34, EC : -0/5 \\ & .+0/34, BC : -0/47 \end{aligned}$$

$$27- \text{عکس العمل در } 0/6, A \text{ در } 0/72, B$$

$$AB : -1/15, XB : XA \\ .-0/86$$

$$\begin{aligned} & 12- \text{هر نیرو} = 10, DE, CD, BC, AB : 10 \\ & : +20, AC \text{ و } CE : -11/55 \\ & .+5/77, AE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 13- 21/21 \text{ در هر ریسمان حامل} : 17/32 \\ & \text{در } AB \text{ و } AC : 6/34 \text{ در } BC. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 14- EC : -320, AD : +358, AE \\ & : +134, CD : +223, ED : +134 \\ & : +268, CF : -150 \\ & : -145, DB : +324, FB : +56 \\ & \text{عکس العملها, } 160 \text{ در } A, 290 \text{ در } B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 15- \text{عکس العملها, } 27/7 \text{ در } A, 22/3 \text{ در } B \\ & : -7/7, AD : -28/3, AC : B \\ & BD : -20, AB : +20, CD \\ & BE : +17/3, DE : +3/6 \\ & .+17/3, EF : -20, BF : -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 16- \text{عکس العملها, } 27/5 \text{ در } A, 22/5 \text{ در } B \\ & CD : -48, AF : +55, AC : B \\ & : -25, DF : +30, CF : +25 \\ & EB : +20, EF : +25, DE \\ & .-39/0, FB : +45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 17- \text{عکس العمل در } 22/4 = D \text{ در } 20 = A \\ & : 14, BC : +14, BD : -20, AB \\ & .+10, DC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & : +34/5, BD : +11/5, AB -18 \\ & : +23/0, DF : +11/5, DE \\ & : -11/5, EF : +11/5, CD \\ & CD : -23, AC : -11/5, CE \\ & .-11/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{CF} : +10, \text{EB} : +4, \text{BF} : +10, \\ & \text{AE} : +14/26, \text{AC} : -30, \text{CD} : +15/7, \text{ED} : -11/83, \\ & \text{CE} : -16/01, \text{BC} : -3/53. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{AC} : -1/1, \text{AD} : +1/32, \text{EC} : -5/20, \text{CD} : -1, \text{DE} : +0/5, \text{BC} : -5/20, \\ & \text{EB} : +0/5, \text{CE} : -2, \text{EF} : \text{صفر}, \text{AD} : +14, \text{DE} : -12/1, \text{AE} : +10, \text{DC} : -1/1. \end{aligned}$$

تمرین ۱۰۱۴ (صفحه ۲۳۳)

$$\begin{aligned} & ۱۲- \text{صفر}, \frac{1}{6}W, \text{اصطکاک هم بر دیوار و هم بر زمین به حالت حد است.} \\ & ۱۳- \frac{\sqrt{3}}{6}W, 50gN, \\ & ۱۵- \text{سیزدهمین پله.} \end{aligned}$$

$$\text{Arctg}\left(\frac{3}{2}\right) - ۱$$

$$۳ - \frac{2}{5} \text{ وزن نردبان.}$$

$$۱۱ - \frac{1}{3}gN.$$

تمرین ۲۰۱۴ (صفحه ۲۳۹)

$$۱۱- \sqrt{2} \frac{a}{b}, \mu < \frac{1}{2} \frac{w}{W}$$

$$۱۲- \frac{2}{3}, \frac{a}{2}$$

$$۲ - \text{Arctg}\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$۴ - \mu < \frac{a}{2h}$$

۹- (الف) بالغزش؛ (ب) بایک بر شدن.

تمرین ۳۰۱۴ (صفحه ۲۴۳)

$$\frac{W(3\cos^2\alpha + 1)}{4\cos\alpha}, \text{C در}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4}, \text{A در}$$

$$۱ - \frac{30}{59} ; \text{میله بلندتر می لغزد.}$$

$$۲ - \frac{1}{2}$$

$$۴ - \text{در A}, \frac{W(3 + \cos^2\alpha)}{4\cos\alpha}$$

تمرین ۴۰۱۴ (صفحه ۲۴۷)

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1}{V} - ۲ \\ & \frac{m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(M+m)(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)} - ۸ \\ & \cdot P = \frac{W}{\sqrt{r-1}} - ۱۷ \text{ نه.} \\ & \cdot \mu = \frac{1}{3\mu' + 4} - ۱۸ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} - ۱ \\ & \cdot P = W\sqrt{\mu^2 - n^2} - ۲ \\ & \cdot \text{Arc tg } \frac{n}{\sqrt{\mu^2 - n^2}} \\ & \frac{W_1}{W} = \frac{\mu}{\cotg 2\theta - \mu} - ۶ \end{aligned}$$

تمرین ۱۰۱۵ (صفحه ۲۶۲)

اختلاف برابر نیروی محرك
است، ۲۵ gN

$$\begin{aligned} & ۳۲/۸۷۵ \text{ gN} - ۱ \\ & ۰۹/۵ \text{ gN} - ۲ \\ & ۱۰۰ \text{ gN}, ۵۰ \text{ gN}, ۲۵ \text{ gN}, ۲۵ \text{ gN} - ۴ \end{aligned}$$

تمرین ۲۰۱۵ (صفحه ۲۷۱)

$$\begin{aligned} & ۵۰ \text{ gN} - ۳ \\ & ۰۱۶ \frac{2}{3} \text{ gN} : ۵۰ - ۴ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ۰۱۰ \text{ gN} - ۱ \\ & ۰۷/۵ \text{ gN} - ۲ \end{aligned}$$

تمرین ۳۰۱۵ (صفحه ۲۷۳)

$$\begin{aligned} & ۰۶۷۲ \text{ N} - ۶ \\ & ۰۷ \text{ gN} - ۷ \\ & ۰۱۲۹ \text{ gN}, ۰۱۲۹ \text{ gN} - ۸ \\ & ۰۵۰/۸ \text{ gN} - ۹ \\ & \frac{P}{Q} = \frac{1}{2} - ۱۰ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ۱ - \text{چهار نخ؛ ۲ واحد.} \\ & ۳ - \text{واحد، ۶.} \\ & ۰۲۴ \text{ N} : ۵ - ۳ \\ & ۳۸/۵۹ - ۴ \text{ واحد، } ۳۱/۷۴ \text{ درصد، } ۸۵/۴ \\ & \text{درصد، } ۴۰/۸۲ \text{ درصد.} \\ & W = ۱۵P + ۱۱W - ۵ \end{aligned}$$

- ۱۷- $4000\pi \text{ N}$
 ۱۸- $1/88 \text{ cm}$
 ۱۹- $0.0/10$
 ۲۰- $\frac{b}{4an} ; \frac{Wb}{4a}$
 ۲۱- $196 \text{ gN}, 40 \text{ gN}$
 ۲۲- $864 \text{ N} ; Pc = \frac{1}{2} W (a-b)$
 ۱۱- $187/5 \text{ N}$
 ۱۲- $0/68$
 ۱۳- طرفی که به محور 30 cm پیچیده می شود.
 ۱۴- $\frac{9}{8} W$
 ۱۵- $\frac{1}{11}$
 ۱۶- $0.0/23$

تمرین ۱۰۱۶ (صفحه ۲۸۳)

- ۱- $3/1 \text{ cm}$
 ۲- $2/5 \text{ m}$
 ۳- $2/828 \text{ cm}$ از BC ؛ $1/3 \text{ cm}$ از AD
 ۴- $4 \text{ cm} ; 5/6 \text{ cm}$
 ۵- $\frac{\sqrt{171}}{2} \text{ cm}$
 ۶- تقریباً $21/9 \text{ cm}$
 ۷- $2\frac{2}{3} \text{ m}$
 ۸- نصف طول يك ضلع برخطی که جرمهای 15 kg و 3 kg را به هم متصل می کند.
 ۹- 4 cm ، به طرف جرم 5 kg برخطی که این جرم را به جرم 2 kg متصل می کند.
 ۱۰- $3/15 \text{ cm}$
 ۱۱- $3 \text{ m} ; 8/4 \text{ m}$
 ۱۲- 3 m

تمرین ۲۰۱۶ (صفحه ۲۹۳)

- ۱- $9/3 \text{ cm}$
 ۲- $6/35 \text{ cm}$ بر روی قطری که از سوراخ می گذرد.
 ۳- $\frac{3\sqrt{2}}{17} \text{ cm}$ از مرکز بر روی قطری که خط واصل میان مرکزهای سوراخها را نصف می کند.
 ۴- $3\frac{1}{9} \text{ cm} , 6\frac{2}{3} \text{ cm}$
 ۵- $6\frac{2}{7} \text{ cm} , 5\frac{2}{7} \text{ cm}$

۷ - بر روی AC در $6/07 \text{ cm}$ از A.

$$9 - \text{Arc tg}\left(\frac{16}{33}\right)$$

$$11 - \frac{16}{45} \text{ طول میانه آن.}$$

$$12 - 46/4 \text{ cm}$$

$$13 - 15/05 \text{ cm}, 15/07 \text{ cm}$$

$$15 - 72 \text{ cm}$$

$$18 - 55 \frac{\sqrt{3}}{18} \text{ cm}$$

$$20 - 2/0 \text{ cm}$$

$$21 - 3/12 \text{ m}$$

۲۲ - در هر حالت بر روی خطی که رأس را به

مرکز ثقل قاعده متصل می کند و در $\frac{1}{4}$

طول این خط از بالا.

$$24 - 26 \frac{\sqrt{2}}{9} \text{ cm} \text{ بر روی میانه ضلع } 8 \text{ cm}$$

از بالا.

$$28 - 13 \text{ به } 54.$$

$$31 - \text{Arc tg}\left[\frac{3}{10}(\delta + \sqrt{\delta})\right]$$

۳۳ - اگر لبه های خارجی را به عنوان محور

بپذیریم در نقطه ای به مختصات $(2, 3)$.

$$34 - \frac{185}{376} \text{ يك لبه.}$$

$$35 - \frac{11}{56} \sqrt{\frac{2}{3}} a \text{ از قاعده.}$$

$$36 - \frac{3a^2 + 3ac + c^2}{3(2a + c)}; \frac{1}{3} b \frac{3a + c}{2a + c}$$

۳۷ - در $3/15 \text{ m}$ از سرآزاد الوار اولی، و

در سطح بالایی الوار دوم.

$$38 - 5/52 a \text{ از بالا.}$$

$$39 - \frac{2mca^2}{Mb^2} \text{ در فاصله از محور.}$$

$$m \cdot \frac{b^2(a-b)}{2a^2c}$$

تمرین ۳۰۱۶ (صفحه ۳۰۰)

$$4 - 2/69, 5/50$$

$$6 - \frac{5}{3} \text{ cm} \text{ از هر قطر.}$$

$$3 - \frac{(a^2 + ab + b^2)\sqrt{[4c^2 - (b-a)^2]}}{6c(a+b)}$$

از DA؛

$$\frac{2ac^2 + 2bc^2 - a^3 + b^3}{6c(a+b)} \text{ از محور دیگر.}$$

تمرین ۴۰۱۶ (صفحه ۳۰۹)

۷ - با BC یا DE در تماس با صفحه؛ با BD

یا EC در تماس با آن اگر DE بالای

BC باشد.

۱۰ - بلای.

۱۱ - کمتر از ۳ به ۱ نباشد.

۱۲ - ۱/۵۹

۱۳ - $\frac{c}{\gamma}(n-1)$ از مرکز پایمترین مکعب ودر ارتفاع قائم $\frac{na}{\gamma}$.۱۴ - $r\sqrt{3}$.۱۵ - $53/9 \text{ cm}$ ؛ 29° .۲ - 24 cm از C.

$$3 - \frac{(a^2 + ab + b^2)V[4c^2 - (b-a)^2]}{6c(a+b)}$$

از DA؛

$$\text{از محور دیگر} \frac{4ac^2 + 2bc^2 - a^3 + b^3}{6c(a+b)}$$

$$5 - \frac{1}{\gamma}(3 - \sqrt{5})$$

$$6 - \frac{a(2a+x)}{2(a+x)} \text{ و } \frac{a^2+ax+x^2}{2(a+x)} \text{ ، که}$$

در آن $x = AE$ است و AE کمتر از

$$a(\sqrt{3}-1)$$
 نیست.

تمرین ۵۰۱۶ (صفحه ۳۲۱)

$$2 - \sqrt{2} \text{ به } 1$$

$$11 - \text{در } \frac{a}{2\pi - 2\sqrt{3}} \text{ از مرکز.}$$

$$12 - \frac{1}{\gamma} W \tan \alpha$$

۱۳ - 749 kg ، $6/7 \text{ m}$ از پایین تیر.

$$14 - (\pi^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$16 - \text{Arc sin}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$7 - \frac{3a}{2\pi} \text{ از مرکز در امتداد شعاع میانی، } a$$

شعاع قرص است.

$$9 - \frac{13}{14}r$$

$$10 - \text{Arc sin}\left(\frac{3}{4}\pi \sin \theta\right)$$

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل
(صفحه ۳۲۳)

$$OC, \text{ ستون } \frac{w}{2\sqrt{3}} ;$$

$$OD, \text{ ستون } \frac{1}{2}w ;$$

$$OE, \text{ فشار } \frac{2w}{\sqrt{3}} .$$

$$12- \text{ نیروهای کششی در میله‌ها } \frac{W}{\sqrt{3}} ,$$

$$W(\sqrt{3}+1), W(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$CD, BC, \text{ فشار } \frac{W(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} = \text{فشار در فشار.}$$

$$13- AE, AD, \text{ فشار } \frac{P}{\sqrt{2}} ; BE, BD,$$

$$\text{فشار } \frac{3P}{\sqrt{2}} ; CE, CD, \text{ نیروی فشاری}$$

$$CB ; P/\sqrt{5}, \text{ نیروی فشاری } 2P .$$

$$14- 16^\circ 6' : BC (\text{فشاری}) 8/3 \text{ gN},$$

$$CA (\text{کششی}) 11/1 \text{ gN}, AB (\text{کششی}) 33/3 \text{ gN} .$$

$$15- DE, 10 : EC, 8/7 ; DC, 10 :$$

$$EF, 15 : CB, 15 ; EB, 0 :$$

$$BA, 30 : FA, 30 ; FB, 26/0 :$$

$$\text{بر حسب gN} .$$

$$16- 6, 8, 2\sqrt{3}, \text{ کششی } \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ فشار},$$

$$1 - \frac{1}{4}\sqrt{3} ;$$

$$4 - \mu W ;$$

$$5 - \frac{W}{2\mu \sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} ;$$

$$7 - \frac{W}{2\mu \sin \alpha (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)} ; \frac{(W-w)(1+\mu)}{\sqrt{2}\mu} ; \frac{(W-w)(1-\mu)}{\sqrt{2}\mu} ;$$

$$8- AB, 35 \text{ gN} = \text{فشار} ;$$

$$BC, 88 \text{ gN} = \text{فشار} ;$$

$$CA, 173 \text{ gN} = \text{کشش} ;$$

$$CD, 135 \text{ gN} = \text{فشار} ;$$

$$\text{نیرو در } A = 153 \text{ gN} ;$$

$$\text{در } 60^\circ \text{ نسبت به AD} .$$

$$9- A(\sqrt{3}), B(\sqrt{2}), AD(\text{کشش}) 2\sqrt{3} ;$$

$$CD(\text{فشار}) 4, AC(\text{فشار}) 2, BC$$

$$AB(\text{کشش}) 1 .$$

$$10- AB, CD, \text{ فشار } 10\sqrt{3} ;$$

$$BC, DA, \text{ کشش } 20\sqrt{3} ;$$

$$AC, \text{ فشار } = 40 .$$

$$11- \text{کشش در نخ } = \frac{w}{\sqrt{3}} ;$$

$$OA, \text{ ستون } \frac{2w}{\sqrt{3}} ;$$

$$OB, \text{ فشار } = \frac{1}{2}w ;$$

$$\cdot \text{Arc tg} \frac{24}{13} - 27$$

$$\cdot 15/9 \text{ N} - 32$$

$$\cdot 0/86 : 3/45 : 4 - 34$$

$$\cdot \frac{[W + (2^n - 1)w]}{2^n}$$

$$\cdot \frac{4W}{\Delta(W+w)} : \frac{1}{4}(W+w) - 35$$

$$\cdot \frac{49}{50\pi} , \frac{49}{51\pi} , \frac{49}{54\pi} : 68 \text{ N} - 36$$

$$\frac{y}{\sqrt{3}} \text{ فشار}$$

$$\cdot 2 \text{Arc sin} \left(\frac{1}{3} \right) - 17$$

$$\frac{\pi ab^2 \sqrt{r}}{2(2a^2 - 3\pi b^2)} \text{ بر AC ، به فاصله}$$

از O

$$\left(\frac{47}{28} , \frac{153}{28} \right) , \left(\frac{7}{4} , \frac{19}{4} \right) - 19$$

$$\cdot \text{Arc tg} \left(\frac{4}{3\pi} \right) - 20$$

$$\cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{2a + 2b} - 24$$

تمرین ۱۰۱۷ (صفحه ۳۵۴)

$$\cdot 16 - 2 \text{ به ۱}$$

$$\cdot AB \text{ واحد در } 60^\circ \text{ نسبت به } AB$$

$$\cdot AB^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - 2$$

$$\cdot -5\vec{i} + 25\vec{j} , 3\vec{i} + 4\vec{j} \text{ (الف)}$$

$$\cdot 22\vec{i} - 40\vec{j}$$

$$\cdot \frac{2\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{13}} \text{ (ب)} , -16 , 7 \text{ (ب)}$$

$$\cdot \frac{-2\vec{i} + 5\vec{j}}{\sqrt{29}} , \frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{5}$$

$$\cdot 4\vec{i} + 3\vec{j} - 4$$

$$\cdot -\frac{4}{y} , \text{Arc tg}(y) - 14$$

$$\cdot \vec{r} = (1+m)\vec{a} + (1-m)\vec{b} - 15$$

$$\vec{r} = (1+3m)\vec{i} + (2-3m)\vec{j} - 21$$

$$+ (3+2m)\vec{k} :$$

$$\cdot \left(-3\frac{1}{y} , 6\frac{1}{y} \right)$$

$$(2-4m)\vec{i} + (m-1)\vec{j} \text{ (الف)}$$

$$+ (3+2m)\vec{k}$$

$$(2m_1 + 3m_2)\vec{i} \text{ (ب)}$$

$$+ (2m_2 - m_1)\vec{j}$$

$$+ (3m_1 - 4m_2)\vec{k}$$

۳۷۷ / (۳۳۰۶)

$$\cdot 0/27a^2, 55^\circ 45' - 28$$

$$\cdot 21^\circ 29', 2\sqrt{5} \text{ cm}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 29$$

$$\cdot 25^\circ 38', \frac{1}{2}\sqrt{12} \text{ cm}, 2 - 30$$

$$a=b=c, \frac{2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{14}} - 24$$

$$: \frac{1}{2}(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)^{\frac{1}{2}} - 24$$

$$\cdot bc : ca : ab$$

فهرست موضوعی

اثر چرخانندگی = گشتاور ۶۷

استاتیک ۷

اصل اساسی استاتیک ۷۹ ، قضیه اساسی

استاتیک ۹ ، مبنای استاتیک ۸.

اصطکاک ۱۲، ۱۳، ۴۴، ۲۲۱.

اصطکاک حدی ۴۵ ، زاویه اصطکاک ۴۶،

ضریب اصطکاک ۴۵ ، قوانین اصطکاک

۴۵ ، مخروط اصطکاک ۴۷ ، نیروی

اصطکاک ۴۴.

اصل کار ۲۵۴

اندازه پایداری = درجه پایداری ۳۰۴

اهرم ۷۹

اصل اهرم ۷۹

بردار ۸

برابری بردارها ۳۳۵ ، جبر برداری ۳۳۵،

جمع برداری ۸، ۳۳۵ ، کمیت برداری

۳۳۴ ، معادله برداری یک خط ۳۴۶،

مؤلفه‌های بردار ۱۶، ۳۴۲.

بردار سطحی ۳۵۰

بو، نشانه گذاری ۱۹۲، ۲۰۲

پیچ ۲۷۱

پیچ دیفرانسیل ۲۷۲

ترازو ۸۰

تعادل ۳۰۴

تعادل چند نیرو ۴۱، ۱۰۹، ۱۱۰،

تعادل چند نیروی هم‌صنحه ۱۶۴، ۱۶۶،

تعادل دو زوج ۱۵۸ ، تعادل سه نیرو

۲۰، تعادل جسم صلب تحت اثر سه نیرو

۹۰، تعادل جسم صلب تحت اثر بیش از

سه نیرو ۱۰۷، تعادل نقطه مادی بر سطح

شیبدار ناصاف ۴۷ ، تعادل نقطه مادی

بر سطح افقی ناصاف و تحت اثر نیروی

بازده ۲۵۵

برایند ۹، ۲۱، ۴۶، ۱۴۸

برایند دو نیرو که باهم زاویه می‌سازند،

۱۰، برایند دو نیرو که برهم عمودند

۱۱، برایند دو نیروی متوازی ۱۱،

۵۸، ۶۰، برایند چند نیرو ۳۳، برایند

چند نیروی هم‌صنحه ۱۳۹، ۱۶۳، ۱۸۹،

برایند چند نیروی متوازی ۱۹۲، برایند

خارجی ۴۸، تعادل نقطه مادی بر سطح
شیدار ناصاف و تحت اثر نیروی خارجی ۵۰
تکیه‌گاه ۷۹
توزین به روش بوردا ۸۳
توزین مضاعف ۸۳
جرخ و محور ۲۶۷
جرخ و محور دیفرانسیل ۲۶۸
داربست ۲۰۰
درجه پایداری ۳۰۴
دینامیک ۸
زوج نیرو ۶۱
کار یک زوج نیرو ۱۷۸، گشتاور زوج
۷۱، ترکیب زوجها ۱۵۵
ستون ۲۰۰
شبه مرکز ۲۸۳
عکس العمل قائم ۱۳
عکس العمل کل ۴۶
قانون جمع برداری ۸
قانون تبدیلی پذیری ۳۳۶
قانون شرکت پذیری ۳۳۸
قانون ماشین ۲۵۶
قانونهای نیوتون درباره حرکت ۹
قانون هوک ۱۳

قپان ۸۴
قرقره‌ها، دستگاه ۲۵۷، ۲۶۰، ۲۶۳
قرقره دیفرانسیل و ستون ۲۶۶
قضیه لامی ۲۱
قضیه وارینیون ۶۸
قید ۲۰۰
کش اضافی ۲۷۰
کش نخ ۱۳
کمیت اسکالر ۳۳۴
کمیت برداری ۳۳۴
گشتاور نیرو ۶۷
نمایش ترسیمی گشتاور ۶۸، مجموع
جبری گشتاورهای دو نیرو ۶۸، ۶۹
۷۰، اصل گشتاورها ۷۱، گشتاور زوج ۷۱
ماشین ساده ۲۵۳
متوازی الاضلاع نیروها ۳۲، ۱۹۱
مرکز ثقل ۶۲، ۲۷۷
مرکز ثقل چهار ضلعی ۲۹۸، مرکز ثقل
چهار وجهی ۲۷۸، مرکز ثقل صفحه
سه‌موی ۳۱۹، مرکز ثقل سطح عرقچین
۳۱۹، مرکز ثقل قطاع دایره ۳۱۳، مرکز
ثقل قطعه دایره ۳۱۵، مرکز ثقل قوس
مدور یک‌کنواخت ۳۱۲، مرکز ثقل
متوازی الاضلاع ۶۳، مرکز ثقل مثلث
۶۴، مرکز ثقل سه میله به شکل مثلث
۲۷۷، مرکز ثقل مخروط تسویر ۲۷۹،
مرکز ثقل سطح جانبی مخروط ۲۸۰

مرکز ثقل منطقه‌ای میان دو صفحه
متوازی ۳۱۸، مرکز ثقل میلۀ باریک ۶۳،
مرکز ثقل نیمکره توپر یکنواخت ۳۱۶،
مرکز ثقل نیمکره توخالی نازک ۳۱۷.

مرکز جرم ۶۲، ۲۸۲

مرکز نیروهای متوازی ۶۲

میزیت مکانیکی ۲۵۴

مؤلفه ۹، ۳۴۲

مؤلفه افقی ۱۶، مؤلفه قائم ۱۶

میلۀهای مفصل‌دار ۱۲۰

نقطه مادی ۷

نیرو ۷

اثر یک نیرو باریک نقطه مادی ۱۹، اثر
سه نیرو باریک نقطه مادی ۲۰، اثر بیش
از سه نیرو باریک نقطه مادی ۳۲، اجزای
تفکیکی نیرو ۱۶، تجزیه یک نیرو ۱۵،
چند ضلعی رابط ۱۹۱، چند ضلعی نیروها
۳۲، ۱۹۱، متوازی الاضلاع نیروها ۸،
مثلث نیروها ۲۰، نیروی محرك ۲۵۳،

نیروی مقاوم ۲۵۳

نیوتون ۷

وزن ۶۲

نخ سبک ۱۳

نسبت سرعتها ۲۵۴