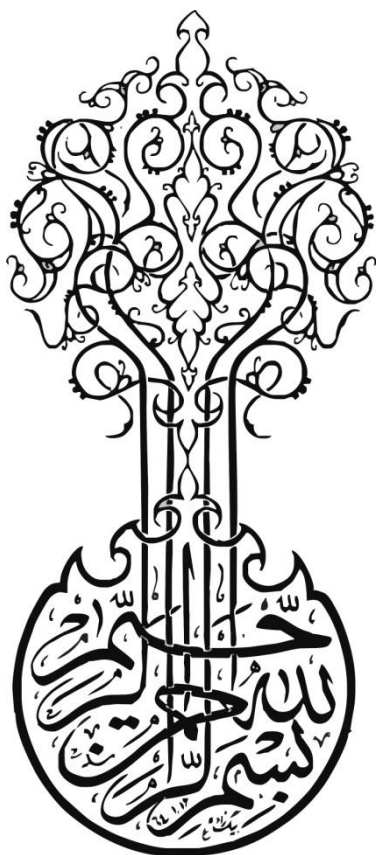






آنالیز تانسوری و کاربردهای آن در مکانیک

مؤلفان

لئونید پی. لبدف

مایکل جی. کلود

ویکتور ای. ارمیف

مترجمان

دکتر علیرضا نقی پور

دکتر محمد مرادی

سرشناسه:	لبدیف، ل. پ، ۱۹۴۶-م.
عنوان و نام پدیدآور:	Lebedev, L. P. آنالیز تانسوری و کاربرد آن در مکانیک/ تألیف ال. پی. لبدوف، ام. ج. کلود، وی. ا. ارمیف؛ ترجمه علیرضا نقی پور، محمد مرادی.
مشخصات نشر:	شهرکرد، دانشگاه شهرکرد، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری:	۴۰۰ ص. مصور، جدول، نمودار؛ ۱۷×۲۴ س. م.
شابک:	۹۷۸۹۶۴۷۶۶۵۸۷۲
وضعیت فهرست نویسی:	فپا.
یاداشت:	عنوان اصلی: Tensor Analysis with Applications in Mechanics, 2010.
یاداشت:	واژه نامه.
یاداشت:	کتاب نامه.
موضوع:	حساب تانسورها.
شناسنامه افزوده:	کلود، مایکل ج.
شناسنامه افزوده:	Cloud, Michael J.
شناسنامه افزوده:	ارمیف، ویکتور آ.
شناسنامه افزوده:	Eremeyev, Victor A.
شناسنامه افزوده:	نقی پور، علیرضا، ۱۳۵۳ - مترجم.
شناسنامه افزوده:	مرادی، محمد، ۱۳۴۶ - مترجم.
شناسنامه افزوده:	دانشگاه شهرکرد.
رده بندی کنگره:	۱۳۹۲ / ۲۸ / ۲۸۴۳۳ QA
رده بندی دیویی:	۵۱۶/۸۳
شماره کتابشناسی ملی:	۳۴۱۹۱۹۴



دانشگاه شهردر انتشارات دانشگاه شهرکرد

نام کتاب:	آنالیز تانسوری و کاربرد آن در مکانیک
مؤلف:	لئونید پی. لبدوف، مایکل جی. کلود و ویکتور ا. ارمیف
مترجمان:	علیرضا نقی پور و محمد مرادی
ویراستار علمی:	
ویراستار ادبی:	
ناشر:	دانشگاه شهرکرد
چاپ اول :	۱۳۹۳
تیراژ :	۱۰۰۰ نسخه
قطع:	وزیری
چاپ:	جهان بین
صحافی:	تک
قیمت:	
شابک:	۹۷۸۹۶۴۷۶۶۵۸۷۲

کلیه حقوق این اثر برای مؤلفین و دانشگاه شهرکرد محفوظ است.
نشانی: چهارمحال و بختیاری- شهرکرد- بلوار رهبر- انتشارات دانشگاه شهرکرد- صندوق پستی ۱۱۵.

پیش‌گفتار مترجمان

اکثر کتب دوره کارشناسی رشته ریاضی به بررسی مباحث نظری، مباحثی مجرد با قضایای کسل‌کننده و ملال‌آور پرداخته و دانشجو متوجه اهداف پشت سر این مباحث نمی‌شود. انگیزه‌ی اصلی ترجمه این کتاب، فایق آمدن بر این مشکلات است. در زمینه آنالیز تانسوری و کاربرد آن در مکانیک کتابی به زبان فارسی وجود ندارد. لذا تصمیم گرفتیم که این ترجمه را در اختیار مخاطبان فارسی زبان قرار دهیم. کتاب حاضر که ویرایش دوم است، بی‌اغراق یکی از معدود کتاب‌ها در این زمینه است. این اثر که تنها پیش‌نیاز آن حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبر خطی بوده، می‌تواند مورد استفاده دانشجویان رشته‌های ریاضی و فیزیک و همچنین رشته‌های فنی و مهندسی قرار گیرد.

علیرضا نقی‌پور

عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه شهرکرد

محمد مرادی

عضو هیات علمی گروه فیزیک دانشگاه شهرکرد

دیباچه

هر علمی به طرز استانداردهای از ابزارهایی برای تشریح موضوعات مورد مطالعه خود استفاده می‌کند. در مکانیک کلاسیک به طور گسترده‌ای از کمیات برداری: نیرو، گشتاور، مکان، سرعت، اندازه حرکت استفاده می‌شود. با محدود کردن خود به چارچوب مختصات منفرد، می‌توان بردار را همانند یک ماتریس ستونی ثابت در نظر گرفت. اما ویژگی بارز کمیت برداری واقعی بودن آن است؛ یعنی بردار به انتخاب چارچوب مختصات وابسته نیست. این بدان معنا است که به محض تعیین مولفه‌های نیرو در یک چارچوب خاصی، می‌توان مولفه‌های چنین نیرویی را در هر چارچوب دیگری با استفاده از قواعد تبدیل مناسب به‌دست آورد.

اما کمیات برداری به تنهایی برای تشریح محیط‌های پیوسته کافی نیستند. تنش و کشش در هر نقطه درون جسم نیز کمیاتی واقعی هستند؛ گرچه مشخصه هر کدام از آنها به چارچوبی که اجزای ماتریس مربعی دارد، وابسته است. با تغییر چارچوب، این اجزا بر اساس قواعدی متفاوت از قواعد تبدیل بردارها، تبدیل می‌شوند. تانسورهای تنش و کشش مثال‌هایی از تانسورهای مرتبه دوم هستند. قصد داریم دیگر کمیات واقعی که در علم مکانیک پیوستگی ظاهر می‌شوند را بیان کنیم. دستگاه مدول‌های کشسانی به قانون هوک مربوط به تانسور مرتبه چهارم وابسته است؛ به گونه‌ای که این مدول‌ها هنوز هم از دیگر دستگاه‌های قواعد تبدیل پیروی می‌کنند. با وجود تفاوت‌های بسیار بین قوانین تبدیل برای انواع مختلف کمیت‌های واقعی، تمام آنها در الگویی یکپارچه به نام قضیه تانسورها قرار می‌گیرند.

قضیه تانسور نه تنها از اشغال بسیار حافظه ما جلوگیری به عمل می‌آورد بلکه ما را قادر می‌سازد تا عملیات دیفرانسیلی را به سادگی انجام دهیم. این همان حالت دستگاه‌های مختصات منحنی الخط است. آنالیز تانسوری به دلیل سادگی و اختصار بیش از حد بدست آمده، وضعیتی از زبان کلی که می‌تواند در امتداد سطوح مختلف علم فیزیک پیوستگی بیان شود را ارائه می‌دهد. درک کاملی از این زبان برای فعالیت در الکترومغناطیس، نظریه نسبیت یا دیگر حوزه های نظری غیر واقعی ضروری است. بیشتر کتاب‌های جدید مربوط به موضوعات فیزیکی همواره پیوسته‌هایی در زمینه بردارها و تانسورهای مختلف و مطرح شده در متن کتاب را شامل می‌شوند. هنگام بررسی گام‌های پیشرفت شاید اینها کافی به نظر برسد اما می‌توان شک افراد را به عنوان چگونگی حقایق مستدل، یا دلیل قاطع یعنی چگونگی تطبیق آنها با دیگر روش‌ها بر طرف کرد. به عبارت دیگر رفتار جامع تانسورها (مثلاً، انحراف کامل در جبر چند خطی را شامل می‌شود) که برای دانشجویان و مهندسين تجربی کار الزامی است، به طور وسیعی می‌تواند نامناسب باشد.

بنابراین برای رفتار نظریه تانسوری نیاز است که تعادلی دوستانه بین موضوع و افراد تجربی کار برقرار گردد. نویسندگان کتاب پیش روی این موضوعات را با نمایش‌های ساده، شفاف و بسیار کامل در نظر گرفته اند. تمام فرمول‌های مورد نیاز برای تشریح موضوعات در فضای سه بعدی به طور عملی با متنی مختصر توضیح داده می‌شود. به رویدادهای علم فیزیک در هنگام مفید بودن اشاره می‌شود اما تفسیر با حفظ استقلال کامل از حوزه کاربردی آنها به امکان پذیرترین شنوندگان ارجاع داده می‌شود. فصل مربوط به خواص منحنی‌ها و سطوح، مقدمه مختصری درباره مطالعه این خواص که می‌تواند به عنوان گسترش حاوی اطلاعات آموزنده و طبیعی از نظریه تانسور را بررسی کند، شامل می‌شود.

ای. ای. ورویچ

پروفسور با سابقه مکانیک و ریاضیات دانشگاه دولتی راستوف، روسیه

عضو فرهنگستان علوم روسیه

(۲۰۰۱-۱۹۲۰)

پیش‌گفتار

چاپ اول این کتاب برای دانشجویان، مهندسين و فزيكدان‌هايي كه از روش‌هاي تانسوري بهره مي‌گيرند، نوشته شده است. ماده را در وضعيت بسيار كلي براي حالت فضاى Π بعدى نشان داده نشده اما اين موضوع تا اندازه‌اي براي حالت سه بعدى بيان شده است (كه به سادگي به Π بعدى قابل تعميم است)؛ بنابراين مي‌توان فرض كرد كه پيش زمينه مورد نياز تنها شامل حسابان استاندارد و جبر خطي است.

تصميم گرفتيم كه كتاب را در مسير طبيعي خود با اضافه كردن دو فصل درباره کاربردهايي براي آناليز تانسوري كه ابزار اصلي هستند، توسعه دهيم. يك فصل درباره كشساني خطي است و فصل ديگر به نظريه پوسته و سطوح مي‌پردازد. انحراف‌هاي كامل از معادلات مربوطه در اين نظريات را نشان داده، مسايل مقدار مرزي را فرمول بندي كرده و مساله غير يكتايي جواب‌ها، اصل وردشي لاگرانژ و برخي مسايل مربوط به ارتعاشات را تفسير كرديم. قيود فضايي ما را در نشان دادن كل موضوع در مكانيك محدود كرد؛ يعني مجبور شديم تا معادلاتي از كشساني را انتخاب كنيم كه نقش آناليز تانسوري براي آنها بسيار تعيين كننده‌تر است.

بايستي به طبيعت اصلي تانسورها در كشساني و نظريه پوسته توجه مي‌كرديم. البته براي حل مساله واقعي مهندسي بايد چيزهايي را به شكل مولفه‌اي نوشت؛ يعني گاهي اوقات چند صفحه‌اي را سياه كرد. فرمول‌هاي مطابق با نمادگذاري تانسوري بسيار ساده هستند كه به ما اجازه مي‌دهد تا ايده‌هاي اساسي را به چنگ آورده و مهارت‌هاي نسبتاً ساده‌اي را ارايه دهيم. از آنجايي كه نمايش تانسوري به سرعت و بدون دردسر به نمايش

روش مولفه‌ای تبدیل می‌شود، این تکنیک برای نمایش نظریات پیوستگی برای دانشجویان ایده‌آل است.

در پنج فصل اول به جز برخی دستگاه‌های مساله جدید و تابع‌های تانسوری اصلی مورد نیاز برای فصل‌های کشسانی تغییرات زیادی دیده نمی‌شود. مسایلی در انتهای فصل اضافه شده، زیرا تمرین‌های جامع برای درک صحیح متن لازم است.

در چاپ اول از عبارت ردیف به جای مرتبه استفاده کردیم. این موضوع در نوشته‌ای قدیمی‌تر رایج بود. در نوشته‌های جدید، عبارت "ردیف" اغلب با معنای متفاوتی بیان می‌شود.

از آنجایی که کتاب خود را به طور گسترده‌ای پوشش می‌دهد، هیچ تلاشی برای تهیه لیست مرجع جامع انجام نمی‌دهیم. تنها کتاب‌های واقعی که با پوشش موضوع مشابه در گسترش آسان یادگیری یا اینکه برای خواننده مفیدتر به نظر می‌رسد، آورده‌ایم.

از تشویق و حمایت‌های آقای تجان کوانگ وی و پراستار ورد ساینیتفیک بسیار سپاسگزاریم.

ال. پی. لبدوف

گروه ریاضی دانشگاه ملی کلمبیا، کلمبیا

ام. ج. کلود

گروه مهندسی الکترونیک و رایانه

دانشگاه تکنولوژی لاورنس، آمریکا

وی. ا. ارمیف

مرکز علمی جنوب فرهنگستان علوم روسیه

و

گروه ریاضی، مکانیک و علوم رایانه دانشگاه فدرال جنوبی، روسیه

پیش‌گفتار چاپ اول

در اصل هر بردار به صورت پیکانی با طول واقعی که می‌تواند نشان دهنده نیروی وارد بر هر نقطه مادی باشد، در نظر گرفته می‌شد. پس از گذشت چندین سال، این نقطه نظر ساده لوحانه به تفسیر پیشرفته‌ای از مفهوم بردار و گسترش آن به تانسورها منجر شد. این باعث شد تا استفاده از بردارها و تانسورها که به تشریح صحیح خواص و رفتارهای واقعی اشیا طبیعی حقیقی می‌پردازت، به وجود آید: مفاهیمی که به دستگاه‌های مختصاتی تعریف شده بستگی ندارند. این عدم وابستگی به آن معنا است که اگر چنین خواصی را با استفاده از یک دستگاه مختصات تعریف کنیم، در این صورت می‌توان در دستگاه دیگر این مشخصات دوباره را با استفاده از قواعد تبدیلی معتبر محاسبه کرد. اغلب به آسانی می‌توان هر مساله مورد نظر قابل حلی را به دستگاه مختصات به کار گرفته شده، وابسته کرد. پس در کاربردها باید دستگاه‌های مختصات مختلفی به کار گرفته شود، معادلات متناظری حل شوند و چگونگی دوباره حل کردن نتایج در دستگاه‌های دیگر را درک کرد. این کتاب ابزار موردنیاز برای چنین محاسباتی را فراهم می‌کند. بیشتر قوانین فیزیک وقتی به شکل مختصاتی نوشته می‌شوند، بسیار سخت به نظر می‌رسند اما وقتی به شکل تانسوری بیان می‌شوند، شکلی جمع و جور و جذاب به خود می‌گیرند. این قبیل شکل‌های جمع و جور به آسانی در ذهن باقی می‌ماند و می‌تواند در حالت‌های پیچیده از مسایل مقدار مرزی فیزیکی استفاده شود. این که به سرعت توانایی فرمول‌بندی حالت‌های مسایل مقدار مرزی تنها به صورت مهارت اساسی برای تجربی کاران در نظر گرفته شود، امکان پذیر است. به علاوه نرم افزار رایانه‌ای به نقطه‌ای که تنها داده‌های ورودی مورد نیاز به صورت حالت مختصات آزاد مساله مقدار مرزی شوند،

به آرامی پیشرفت می‌کنند؛ یعنی احتمالا استفاده کننده قادر خواهد بود تا فرآیند حل را در چارچوب واقعی و توسط روش واقعی آغاز کند (تحلیلی، عددی یا ترکیب این دو) یا به آسانی در باره الگوریتم رایانه ای برای انتخاب بهترین چارچوب و روش سوال کند. در این حالت، بردارها و تانسورها اجزا مهم زبان اصلی برای نرم افزارهای نسل جدید در مهندسی و ریاضیات کاربردی می‌شوند.

دوست داریم از بخش ویراستاری سایننتفیک ورد به ویژه آقای تجان کوانگ وی و خانم سوک- چنگ لیم به جهت همکاری در به وجود آمدن این کتاب سپاسگزاری کنیم. پروفیسور بایرون سی دراکمن از دانشگاه دولتی میشیگان توضیحاتی را در مراحل اولیه دست‌نویس ارائه دادند. در نهایت ناتاشا لبدووا و بث لانون-کلود که به خاطر شکیبایی و حمایتشان شایستگی سپاسگزاری را دارند.

ال. پی. لبدوف

گروه مکانیک و ریاضیات دانشگاه

دولتی روستوف، روسیه

و

گروه ریاضی دانشگاه ملی کلمبیا، کلمبیا

ام. ج. کلود

گروه مهندسی الکترونیک و رایانه

دانشگاه تکنولوژی لاورنس، آمریکا

فهرست مطالب

فصل ۱: پیش نیازها	۱
۱-۱ بررسی مجدد مفهوم بردار	۱
۲-۱ نگاه اولیه به تانسور	۲
۳-۱ پیش زمینه فرضی	۴
۴-۱ مطالبی بیشتر درمورد مفهوم بردار	۶
۵-۱ مسایل	۸
فصل ۲: تبدیل ها و بردارها	۱۱
۱-۲ تغییر پایه	۱۱
۲-۲ پایه های دوگان	۱۲
۳-۲ تبدیل به دستگاه متقابل	۱۷
۴-۲ تبدیل بین دستگاه های کلی	۱۹
۵-۲ مولفه های پایا و پادپایا	۲۲
۶-۲ حاصلضرب خارجی برحسب نماد اندیسی	۲۳
۷-۲ نرم های فضای بردارها	۲۶
۸-۲ ملاحظات پایانی	۲۹
۹-۲ مسایل	۳۰
فصل ۳: تانسورها	۳۳
۱-۳ کمیت های دوتایی و تانسورها	۳۳
۲-۳ تانسورها از منظر عملگر	۳۵
۳-۳ مولفه های دوتایی تحت تبدیل	۳۹
۴-۳ عملگرهای دوتایی دیگر	۴۲
۵-۳ خواص تانسورهای مرتبه دو	۴۶
۶-۳ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تانسور مرتبه دوم متقارن	۵۰
۷-۳ قضیه کیلی - هامیلتون	۵۵
۸-۳ خواص دیگر تانسورهای مرتبه دوم	۵۷
۹-۳ تعمیم ایده جفت	۶۴

ب آنالیز تانسوری و کاربردهای آن در مکانیک

۱۰-۳	تانسورهای مرتبه چهارم و بالاتر.....	۶۶
۱۱-۳	تابع‌های شناسه‌های تانسوری.....	۶۹
۱۲-۳	نرمه‌های مربوط به تانسورها و برخی فضاها.....	۷۵
۱۳-۳	مشتق توابع تانسوری.....	۸۱
۱۴-۳	مسائل.....	۸۹
۹۷	فصل ۴: میدان‌های تانسوری.....	
۱-۴	میدان‌های برداری.....	۹۷
۲-۴	مشتقات و عملگر نابلا.....	۱۰۸
۳-۴	مشتق‌گیری تابع برداری.....	۱۱۳
۴-۴	مشتقات بردارهای چارچوب.....	۱۱۴
۵-۴	ضرایب کریستوفل و ویژگی‌های آنها.....	۱۱۵
۶-۴	مشتق‌گیری هم‌وردا.....	۱۲۰
۷-۴	مشتقات هم‌وردای تانسور مرتبه دوم.....	۱۲۲
۸-۴	عملیات مشتق‌گیری.....	۱۲۴
۹-۴	دستگاه‌های مختصات متعامد.....	۱۳۰
۱۰-۴	برخی فرمول‌های انتگرال.....	۱۳۴
۱۱-۴	مسائل.....	۱۳۷
۱۴۳	فصل ۵: مقدمات هندسه دیفرانسیل.....	
۱-۵	واقعیت‌های مقدماتی از نظریه خم‌ها.....	۱۴۴
۲-۵	تاب یک خم.....	۱۵۱
۳-۵	معادلات سره-فرنه.....	۱۵۵
۴-۵	عناصر نظریه سطوح.....	۱۵۷
۵-۵	دومین شکل اساسی سطح.....	۱۷۰
۶-۵	فرمول‌های مشتق.....	۱۷۶
۷-۵	نمایش ضمنی خم، برخورد خم‌ها.....	۱۸۰
۸-۵	سه‌موی بوسان.....	۱۸۷

۱۸۹.....	۵- ۹ خمیدگی‌های اصلی سطح
۱۹۴.....	۵-۱۰ سطوح دوران
۱۹۶.....	۵-۱۱ معادلات طبیعی خم
۱۹۹.....	۵-۱۲ سخنی در باب دقت
۲۰۲.....	۵-۱۳ نتیجه‌گیری
۲۰۲.....	۵-۱۴ مسایل
۲۰۷.....	فصل ۶: کشسانی خطی
۲۰۸.....	۶-۱ تانسور تنش
۲۱۸.....	۶-۲ تانسور کشش
۲۲۱.....	۶-۳ معادله حرکت
۲۲۲.....	۶-۴ قانون هوک
۲۲۹.....	۶-۵ معادلات تعادل برای جابه‌جایی‌ها
۲۳۱.....	۶-۶ شرایط مرزی و مسایل مقدار مرزی
۲۳۲.....	۶-۷ معادلات تعادل تنش
۲۳۴.....	۶-۸ یکتایی جواب مسایل مقدار مرزی کشسانی
۲۳۶.....	۶-۹ قضیه تقابل بتی
۲۳۸.....	۶-۱۰ اصل کمینه انرژی کل
۲۴۷.....	۶-۱۱ روش ریتز
۲۵۳.....	۶-۱۲ اصل وردشی ریلی
۲۶۰.....	۶-۱۳ امواج تخت
۲۶۳.....	۶-۱۴ مسایل کشسانی تخت
۲۶۵.....	۶-۱۵ مسایل
۲۷۱.....	فصل ۷: پوسته‌هایی با کشسانی خطی
۲۷۳.....	۷-۱ برخی فرمول‌های مربوط به نظریه سطح
۲۷۷.....	۷-۲ سینماتیک در همسایگی Σ
۲۸۰.....	۷-۳ معادلات تعادل پوسته

۴-۷	تغییر شکل پوسته و کششها؛ فرضیات کرششف	۲۸۶
۵-۷	انرژی پوسته	۲۹۵
۶-۷	شرایط مرزی	۲۹۷
۷-۷	تذکراتی در باره نظریه کرششف- لاو	۳۰۱
۸-۷	نظریه سطح	۳۰۳
۹-۷	در خصوص نظریه‌های غیر کلاسیک صفحه و پوسته	۳۱۹
	پیوست: فرمول‌ها	۳۳۳
	منابع	۳۶۱
	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۳۶۵
	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۳۶۹
	نمایه	۳۷۳

فصل ۱: پیش نیازها

۱-۱ بررسی مجدد مفهوم بردار

مفهوم بردار یکی از مفیدترین ایده‌ها در تمام ریاضیات است و جای تعجب نیست که حین تدریس به‌طور مکرر با آن روبه‌رو می‌شویم. دانشجویان در ریاضیات مقدماتی، بردارها را به‌شکل مولفه‌ای در نظر می‌گیرند، به‌عنوان مثال کمیت زیر

$$\mathbf{x} = (2, 1, 3).$$

اما اجازه دهید تا این حالت را با دقت بیشتری بررسی کنیم. آیا مولفه‌های 3, 1, 2 بردار $\mathbf{x}$ را معین می‌کنند؟ در صورتی که بردارهای پایه دستگاه مختصات مشخص باشند، مطمئناً می‌توان مولفه‌های 3, 1, 2 را به‌عنوان بردار $\mathbf{x}$ مشخص کرد. در ریاضیات مقدماتی چنین بردارهایی، دو به دو متعامد و یک‌فرض می‌شوند؛ حتی اگر به‌علت دوران چنین دستگاهی نتوان آنها را به‌طور کامل بیان کرد. در تشریح بیشتر پدیده‌های رایج، کمیات برداری را که دارای اندازه و جهت معینی هستند، مانند نیروها، مورد بررسی قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال وقتی روبه‌روی تلویزیون نشسته‌اید از طرف بدنتان نیروی به‌صندلی وارد می‌شود. این نیرو به دستگاه مختصات مربوط به شخصی که کتاب درسی مربوط به بردارها در چین یا روسیه می‌نویسد، بستگی ندارد. از آنجایی که بردار $\mathbf{f}$ نمایش‌گر یک نیروی جزیی تقریباً واقعی است. پس باید بتوانیم آن را به‌شکلی بنویسیم که تنها به جزییات دستگاه مختصات وابسته باشد. ساده‌ترین روش، عبارت

است از ترکیب صریح بردارهای دستگاه $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) با نمادگذاری زیر: اگر $\mathbf{x}$ یک بردار باشد، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i. \quad (1-1)$$

پس اگر خواسته باشیم دستگاه را تغییر دهیم، باید به‌گونه‌ای این عمل را انجام دهیم که مقدار $\mathbf{x}$ ثابت باقی بماند. البته این بدین معنا است که نمی‌توان فقط بردارهای دستگاه $\mathbf{e}_i$ را تغییر داد؛ باید مولفه‌های متناظر x_i را تغییر داد. بنابراین مولفه‌های بردار $\mathbf{x}$ در دستگاه جدید از مولفه‌های آن در دستگاه قدیم مستقل نمی‌باشد.

۱-۲ نگاه اولیه به تانسور

در مورد چگونگی کار با بردارهایی که دستگاه مختصات متفاوتی دارند، در ادامه، بحث می‌شود. متذکر می‌شویم که اجسام در علم مکانیک از طبیعت دیگری برخوردارند. به‌عنوان مثال، تانسوری به‌نام اینرسی وجود دارد. این یک مشخصه واقعی از یک جسم جامد است که چگونگی چرخش جسم را وقتی که نیروی گشتاوری بر روی آن وارد می‌شود، تعیین می‌کند. اگر جسم در دستگاه دکارتی در نظر گرفته شود، تانسور اینرسی توسط ماتریس 3×3 توصیف می‌شود. اگر دستگاه را تغییر بدهیم، عناصر ماتریسی بر اساس قوانین مشخصی تغییر می‌کنند. در کتابهای درسی مکانیک، خواننده می‌تواند بحث مفصلی را بر چگونگی تغییر عناصر ماتریسی برای حفظ مشخصه‌های عینی یکسان جسم وقتی که دستگاه جدید نیز دکارتی است، مشاهده کنند. اگر چه تانسور اینرسی واقعی است (یعنی، مستقل از دستگاه است)، ولی بردار نیست و تانسور اینرسی به رده‌ای دیگری از موضوعات ریاضی متعلق است. بسیاری از چنین *تانسورهای مرتبه دوم*، از مکانیک پیوسته ناشی می‌شوند: تانسورهای فشار، کشش و غیره خصوصیات خاصی از جسم را در هر نقطه مشخص می‌کنند. دوباره مولفه‌هایشان باید به طریقی تغییر کنند که خود تانسورها به دستگاه بستگی نداشته باشند. معنی دقیق کلمه مرتبه در ادامه توضیح داده می‌شود.

برای بردارها و تانسورها می‌توانیم عملیات‌های متفاوتی معرفی کنیم، البته معرفی هر عملیات جدید باید در مسیری که نتایج آن با مورد‌های خاص شناخته شده مطابقت داشته باشد، انجام شود. اگر مثلاً ضرب نقطه‌ای تانسور را به‌وسیله بردار ارایه دهیم، آن‌گاه در هر دستگاه دکارتی، باید عملیات به ضرب ماتریس توسط یک بردار ستونی خلاصه شود. به‌طور مشابه، ضرب دو تانسور باید به‌گونه‌ای تعریف شود که در هر دستگاه دکارتی این عملیات ضرب ماتریسی را نیز شامل شود. به همین منظور دو جفت از بردارها را در نظر می‌گیریم. این مقادیر به‌شکل

$$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$$

هستند. هر تانسور را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\mathbf{x} = \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

در اینجا a_{ij} مولفه‌های تانسور هستند. این‌را با معادله (۱-۱) مقایسه کرده و به همسانی نمادها توجه کنید.

کمیت $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ که حاصل ضرب تانسوری بردارهای $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}_j$ نام دارد گاهی وقت‌ها با $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ نمایش داده می‌شود. این نماد (بدون علامت $\otimes$)، به‌عنوان مثال بر این تأکید دارد که $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ یک عنصر واقعی متعلق به مجموعه تانسورهای مرتبه دوم است، در صورتی که $\mathbf{e}_1$ یک عنصر واقعی متعلق به مجموعه بردارها است. به‌هر حال باید توجه داشت که $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$ دو شیئی متفاوت هستند. عبارت "حاصل ضرب تانسوری" بر این دلالت دارد که این عملگر در خواصی معین دارای اشتراک‌هایی با حاصل‌ضربی که از جبر مقدماتی می‌دانیم، است. این مطلب را در فصل ۳ مورد بحث قرار می‌دهیم.

اجسام طبیعی می‌توانند دارای مشخصه‌هایی باشند که توسط تانسورهای مرتبه بالاتر تعریف می‌شوند. برای مثال، خواص انعطاف پذیری هر جسم توسط تانسور مرتبه چهارم توصیف می‌شود (یعنی، تانسوری که بخش‌های مقدماتی آن به‌شکل $\mathbf{abcd}$ است، که هست که $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ بردار هستند). این بدین معنا است که خواص جسم توسط جدولی که شامل $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ است، ارایه می‌شود. اگر دستگاه را تغییر دهیم، عناصر مطابق با قوانین معینی تغییر می‌کند.

تانسورها در الکترودینامیک نیز وجود دارند. نظریه کلی نسبیت و بسیاری علوم دیگر، که اجسام جایگزین شده یا توزیع شده در فضا را بررسی می‌کنند.

۱-۳ پیش زمینه فرضی

در ادامه فرض می‌شود که با حاصل ضرب نقطه‌ای و خارجی و بیان آن‌ها در دستگاه دکارتی آشنا هستید. یادآوری می‌کنیم که اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار باشند، آن‌گاه با استفاده از تعریف داریم:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

که $|\mathbf{a}|$ و $|\mathbf{b}|$ اندازه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و θ زاویه (کوچکتر) بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است. از این به بعد از نماد برای بردارهای پایه مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. در هر دستگاه دکارتی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را می‌توان بر حسب بردارای پایه $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + b_3 \mathbf{i}_3$$

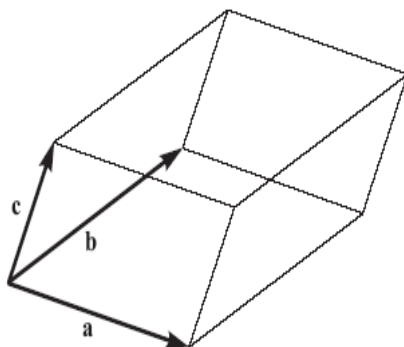
داریم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

همچنین یادآور می‌شویم که

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

از همان ابتدای بحث، ضرب نقطه‌ای نقش مهمی را ایفا خواهد کرد. ضرب خارجی در صورت نیاز مورد استفاده قرار می‌گیرد و در بخش ۲-۶ به طور مفصل خواهد آمد.



شکل ۱-۱ معنی هندسی ضرب عددی سه گانه

برای سه بردار معین $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ می توان حاصل ضرب عددی سه گانه را به صورت زیر نشان داد.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

این مقدار برابر است با حجم متوازی السطوحی که $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ سه یال مجاور آن می باشند. با استفاده از عبارت های بالا برحسب مولفه های قائم داریم،

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

ضرب عددی سه گانه با چرخش مجاز بردارها دارای خاصیت تعویض پذیری است:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}).$$

تمرین ۱-۱ شرط $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$ بیان کننده چه چیزی در مورد $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ است؟ (در پیوست (ب) صفحه ... برای این و بقیه تمرین ها راهنمایی هایی آمده است).

تاکنون بردارها را در یک فضای سه بعدی در نظر گرفتیم و این روش را در سراسر کتاب ادامه خواهیم داد. اغلب امکان دارد (و گاهی وقت ها مفید است) که بردارها در فضای کلی تر $n > 3$ بعدی مورد بررسی قرار گیرد، یعنی،

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + \dots + a_n \mathbf{i}_n.$$

این موضوع قابل استنباط است که بیشتر (نه همه) اصول و روش‌هایی که آموخته‌ایم را بتوان به فضای چند بعدی تعمیم داد. همچنین، می‌توان بیشتر مفاهیم سه بعدی را به صورت دو بعدی در نظر گرفت. خواننده با صرف وقت می‌تواند فرمول‌های سه بعدی را به مشابه دو بعدی آن‌ها کاهش دهد، تا چگونگی تایید متقابل آن‌ها را درک کند.

۱-۴ مطالبی بیشتر در مورد مفهوم بردار

قبل از خاتمه این فصل می‌توان مفهوم بردار را همانند یک "پاره خط مستقیم" یا کمیتی با "اندازه و جهت" بیان کرد. این تعریف‌ها را می‌توان در ریاضیات مقدماتی و کتاب‌های درسی فیزیک جستجو کرد. گرچه می‌توان به حالت‌هایی اشاره کرد که کمیت مورد نظر دارای اندازه و جهت است ولی بردار نمی‌باشد. جریان الکتریکی کل که در سیم جریان دارد مثالی از این نوع است: برای تشریح جریان باید سرعت الکترون‌ها، جهت‌گیری سیم و نحوه حرکت الکترون‌ها در امتداد سیم را مشخص کرد. اگر دو سیم در یک صفحه بوده و حامل جریان‌های عمود بر هم باشند، نمی‌توان اثرهای فیزیکی آن‌ها را با جایگزین کردن سیم سوم که نسبت به دو سیم اول زاویه 45° می‌سازند، دو برابر ساخت. جریان الکتریکی را نمی‌توان به عنوان یک کمیت برداری در نظر گرفت زیرا طبق قاعده جمع بردارها، هم ترکیب نمی‌شوند.

مساله دیگر در مورد فضای اقلیدسی n -بعدی است. گاهی وقت‌ها این فضا به صورت مجموعه‌ای از نقاط که هر یک توسط n پارامتر مشخص می‌شود، تعریف می‌کنیم. اما در نظر گرفتن هر فهرست از n چیز به عنوان بردار غیر قابل قبول است. یک خیاط ممکن است اندازه‌گیری‌هایی از مشتری خود انجام دهد و فهرستی از طول و عرض و غیره را تهیه کند و مجموعه چنین فهرست‌هایی طبق "تعریف" بالا، فضایی n -بعدی است. اما در $\mathbb{R}^n$ هر دو نقطه توسط برداری که مولفه‌هایش برابر تفاضل مختصات متناظر دو نقطه است، به هم وصل می‌شوند. در مثال خیاط، این مفهوم کاملاً بی‌معنی است. برای اینکه به اشتباه این موضوع پی ببریم، در فضای $\mathbb{R}^n$ می‌توان هر بردار را در هر عدد حقیقی ضرب کرد و برداری دیگر در آن فضا به دست آورد. فهرست خیاط نشان می‌دهد که شخصی با بلندی ۶ متر به سختی یافت می‌شود.

چنین تعریف‌های ساده‌ای می‌تواند خطرناک باشد. مفهوم بردار در علم فیزیک و به‌خصوص در علم مکانیک که از رفتار نیروها به‌عنوان الگویی برای بردار استفاده می‌شود، به‌کار می‌رود. اما نیروها دارای برخی ویژگی‌های عجیب هستند: اگر نقطه اثر نیروی وارد بر یک جسم صلب را جابه‌جا کنیم، بر جسم یا گشتاور وارد می‌شود یا حرکت جسم تغییر می‌کند. بنابراین نیروهای مکانیکی که با مفهوم بردار بیان می‌شوند، دارای ویژگی‌های است که توسط مفهوم ریاضی بردار تامین نمی‌شود. در مکانیک کلاسیک جسم صلب، می‌توان نیرو را در امتداد خط عمل آن حرکت داد، اما به آسانی نمی‌توان آن را به خارج آن خط جابه‌جا کرد. در مورد یک جسم تغییر شکل‌پذیر نمی‌توان نیرو را به هر جایی حرکت داد زیرا در هنگام عمل، حالت جسم به سرعت تغییر می‌کند. دو نیرویی را که بر جسم عمل می‌کنند، می‌توان به‌صورت برداری با هم جمع کرد (فراموش نکنید که گشتاور در هنگام جابه‌جایی نیرو افزایش می‌یابد). از طرف دیگر اگر دو نیرو بر دو نقطه مادی متفاوت اثر کند، آن‌گاه بردارهایی نشان دهنده نیرو با هم جمع می‌شوند، اما الزاماً بردار جدیدی را که به وضعیت فیزیکی مربوط است، به‌دست نمی‌دهند. پس می‌توان فهمید که ایده بردار در علم ریاضیات تنها برخی از ویژگی‌های تشریح‌کننده یک جسم حقیقی را بیان می‌کند.

اکنون به موضوع دیگری در مورد بردارها اشاره می‌کنیم. دانشجویان در ریاضیات مقدماتی از بردارها و نقاط به‌طور متناظر استفاده می‌کنند: این دو موضوع دارای طبیعتی متفاوت هستند. بردارها در فضا وجود دارند و نقاط از فضا می‌باشند. برای مثال می‌توان برداری را در یک فضای برداری اقلیدسی n -بعدی با یک نقطه در فضای نقطه‌ای اقلیدسی n بعدی متناظر ساخت. سپس می‌توان بردار x را به‌عنوان جابجاگر تمام نقاط از فضای نقطه‌ای که توسط مقدار معینی بیان می‌شود، در نظر گرفت. نتیجه چنین نگاشتی، فضاهای یکسان نقاط است که هر جفت نقطه متناظر با این نگاشت می‌تواند بردار x را تعریف کند که هر نقطه را به تصویر خودش منتقل می‌کند. وقتی در مختصات دکارتی نقطه شروع را از نقطه پایانی کم می‌کنیم، این بردار به‌دست می‌آید. اگر این حقیقت را در نظر بگیریم که ترکیب این دو نگاشت از قاعده جمع برداری پیروی می‌کند، آن‌گاه می‌توان تعریف دقیقی از فضای شهودی در ریاضیات مقدماتی

به دست آورد. مهندسين می توانند جسم را با چنین مشخصاتی به صورت ساده تر در نظر بگیرند، اما ارزش سختی ریاضیات با توجه به بیشتر نقطه نظرهای کاربردی اثبات شده است. برای مثال، یک کامپیوتر که اطلاعات را به طور کاملاً شهودی پردازش می کند، می تواند موضوعها را به طور مناسب برای تعریفهای دقیق و قوانین دستی فرمول بندی کند.

این مطلب ما را به سخن پایانی در مورد بیان بردارها در نمادگذاری با مولفه های آزاد رهنمون می سازد. نمادگذاری ساده و فشرده x برای بردار، روش قدرتمندی برای نمایش رابطه بین بیشتر کمیت های برداری (و تانسوری) که در ریاضی فیزیک روی می دهد، ارایه می کند. این امر به ما اجازه می دهد تا عملیات هایی را انجام دهیم که در چندین صفحه قابل نوشتن است و اگر به شکل مولفه ای انجام گیرد، به صورتی مبهم تبدیل می شود. نمونه هایی این چنینی در مسای فیزیک غیر خطی و جاهایی که تغییر دستگاه مختصات ضروری است، وجود دارد. طبیعت صوری حاصل از عملیات بدان معنا است که کامپیوتر می تواند مسئولیت کارهای زیادی را حتی در سطح پژوهش های اصلی عهده دار شود.

۱-۵ مسایل

۱-۱ $2a_1 + 3a_2$ را برای بردارهای داده شده a_1 و a_2 بیابید.

(الف) $a_2 = (1, 1, 2)$ ، $a_1 = (1, 2, -1)$ ؛

(ب) $a_2 = (3, 1, -2)$ ، $a_1 = (-1, 2, 0)$ ؛

(پ) $a_2 = (5, 1, -4)$ ، $a_1 = (1, 3, 4)$.

۱-۲ $a_1 + 3a_2 - 2a_3$ را برای بردارهای داده شده a_1 ، a_2 ، a_3 بیابید.

(الف) $a_3 = (1, -1, 2)$ ، $a_2 = (1, -1, 2)$ ، $a_1 = (-1, 2, -2)$ ؛

(ب) $a_3 = (3, 2, 3)$ ، $a_2 = (2, -3, 2)$ ، $a_1 = (1, 3, 2)$ ؛

(پ) $a_3 = (1, 1, -2)$ ، $a_2 = (4, 3, 0)$ ، $a_1 = (2, 1, 2)$.

۱-۳ x صادق در معادله را بیابید.

(الف) $a + 2x - 4b$ ؛

$$(ب) \quad 2(a+2x)+b=(b+x)$$

$$(پ) \quad x+2a+16(x-b)+c=2(c+3x)+a-x$$

$$۱-۴ \quad a \cdot b \text{ و } a \times b \text{ را بیابید، اگر}$$

$$(الف) \quad a=(0,1,1), b=(1,1,1)$$

$$(ب) \quad a=(1,2,3), b=(2,3,1)$$

$$(پ) \quad a=(1,1,1), b=(1,1,2)$$

$$(ت) \quad a=(-1,1,-1), b=(2,-1,-1)$$

$$(ث) \quad a=(0,-1,1), b=(-1,1,0)$$

$$(ج) \quad a=(-1,1,0), b=(2,3,0)$$

$$(چ) \quad a=(1,2,-1), b=(1,1,2)$$

$$(ح) \quad a=(-1,2,0), b=(3,1,-2)$$

$$(خ) \quad a=(1,3,4), b=(5,1,-4)$$

$$۱-۵ \quad \text{نشان دهید: (الف) } i_1 \times i_2 = i_3; (ب) i_2 \times i_3 = i_1; (پ) i_3 \times i_1 = i_2$$

$$۱-۶ \quad \text{نشان دهید که معادله } a \times i_1 = -a_2 i_3 + a_3 i_2 \text{ برای هر بردار دلخواه}$$

$$a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \text{ برقرار است.}$$

$$۱-۷ \quad \text{فرض کنید } a = a_1 i_1 + a_2 i_2, b = b_1 i_1 + b_2 i_2 \text{ و } i_1, i_2, i_3 \text{ یک پایه‌ی دکارتی باشد.}$$

$$\text{نشان دهید } a \times b = (a_2 b_1 - a_1 b_2) i_3$$

$$۱-۸ \quad \text{فرض کنید که } a \times x = 0, a \cdot x = 0 \text{ و } a \neq 0. \text{ نشان دهید که } x = 0$$

$$۱-۹ \quad \text{مطلوب است: (الف) } i_1 \cdot (i_2 \times i_3); (ب) i_1 \cdot (i_3 \times i_2); (پ) i_1 \cdot (i_3 \times i_1)$$

$$۱-۱۰ \quad \text{مطلوب است } a_1 \cdot (a_2 \times a_3) \text{ وقتی که}$$

$$(الف) \quad a_1=(-1,2,-2), a_2=(1,-1,2), a_3=(1,-1,3)$$

$$(ب) \quad a_1=(-1,1,0), a_2=(1,1,1), a_3=(1,-1,2)$$

$$(پ) \quad a_1=(1,1,1), a_2=(1,2,2), a_3=(1,-3,2)$$

$$(ت) \quad a_1=(-1,2,-1), a_2=(1,-2,2), a_3=(3,-1,3)$$

$$(ث) \quad a_1=(9,8,4), a_2=(7,1,3), a_3=(5,3,6)$$

$$؛ a_3 = (1, 4, 6) , a_2 = (7, 2, 3) , a_1 = (1, 2, 3) \quad (ج)$$

$$؛ a_3 = (1, -1, 2) , a_2 = (1, -1, 2) , a_1 = (-1, 2, -2) \quad (چ)$$

$$؛ a_3 = (3, 2, 3) , a_2 = (2, -3, 2) , a_1 = (1, 3, 2) \quad (ح)$$

$$. a_3 = (1, 1, -2) , a_2 = (4, 3, 0) , a_1 = (2, 1, 2) \quad (خ)$$

۱۱-۱) مطلوب است $(a_3 \times a_4) \cdot (a_1 \times a_2)$ ، جایی که

$$؛ a_4 = (1, 0, 0) , a_3 = (1, -1, 3) , a_2 = (1, -1, 2) , a_1 = (-1, 2, -2) \quad (الف)$$

$$؛ a_4 = (0, -1, 0) , a_3 = (1, -1, 2) , a_2 = (1, 1, 1) , a_1 = (-1, 1, 0) \quad (ب)$$

$$؛ a_4 = (1, 1, 1) , a_3 = (1, -3, 2) , a_2 = (1, 2, 2) , a_1 = (1, 1, 1) \quad (پ)$$

$$؛ a_4 = (1, 0, 2) , a_3 = (3, -1, 3) , a_2 = (1, -2, 2) , a_1 = (-1, 2, -1) \quad (ت)$$

$$؛ a_4 = (2, 3, -1) , a_3 = (5, 3, 6) , a_2 = (7, 1, 3) , a_1 = (9, 8, 4) \quad (ث)$$

$$؛ a_4 = (0, 0, 1) , a_3 = (1, 4, 6) , a_2 = (7, 2, 3) , a_1 = (1, 2, 3) \quad (ج)$$

$$؛ a_4 = (2, -2, 4) , a_3 = (1, -1, 2) , a_2 = (1, -1, 2) , a_1 = (-1, 2, -2) \quad (چ)$$

$$؛ a_4 = (1, -1, 1) , a_3 = (3, 2, 3) , a_2 = (2, -3, 2) , a_1 = (1, 3, 2) \quad (ح)$$

$$. a_4 = (1, 12, 3) , a_3 = (1, 1, -2) , a_2 = (-6, -3, -6) , a_1 = (2, 1, 2) \quad (خ)$$

فصل ۲: تبدیل‌ها و بردارها

۲-۱ تغییر پایه

بردار $x = (2, 1, 3)$ را دوباره مورد بررسی قرار می‌دهیم. این بردار در دستگاه دکارتی e_i ، $i = 1, 2, 3$ به‌طور کامل به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x = 2e_1 + e_2 + 3e_3$$

(اینجا یکی از مواردی است که از i به‌عنوان نمادی برای بردار دستگاه دکارتی استفاده نکرده‌ایم). فرض کنیم دستگاه جدید $(i = 1, 2, 3)$ را انتخاب کنیم که

$$e_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3,$$

$$e_2 = 4e_1 + 5e_2 + 6e_3,$$

$$e_3 = 7e_1 + 8e_2 + 9e_3.$$

از این عبارات می‌توان e_i را محاسبه نموده کنیم و تحقیق نمود که آن‌ها هم صفحه نیستند. با یادآوری این‌که x یک شیء موجودیتی مستقل از دستگاه است، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x &= 2(e_1 + 2e_2 + 3e_3) + (4e_1 + 5e_2 + 6e_3) + 3(7e_1 + 8e_2 + 9e_3) \\ &= (2+4+21)e_1 + (4+5+24)e_2 + (6+6+27)e_3 \\ &= 27e_1 + 33e_2 + 39e_3. \end{aligned}$$

در این محاسبات دکارتی بودن دستگاه اهمیت ندارد. فقط جدول تبدیل زیر مهم می‌باشد.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

به وضوح می توانیم چنین عملیاتی را در یک حالت کلی تکرار کرد.

فرض کنیم $\mathbf{x}$ به شکل

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i \quad (1-2)$$

با جدول تبدیل دستگاه

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 A_i^j \mathbf{e}_j$$

باشد. در این صورت

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \sum_{j=1}^3 A_i^j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_j \sum_{j=1}^3 A_i^j x^i.$$

در این جا روش جدیدی معرفی شده است، که بعضی از اندیس ها به عنوان اندیس پایین و بعضی ها را به عنوان اندیس بالا قرار می گیرند. گرچه این عمل ممکن است ساختگی به نظر برسد، اما دلایل خوب و عمیقی برای ادامه کار وجود دارد.

۲-۲ پایه های دوگان

برای انجام عملیات روی بردار $\mathbf{x}$ باید یک روش سرراست برای محاسبه مولفه هایش داشته باشیم. در نهایت، اهمیتی ندارد که چگونه پیش برویم. باید قادر باشیم که x^i را با یک حساب ساده به دست آوریم. فرمول هایی را ترجیح می دهیم که به ما اجازه می دهد مولفه های بردار را فقط با استفاده از ضرب نقطه ای پیدا کنیم؛ به این موارد در موقع تبدیل دستگاه و غیره، نیاز پیدا خواهیم کرد. در یک دستگاه دکارتی عملیات لازم، ضرب نقطه ای ساده با بردارهای متناظر پایه است: داریم

$$x^k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

واضح است که این روش در یک دستگاه غیر دکارتی کلی جواب نخواهد داد که در آن (زیرا لزوماً $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ برای هر $j \neq i$ برقرار نیست). بهر حال، در این حالت کلی، این امکان هست که بتوان بردار $\mathbf{e}^i$ را یافت به گونه‌ای که

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i \quad (i=1,2,3).$$

اگر قرار دهیم:

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i = \left(\sum_{j=1}^3 x^j \mathbf{e}_j \right) \cdot \mathbf{e}^i = \sum_{j=1}^3 x^j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i)$$

و طرف‌های راست و چپ را مقایسه کنیم، خواهیم دید که تساوی برقرار است اگر

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = \delta_j^i \quad (2-2)$$

جایی که

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

نماد دلتای کرونکر می‌باشد. در یک دستگاه دکارتی داریم: $\mathbf{e}^k = \mathbf{e}_k = \mathbf{i}_k$ برای هر k .

تمرین ۱-۲ نشان دهید که $\mathbf{e}_i$ با این شرط که $\mathbf{x}^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i$ ، به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

اکنون در مورد خاصیت هندسی بردارهای $\mathbf{e}^i$ بحث کنیم. برای مثال، معادلات زیر را برای $\mathbf{e}^1$ در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^1 = 1, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^1 = 1.$$

می‌بینیم که $\mathbf{e}^1$ بر $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ عمود است و اندازه آن برابر $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = 1$ می‌باشد. خواص مشابهی برای $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ برقرار است.

تمرین ۲-۲ نشان دهید که بردارهای $\mathbf{e}^i$ مستقل خطی اند.

با توجه به تمرین آخر، توسط تمرین آخر، $\mathbf{e}^i$ تشکیل یک دستگاه با پایه می‌دهند. این پایه را پایه متقابل یا دوگان $\mathbf{e}_i$ می‌نامیم. بنابراین می‌توانیم بردار دلخواه $\mathbf{x}$ را به‌صورت زیر بسط دهیم.

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}^j. \quad (3-2)$$

توجه داشته باشید که اندیس‌های بالا و پایین در نمادها ظاهر می‌شوند، اما به شیوه مکمل به کار رفته در معادله (۲-۱). اگر نمایش (۳-۲) از $\mathbf{x}$ را در $\mathbf{e}_j$ ضرب نقطه‌ای کرده و از (۲-۲) استفاده شود، به x_j می‌رسیم. این مطلب دوگان بوده دستگاه‌های $\mathbf{e}^i$ و $\mathbf{e}_i$ را توضیح می‌دهد: فرمول‌های

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i = x^i, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = 1,$$

کاملاً مشابه به نظر می‌رسند. بنابراین معرفی پایه دوگان، امتیازات بالقوه زیادی ارایه می‌دهند.

در مورد پایه دوگان با جزییات بیشتری بحث کنیم. اولین مساله در مورد یافتن فرمول‌های مناسبی برای تعریف آن می‌باشد. در ادامه این فرمول‌ها را به دست می‌آوریم، اما در ابتدا مطلب زیر را متذکر می‌شویم. استفاده از بردارهای متقابل در حالتی که تنها با دو یا سه بردار کار می‌کنیم، عملی نیست. وقتی با بردارهای زیادی سر و کار داریم، مزیت‌های واقعی پدیدار می‌شوند. این موضوع یادآور حل یک مجموعه از معادلات خطی همزمان است: در صورتی که تنها یک بردار در نظر گرفته شود، یافتن معکوس ماتریس دستگاه، کافی نمی‌باشد. اما وقتی با چنین مساله‌ای را به طور مکرر برای بردارهای اعمال شونده، حل می‌کنیم، به قابل لمس بودن محاسبه و استفاده از ماتریس معکوس پی می‌بریم.

با نوشتن $\mathbf{x}$ بر حسب پایه‌های $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}^i$ ، ترکیبی از اندیس‌ها و نمادهای جمعی به کار خواهیم برد. وقتی که با یکی شدن اندیس‌های بالا و پایین روبه‌رو هستیم، می‌توانیم نماد جمع را حذف کنیم: به عنوان مثال،

$$\text{از } x_i a^i \text{ به جای نوشتن } \sum_i x_i a^i \text{ می‌توان استفاده کرد.}$$

به عبارت دیگر، وقتی که i را به عنوان اندیس پایین و بالا می‌بینیم، می‌فهمیم که جمع به روی i گرفته می‌شود. این قانون برای بردارها نیز به کار می‌رود. برای مثال، می‌توان فهمید که

$$x_i \mathbf{e}_i \text{ به معنای مجموع } \sum_i x_i \mathbf{e}_i \text{ است.}$$

این قانون به نام قاعده جمع‌بندی/اندیس‌های مکرر^۱ خوانده می‌شود. توجه داشته باشید که اندیس تکراری یک/اندیس ظاهری است، بدین معنی که اندیس می‌تواند توسط هر اندیس دیگری که تا کنون استفاده نشده جایگزین شود. برای مثال داریم

$$x_i a^i = x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 = x_k a^k$$

اندیسی که تنها یکبار در عبارت ظاهر می‌شود،/اندیس آزاد نام دارد. برای مثال اندیس از عبارت زیر

$$A_i^k x_k,$$

در بحث‌های ضرب تانسوری هر اندیس آزاد می‌تواند به‌طور مستقل روی محدوده‌ای از مقادیر تغییر کند. به‌عنوان مثال روی مجموعه $\{1, 2, 3\}$

اکنون به استخراج فرمول‌هایی برای بردارهای پایه متقابل e^i بر حسب عباراتی از بردارهایی پایه اصلی e_i باز می‌گردیم. ابتدا e^1 را می‌سازیم. از آنجایی که حاصل ضرب خارجی دو بردار، بر هر کدام از آنها عمود است، می‌توان شرایط

$$e_2 \cdot e^1 = 0, \quad e_3 \cdot e^1 = 0,$$

را با جایگذاری:

$$e^1 = c_1 (e_2 \times e_3)$$

که c_1 ثابت است، تایید نمود. برای تعیین c_1 ، لازم است که

$$e^1 \cdot e_1 = 1.$$

به‌دست می‌آوریم:

$$c_1 [e_1 \cdot (e_2 \times e_3)] = 1.$$

کمیت $e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$ یک کمیت عددی است که به‌طور هندسی نمایش دهنده حجم متوازی السطوحی است که توسط بردارهای e_i به‌وجود می‌آید. با بیان V به‌عنوان حجم داریم

^۱ این قاعده جمع‌بندی اولین بار توسط ریاضی‌دانان معرفی نشد بلکه توسط انیشتین ارایه گردد و اغلب به‌عنوان قرارداد جمع/انیشتین شناخته می‌شود. انیشتین در مقاله‌ای که این قاعده را معرفی نمود از دستگاه‌های دکارتی استفاده کرد و بین اندیس‌های بالا و پایین هیچ تمایزی قائل نشد. اما به منظور پرداختن به دستگاه‌های غیر دکارتی این تمایز را قائل می‌شویم.

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{V} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3).$$

به‌طور مشابه،

$$\mathbf{e}^2 = \frac{1}{V} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{e}^3 = \frac{1}{V} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2).$$

خواننده می‌توان بررسی کند که این عبارات در (۲-۲) صدق می‌کنند. متذکر می‌شویم که اگر پایه متقابل $\mathbf{e}^i$ را ساخته باشیم، می‌توان از آن پایه اصلی $\mathbf{e}_i$ را به‌دست آورد. از این‌رو، بلافاصله به فرمول‌های دوگان زیر خواهیم رسید.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{V'} (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{V'} (\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{V'} (\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2).$$

جایی که $V' = \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)$ حجم متوازی السطوح پدید آمده توسط بردارهای $\mathbf{e}^i$ است.

تمرین ۲-۳ نشان دهید $V' = 1/V$.

اکنون ضرب نقطه‌ای دو بردار

$$\mathbf{b} = b^p \mathbf{e}_p = b_q \mathbf{e}^q, \quad \mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_j \mathbf{e}^j$$

را به‌صورت زیر نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i \cdot b^p \mathbf{e}_p = a^i b^p \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_p.$$

با معرفی نماد

$$g_{ip} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_p, \quad (۴-۲)$$

داریم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^p g_{ip}.$$

(به‌عنوان یک تمرین کوچک خواننده می‌تواند این عبارت را به‌طور کامل به‌دست آورد). با استفاده از نمایش مولفه‌ای متقابل داریم:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_j \mathbf{e}^j \cdot b_q \mathbf{e}^q = a_j b_q g^{jq}.$$

جایی که

$$g^{jq} = \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^q. \quad (۵-۲)$$

در نهایت با استفاده از نمایش ترکیبی داریم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i \cdot b_q \mathbf{e}^q = a^i b_q \delta_i^q = a^i b_i.$$

به‌طور مشابه،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_j b^j.$$

در نتیجه

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a_i b_j g^{ij} = a^i b_i = a_i b^i.$$

مشاهده می‌شود که برای نمایش $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وقتی از پایه‌های ترکیبی استفاده می‌شود، می‌توان فرمول مناسبی به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

در غیر این‌صورت، از بخش ۱-۳ جملات بیشتر با حاصل‌ضرب‌های اضافه را نیز خواهیم داشت. در ادامه به‌طور متناوب g_{ij} و g^{ij} استفاده می‌شود. آن‌ها مولفه‌ای یک تانسور یکتا بوده که به‌عنوان تانسور متریک شناخته می‌شود. در دستگاه دکارتی به‌وضوح خواهیم داشت:

$$g^{ij} = \delta_j^i, \quad g_{ij} = \delta_i^j.$$

۲-۳ تبدیل به دستگاه متقابل

تبدیل مولفه‌های بردار $\mathbf{x}$ در هنگام تغییر به دستگاه متقابل چگونه است؟ به‌طور ساده قرار می‌دهیم:

$$x_i \mathbf{e}^i = x^i \mathbf{e}_i$$

با ضرب نقطه‌ای طرفین در خواهیم داشت:

$$x_i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = x^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

یا

$$x_j = x^i g_{ij}. \quad (2-6)$$

در دستگاه معادلات

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

ماتریس g_{ij} ، ماتریس گرم نامیده می‌شود. اگر دترمینان آن صفر شود، آن گاه بردارهای e_i مستقل خطی‌اند.

تمرین ۲-۴ (الف) اگر دترمینان گرم صفر شود، نشان دهید که مستقل خطی‌اند.

(ب) ثابت کنید دترمینان گرم برابر V^2 است.

پایه e_i را دوگان پایه e^i می‌نامیم. در e^i مولفه‌های متریک توسط g^{ij} داده می‌شود، از این رو بلافاصله می‌توان دوگان عبارت را نوشت:

$$x^i = x_j g^{ij}. \quad (۷-۲)$$

از (۶-۲) و (۷-۲) ملاحظه می‌شود که با به کار بردن مولفه‌های متریک تانسور، همواره می‌توان اندیس‌های پایین را به بالا و به عکس تغییر داد. این عمل‌ها به عنوان عمل‌های بالا برنده و پایین برنده اندیس‌ها شناخته شده است. در نهایت، (۶-۲) به همراه (۷-۲) ایجاب می‌کند:

$$x_i = g_{ij} g^{jk} x_k,$$

در نتیجه

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.$$

البته، این بدین معنی است که ماتریس‌های g_{ij} و g^{ij} توأمأ معکوس یکدیگرند.

خلاصه کوتاه

برای پایه مفروض e_i ، بردارهای e^i داده شده توسط شرط

$$e_j \cdot e^i = \delta_j^i$$

مستقل خطی بوده و تشکیل یک پایه به نام پایه متقابل یا دوگان می‌دهند. انگیزه تعریف پایه دوگان از معادله $x \cdot e^i = x^i$ سرچشمه می‌گیرد. بیان صریح e^k می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$e^i = \frac{1}{V} (e_j \times e_k)$$

جایی که سه‌تایی مرتب (i, j, k) با $(1, 2, 3)$ یا یکی از جایگشت‌های دوری $(2, 3, 1)$ یا $(3, 1, 2)$ برابر بوده و

$$V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$$

حجم متوازی السطوح پدید آمده توسط دستگاه است. دوگان پایه $\mathbf{e}^k$ (یعنی دوگان دوگان) با پایه اصلی $\mathbf{e}_k$ برابر است. بردار مفروض $\mathbf{x}$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}^i$$

جایی که x_i ها مولفه‌های $\mathbf{x}$ نسبت به پایه دوگان هستند.

تمرین ۲-۵ (الف) فرض کنید $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k = x_k \mathbf{e}^k$. با استفاده از تانسور متریک مدول‌های همه اشکال ممکن $\mathbf{x}$ را بنویسید. (ب) همه اشکال ضرب نقطه $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ را بنویسید.

۲-۴ تبدیل بین دستگاه‌های کلی

با دانستن تبدیل مولفه‌های x^i بردار $\mathbf{x}$ به مولفه‌های متناظر با x_i نسبت به پایه متقابل، کار اصلی در مورد تبدیل x^i به مولفه‌های متناظر x_i نسبت به هر پایه دیگر $\mathbf{e}_i$ آماده می‌شویم. فرض کنیم پایه جدید $\mathbf{e}_i$ توسط رابطه زیر با پایه اصلی $\mathbf{e}_i$ در ارتباط باشد.

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{e}_j. \quad (۲-۸)$$

البته این نمادگذاری، فشرده شده دستگاه معادلات زیر است:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}}_{\equiv A} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

قبل از ادامه مطلب متذکر می‌شویم زیرنویس در نماد A_i^j دلالت بر شماره سطر ماتریس A دارد، درحالی که بالانویس نشان دهنده شماره ستون آن است. هنگام بسط

اغلب زمانی را به نوشتن معادلات مختلف جالب بر حسب نماد ماتریزی اختصاص می‌دهیم. از (۸-۲) نتیجه می‌شود که

$$A_i^j = e_i \cdot e^j.$$

تمرین ۶-۲ با دوران دستگاه مختصات دکارتی حول محور سومش، یک دستگاه مختصات دکارتی جدید به دست می‌آید. ماتریس تبدیل را بیابید. بردار $\mathbf{x}$ را می‌توان به دو شکل بیان کرد.

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i.$$

با مساوی قرار دادن این دو عبارت برای بردار یکسان $\mathbf{x}$ به دست می‌آوریم:

$$x^i \mathbf{e}_i = x^k \mathbf{e}_k,$$

در نتیجه

$$x^i \mathbf{e}_i = x^k A_k^j \mathbf{e}_j. \quad (9-2)$$

برای یافتن x^i بر حسب x^i می‌توان نماد را بسط داده و (۹-۲) را به صورت زیر نوشت

$$x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^1 A_1^j \mathbf{e}_j + x^2 A_2^j \mathbf{e}_j + x^3 A_3^j \mathbf{e}_j$$

که البته

$$A_1^j \mathbf{e}_j = A_1^1 \mathbf{e}_1 + A_1^2 \mathbf{e}_2 + A_1^3 \mathbf{e}_3,$$

$$A_2^j \mathbf{e}_j = A_2^1 \mathbf{e}_1 + A_2^2 \mathbf{e}_2 + A_2^3 \mathbf{e}_3,$$

$$A_3^j \mathbf{e}_j = A_3^1 \mathbf{e}_1 + A_3^2 \mathbf{e}_2 + A_3^3 \mathbf{e}_3.$$

با تطبیق ضرایب در می‌یابیم که

$$x^1 = x^1 A_1^1 + x^2 A_2^1 + x^3 A_3^1 = x^j A_j^1,$$

$$x^2 = x^1 A_1^2 + x^2 A_2^2 + x^3 A_3^2 = x^j A_j^2,$$

$$x^3 = x^1 A_1^3 + x^2 A_2^3 + x^3 A_3^3 = x^j A_j^3,$$

در نتیجه

$$x^i = x^j A_j^i. \quad (10-2)$$

امکان به‌دست آوردن (۲-۱۰) از (۲-۹) به روش بازگشتی وجود دارد. در سمت راست (۲-۹) اندیس j یک اندیس ظاهری است که می‌توان آن را با i تعویض کرده و بنابراین (۲-۱۰) بلافاصله به‌دست می‌آید. هم ارز ماتریسی (۲-۱۰) به‌صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

و بنابراین جمله بالا شامل حاصل‌ضرب A^T ، ترانهاد A ، است.

اغلب معادلات تبدیل معکوس از دستگاه e_i به دستگاه e_j نیاز است، از آنجایی که تبدیل مستقیم به‌صورت خطی است، معکوس نیز باید خطی باشد. پس می‌توان نوشت

$$e_i = A_i^j e_j \quad (2-11)$$

که

$$A_i^j = e_i \cdot e^j.$$

اکنون ارتباط بین ماتریس‌های تبدیل A و A را به‌دست می‌آوریم. با توجه به (۲-۱۱) و (۲-۸) داریم

$$e_i = A_i^j e_j = A_i^j A_j^k e_k.$$

و از آنجایی که e_i تشکیل یک پایه را می‌دهد. باید داشته باشیم:

$$A_i^j A_j^k = \delta_i^k.$$

رابطه زیر به‌طور مشابه به‌دست می‌آید.

$$A_i^j A_j^k = \delta_i^k.$$

حاصل‌ضرب ماتریس‌های (A_i^j) و (A_j^k) ماتریس یکه است و در نتیجه این ماتریس‌ها معکوس یکدیگرند.

$$x^i = x^k A_k^i.$$

تمرین ۲-۷ نشان دهید $x^i = x^k A_k^i$. فرمول‌هایی برای روابط بین پایه‌های متقابل به روش زیر به‌دست می‌آید. با اتحادهای بدیهی زیر شروع می‌کنیم:

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{e}^j(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

با جایگذاری $\mathbf{x} = \mathbf{e}^i$ در رابطه اول به دست می آوریم

$$\mathbf{e}^i = A_j^i \mathbf{e}^j,$$

درحالی که از اتحاد دوم با $\mathbf{x} = \mathbf{e}^i$ داریم

$$\mathbf{e}^i = A_j^i \mathbf{e}^j.$$

از این روابط فرمول های زیر نتیجه می شوند

$$x_i = x_k A_i^k, \quad x_i = x_k A_i^k.$$

۲-۵ مولفه های پایا و پادپایا

دیدیم که اگر بردارهای پایه طبق رابطه زیر تبدیل شوند

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{e}_j,$$

آن گاه مولفه های x_i از بردار $\mathbf{x}$ باید نسبت به

$$x_i = A_i^j x_j.$$

تبدیل شوند. تشابه شکلی به دست آمده برحسب را می توان صورت مولفه های پایا بردار $\mathbf{x}$ بیان کرد. به عبارت دیگر قانون تبدیل:

$$x^i = A_j^i x^j$$

نشان می دهد که x^i همانند $\mathbf{e}^i$ تبدیل می شود. بدین دلیل x^i به عنوان مولفه های پادپایای $\mathbf{x}$ بیان می شوند. در فصل ۳ کاربردهای بیشتری از این فرمول بندی را خواهیم دید.

خلاصه کوتاه

اگر تبدیل های مختصات زیر را در نظر بگیریم:

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}^i = A_j^i \mathbf{e}^j,$$

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}^i = A_j^i \mathbf{e}^j,$$

آن‌گاه $\mathbf{x}$ دارای نمایش‌های متفاوت زیر است:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}^i = x^i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}^i$$

و قانون تبدیل زیر به کار می‌رود

$$x_i = A_i^j x_j, \quad x^i = A_j^i x^j,$$

$$x_i = A_i^j x_j, \quad x^i = A_j^i x^j,$$

x^i بر حسب مولفه‌های غیرپایای $\mathbf{x}$ بیان می‌شوند. درحالی که x_i به صورت مولفه‌های همورد نوشته می‌شود.

وقتی که دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دوگان تغییر می‌کند، قانون‌های تبدیل بسیار ساده‌تر می‌شوند. دراین صورت

$$x_i = g_{ji} x^j, \quad x^i = g^{ij} x_j,$$

که

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j,$$

مولفه‌های تانسور متریک هستند.

۲-۶ حاصل ضرب خارجی بر حسب نماد اندیسی

کمیتی به نام گشتاور نقش مهمی را در مکانیک بازی می‌کند، این کمیت در فیزیک مقدماتی به عنوان حاصل ضرب بزرگی نیرو و طول معرفی می‌شود ("نیرو ضرب در بازوی حرکت")، به همراه برخی قانون‌های جبری که علامت دوران ناشی از اعمال نیرو بر جسم فیزیکی را به دست می‌آورد. در بحث‌های پیشرفته که مسایل سه بعدی بررسی می‌شود، گشتاور را به عنوان یک کمیت برداری در نظر می‌گیریم. اگر نیروی $\mathbf{f}$ بر نقطه‌ای با بردار مکان $\mathbf{r}$ نسبت به مبدا O وارد شود، در نتیجه گشتاور حاصل حول نقطه O بر صفحه بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{f}$ عمود است. از دو بردار یک‌ه مورد نظر عمودی، $\mathbf{t}$ به طور قراردادی (اما دلخواه) بر حسب بردار $\mathbf{n}$ که از قاعده آشنای دست راست به دست می‌آید: اگر انگشت اشاره دست راست را در جهت $\mathbf{r}$ و انگشت میانی در امتداد $\mathbf{f}$ باشد، دراین صورت انگشت شصت نشان‌دهنده جهت $\mathbf{n}$ و بنابراین در جهت $\mathbf{t}$ است. بزرگی $\mathbf{t}$

برابر است با $|\mathbf{f}||\mathbf{r}|\sin\theta$ که θ زاویه کوچک تر بین $\mathbf{f}$ و $\mathbf{r}$ است. کل این قانون ها را می توان به صورت نماد خلاصه زیر نوشت:

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}.$$

تعریف گشتاور را می توان به عنوان مدلی برای عملیات کلی تر بین بردارها در نظر گرفت: ضرب خارجی. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار باشند، تعریف می کنیم

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = n |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

که n و θ در حالت گشتار بالا تعریف شده است. شبیه هر بردار دیگری، می توان $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را بر حسب پایه بسط داد؛ پایه متقابل $\mathbf{e}^i$ را با انتخاب کرده و می نویسیم:

$$\mathbf{c} = c_i \mathbf{e}^i.$$

چون بزرگی های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در کمیت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ به شکل حاصل ضرب نوشته شده، می توان c_i را به صورت زیر یافت:

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \quad (2-12)$$

در اینجا ε ها ضریب های صوری هستند. حال می خواهیم آن را به دست آوریم. می نویسیم

$$\mathbf{a} = a^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{b} = b^k \mathbf{e}_k.$$

و سپس با بکار بردن خاصیت معروف پخش پذیری:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \equiv \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

به دست می آید:

$$\mathbf{c} = a^j \mathbf{e}_j \times b^k \mathbf{e}_k = a^j b^k (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k).$$

بنابراین

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_i = c_m \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = c_i = a^j b^k [(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i]$$

و مقایسه آن با (2-12) نشان می دهد که:

$$\varepsilon_{ijk} c = (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i.$$

دیده می شود که مقدار $\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)$ به مقادیر اندیس های i, j, k بستگی دارد. در اینجا مرسوم است که ایده جایگشتی سه تایی مرتب (1,2,3) معرفی گردد. جایگشتی از (1,2,3) زوج نامیده می شود در صورتی که بتوان آن را با تعداد زوجی از تعویض های

جفتی نمایش داد؛ اما جایگشت فرد، نتیجه‌ی تعداد فردی از تعویض‌ها است. قبلاً دیدیم که اگر i, j, k متمایز باشند و سه‌تایی مرتب (i, j, k) جایگشت زوجی از $(1, 2, 3)$ باشد، آن‌گاه $\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)$ برابر حجم متوازی‌السطوح است. اگر i, j, k متمایز باشند و سه‌تایی مرتب (i, j, k) جایگشت فردی از $(1, 2, 3)$ باشد، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح با علامت منفی به‌دست می‌آید. اگر دو تا از اعداد i, j, k با هم مساوی باشند، مقدار صفر را به‌دست می‌آوریم. در نتیجه

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +V & \text{یک جایگشت زوج از باشد } (1, 2, 3) \text{ باشد} \\ -V & \text{یک جایگشت فرد از باشد } (1, 2, 3) \text{ باشد} \\ 0 & \text{دو یا سه اندیس مساوی باشد} \end{cases}$$

علاوه بر این، می‌توان نشان داد که (تمرین ۲-۴)

$$V^2 = g$$

که g دترمینان ماتریس متشکل از عناصر $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ تانسور متریک است. توجه داشته باشید که $|V| = 1$ برای دستگاه مختصات دکارتی برقرار است.

نماد جایگشت ε_{ijk} در نوشتار فرمولی بسیار مفید است. برای مثال دترمینان ماتریس $A = (a_{ij})$ را می‌توان به‌طور مختصر زیر بیان کرد:

$$\det A = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}.$$

علاوه بر این ابزار نمادگذاری، ε_{ijk} نمایش دهنده تانسور (که تانسور لوی-سیویتا نامیده می‌شود) است. این موضوع در فصل ۳ بیشتر توضیح داده می‌شود.

تمرین ۲-۸ مولفه‌های غیرپایای بردار $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را می‌توان با ضرایب مناسب ε^{ijk} به‌صورت زیر بیان کرد:

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k.$$

با استفاده از روش این بخش، ضرایب را پیدا کنید. سپس اتحاد زیر را به‌دست آورید.

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_i^p & \delta_i^q & \delta_i^r \\ \delta_j^p & \delta_j^q & \delta_j^r \\ \delta_k^p & \delta_k^q & \delta_k^r \end{vmatrix}$$

و با استفاده از آن نشان دهید:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{pqr} = \delta_i^p \delta_j^q \delta_k^r - \delta_i^q \delta_j^p \delta_k^r.$$

با استفاده از این نتایج، اثبات کنید که برای بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ داریم:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (۱۳-۲)$$

تمرین ۲-۹ اتحاد لاگرانژ را به دست آورید:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

۲-۷ نرم‌های فضای بردارها

اغلب لازم است که شدت برخی از میدان بردار به صورت موضعی یا کلی مشخص شود. برای این کار، استفاده از نماد نرم مناسب می‌باشد. نرم معروف اقلیدسی بردار $\mathbf{a} = a_k \mathbf{i}_k$ در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\|\mathbf{a}\| = \left(\sum_{k=1}^3 a_k^2 \right)^{1/2}.$$

این نرم به ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{a} = a_k \mathbf{i}_k$ و $\mathbf{b} = b_k \mathbf{i}_k$ بستگی دارد. داریم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_k b_k \quad \text{به طوری که}$$

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}.$$

مولفه‌های بردار در هر دستگاه مختصات غیر دکارتی به طول بردارهای آن دستگاه مختصات و زاویه بین آن‌ها بستگی دارد. از آنجایی که جمع مولفه‌های مجذور بردار به دستگاه مختصات وابسته است، از آن نمی‌توان برای مشخص کردن بردار استفاده کرد. اما با تغییر دستگاه مختصات، فرمول‌هایی که با حاصل ضرب داخلی مرتبط هستند به صورت ناورد باقی می‌ماند، در نتیجه می‌توان از آن‌ها برای مشخص کردن شدت بردار (طول آن) استفاده کرد. پس برای دو بردار $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ و $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$ که در هر دستگاه

مختصات دلخواهی نوشته می‌شوند، می‌توان ضرب عددی را به صورت زیر تعریف کرد (یعنی ضرب داخلی ساده):

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i e_i \cdot y^j e_j = x^i y^j g_{ij} = x_i y_j g^{ij} = x^i y_j.$$

توجه داشته باشید که تنها در مختصات ترکیبی، این شبیه ضرب عددی در دستگاه مختصات دکارتی می‌شود. به طور مشابه نرم بردار $\mathbf{x}$ برابر است با:

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = (x^i x^j g_{ij})^{1/2} = (x_i y_j g^{ij})^{1/2} = (x^i x_i)^{1/2}.$$

این ضرب نقطه‌ای و نرم وابسته، تمام خواص لازم مربوط به موضوعات موجود در جبر و آنالیز تابعی را دارد. در واقع، کافی است تنها این موضوع بررسی شود که آیا تمام اصول ضرب داخلی برقرار است.

(i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ و $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ اگر و تنها اگر $\mathbf{x} = 0$. این خاصیت برقرار است زیرا تمام کمیت‌های موجود که به طور بدیهی در دستگاه مختصات دکارتی صادق است، قابل نوشتن می‌باشند. با دلیل مشابهی صادق بودن این خاصیت تایید می‌شود.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ (ii) خواننده می‌تواند این مطلب را برای هر نمایش برداری بررسی کند. در نهایت،

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \beta(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$ (iii) که α و β اعداد حقیقی دلخواه بوده و $\mathbf{z}$ یک بردار است.

با استفاده از نظریه کلی عبارت

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} \quad (2-14)$$

در تمام اصول نرم صادق است

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad (i) \quad \text{و} \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \mathbf{x} = 0.$$

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \quad (ii) \quad \text{برای هر عدد حقیقی} \quad \alpha.$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (iii).$$

علاوه بر این نامساوی شوارتز را داریم.

$$\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \quad (2-15)$$

که در حالتی بردارها غیر صفر باشند تساوی برقرار است اگر و تنها اگر برای برخی عدد λ حقیقی داشته باشیم $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

مجموعه تمام بردارهای سه بعدی، یک فضای سه بعدی خطی را بوجود می‌آورند. هر فضای خطی که مجهز به نرم (۲-۱۴) است، فضای نرم دار می‌شود. در این کتاب فضای اصلی $\mathbb{R}^3$ است. توجه کنید که می‌توان بیشتر از یک نرم در هر فضای نرم دار تعریف کرد و در عمل به نرم‌های مختلفی نیاز است. برای مثال $\|\mathbf{x}\|_2$ نیز یک نرم $\mathbb{R}^3$ است. نرم‌های دیگری را می‌توان تعریف کرد که از این نرم اخیر کاملاً متفاوت است. فرض کنیم که $\mathbf{e}_k$ پایه $\mathbb{R}^3$ باشد و $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k$ برای $p \geq 1$ تعریف می‌کنیم:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^3 |x^k|^p \right)^{1/p}.$$

اصول نرم (i) و (ii) به‌طور آشکار برقرار هستند. اصل (iii) نتیجه‌ای از نامساوی کلاسیک مینکوفسکی برای جمع‌های متناهی است. خواننده باید آگاه باشد که این نرم در پایه مشخصی بیان شده است. اگر آن را در پایه دیگری به کار ببریم، مقدار نرم بردار به طور کلی تغییر می‌کند. مزیت نرم (۲-۱۴) این است که مستقل از پایه‌های فضا می‌باشد.

در ادامه هنگام بررسی مقادیر ویژه تانسور نیاز به فضای بردارهایی با مولفه‌های مختلط پیدا می‌کنیم. این فضا را می‌توان همانند فضای اعداد مختلط تعریف کرد. با فضای $\mathbb{R}^3$ که دارای پایه $\mathbf{e}_k$ است، شروع کرده و ضرب برداری در $\mathbb{R}^3$ را با اعداد مختلط تعریف می‌کنیم. این فضا اغلب خطی است، اما مختلط بوده و به‌صورت $\mathbb{C}^3$ نمایش داده می‌شود. هر بردار دلخواه $\mathbf{x}$ در $\mathbb{C}^3$ به شکل زیر است:

$$\mathbf{x} = (a^k + ib^k) \mathbf{e}_k,$$

که i برابر یکه موهومی ($i^2 = -1$) است. بردار مزدوج $\mathbf{x}$ همانند مزدوج عدد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\mathbf{x}} = (a^k - ib^k) \mathbf{e}_k,$$

قسمت‌های حقیقی و موهومی x به ترتیب عبارتند از $a^k e_k$ و $b^k e_k$. به طور آشکار یک پایه در $\mathbb{C}^3$ ممکن است شامل برداری باشد که در $\mathbb{R}^3$ نیست. خواننده به عنوان تمرین می‌تواند شکل قسمت‌های حقیقی و موهومی x را بر حسب این پایه‌ها بنویسد. در $\mathbb{C}^3$ ضرب داخلی فاقد خاصیت $x \cdot x \geq 0$ است. اما می‌توان ضرب داخلی دو بردار x و y را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\langle x, y \rangle = x \cdot \bar{y}.$$

به آسانی دیده می‌شود که این ضرب داخلی دارای خواص زیر است. فرض کنیم که بردارهای دلخواهی x, y, z از $\mathbb{C}^3$ باشند. در این صورت

$$(i) \quad x \cdot x = 0 \text{ و } x \cdot x \geq 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0.$$

$$(ii) \quad x \cdot y = \overline{y \cdot x}.$$

$$(iii) \quad x \cdot y = \beta(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z) \quad \text{که } \alpha \text{ و } \beta \text{ اعداد}$$

مختلط دلخواه بوده و z یک بردار است.

خواننده می‌تواند این خواص را تحقیق کند. اکنون می‌توان نرم وابسته به ضرب داخلی را تعریف کرد:

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2},$$

و بررسی کرد که تمام اصول نرم در فضای خطی مختلط برقرار است. به عنوان نتیجه‌ای از خواص کلی ضرب داخلی، نامساوی شوارتز (2.15) نیز در $\mathbb{C}^3$ برقرار است.

۲-۸ ملاحظات پایانی

با تکرار برخی مطالب که در فصل ۱ ذکر شد، سخن خود را به پایان می‌بریم:

بردار دارای ماهیت واقعی است.

در ریاضیات مقدماتی یاد گرفته‌ایم که هر بردار را به صورت یک سه‌تایی مرتب در نظر بگیریم. البته اگر در ذهن خود دستگاه مختصات دکارتی واقعی را در نظر بگیریم، این موضوع درست است. اما اگر مولفه‌های آن را ثابت فرض کنیم، آن‌گاه بردار در هر دستگاه به صورت یکتا تعریف می‌شود. قطعاً یکتا! پس بردار چیزی واقعی است اما با

تعیین مولفه‌های آن در یک دستگاه، به سرعت می‌توان آن‌ها را در هر دستگاه دیگری با استفاده از قوانین واقعی به دست آورد.

به این موضوع تاکید داریم زیرا وضعیت کاملاً مشابهی با تانسور دارد. هر تانسور دارای ماهیت واقعی است و با مولفه‌های ثابت آن که به یک دستگاه وابسته است، می‌توان یکتایی تانسور را تعیین کرد حتی اگر مولفه‌های آن به دستگاه‌های مختصات دیگری که کاملاً متفاوت هستند وابسته باشد.

۲-۹ مسایل

۲-۱ دوگان پایه را بیابید.

$$(الف) \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$$

$$(ب) \quad \mathbf{e}_3 = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{i}_1 - 3\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$$

$$(پ) \quad \mathbf{e}_3 = 3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$$

$$(ت) \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_2 = -\sin \phi \mathbf{i}_1 + \cos \phi \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_1 = \cos \phi \mathbf{i}_1 + \sin \phi \mathbf{i}_2$$

۲-۲ فرض کنید.

$$\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = -2\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = -\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

ماتریس تبدیل A_i^j از پایه $\mathbf{e}_i$ به پایه $\mathbf{e}_j$ را بیابید.

۲-۳ فرض کنید.

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 - 6\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{e}_1 = -3\mathbf{i}_1 - 4\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = -\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e}_1 = -\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3$$

ماتریس تبدیل از پایه $\mathbf{e}_i$ به پایه $\mathbf{e}_j$ را بیابید.

۲-۴ بیابید

$$(الف) \quad a_j \delta^{jk}$$

$$(ب) \quad a_i a^j \delta_j^i$$

$$(پ) \quad \delta_i^i$$

$$(ت) \quad \delta_{ij} \delta^{jk}$$

$$(ث) \quad \delta_{ij} \delta^{ji}$$

$$(ج) \quad \delta_i^j \delta_j^k \delta_k^i$$

$$۲-۵ \quad \text{نشان دهید } \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijl} = 2\delta_k^l$$

$$۲-۶ \quad \text{نشان دهید } \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} = 6$$

۲-۷ بیابید

$$(الف) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{jk}$$

$$(ب) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{mkj} \delta_m^i$$

$$(پ) \quad \varepsilon_{ijk} \delta_m^k \delta_n^j$$

$$(ت) \quad \varepsilon_{ijk} a^i a^j$$

$$(ث) \quad \varepsilon_{ijk} | \varepsilon^{ijk} |$$

$$(ج) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{imn} \delta_m^j$$

$$۲-۸ \quad (a \times b) \times c$$

$$۲-۹ \quad \text{نشان دهید } a \cdot (a \times b) = 0$$

$$۲-۱۰ \quad \text{نشان دهید که } a \cdot (b \times c) d = (a \cdot d) b \times c + (b \cdot d) c \times a + (c \cdot d) a \times b$$

$$۲-۱۱ \quad \text{اگر } |e| = 1 \text{ و } e \cdot a = 0 \text{ نشان دهید } (e \times a) \times e = a$$

$$۲-۱۲ \quad \text{فرض کنید } e_k \text{ یک پایه از } \mathbb{R}^3, \quad x = x^k e_k \text{ و } h_1, h_2, h_3 \text{ اعداد مثبت ثابتی باشند. نشان دهید } |x^k| h_k \text{ یک نرم از } \mathbb{R}^3 \text{ است.}$$

فصل ۳: تانسورها

۳-۱ کمیت‌های دوتایی و تانسورها

پیشتر با مجموعه‌هایی از کمیت‌های شبیه به g^{ij} و g_{ij} برخورد داشته‌ایم. چنین جدول $3 \times 3 = 9$ از ضرایب را می‌توان به‌عنوان برداری در فضای ۹ بعدی در نظر گرفت اما به‌دلیل مهم زیر، این را باید رد کنیم: اگر دستگاه بردارها تغییر کند و روابط بین مولفه‌های جدید و قدیم را محاسبه کنیم، آن‌گاه از آنها نتایج مختلف به‌دست می‌آید که در مولفه‌های بردار به‌کار می‌رود. گرچه، مولفه‌های تانسور متریک بر اساس قواعد مشخص تبدیل شده و به‌دست می‌آید، بلکه این قواعد تبدیل برای کمیت‌های گوناگون شمارش‌ناپذیر فیزیکی نیز کاربرد دارد. در فصل ۱ مشخص کردیم که این کمیت‌ها که به‌صورت ماتریس‌های 3×3 نشان داده می‌شوند، به شکل یک رده اجسام که به‌عنوان مرتبه ۲ شناخته می‌شوند، هستند. هدف ما تعیین نظریه مناسبی است که روشی موازی با نمایش برداری فصل ۲ می‌باشد.

برای درک این مبحث با معرفی جفت (یا ضرب تانسوری) ازدو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ که به‌صورت $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ نمایش داده می‌شود، شروع می‌کنیم.

فرض می‌شود که حاصل‌ضرب تانسوری، بسیاری از خواص حاصل‌ضرب را دارا می‌باشد:

$$(\lambda \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}, \quad (1-3)$$

که λ یک عدد حقیقی دلخواه است. گرچه حاصل ضرب تانسوری متقارن نیست: اگر a با b متناسب نباشد، آن گاه $a \otimes b \neq b \otimes a$. از این به بعد، جفت (ضرب تانسوری) را بدون علامت $\otimes$ نمایش می دهیم: $ab = a \otimes b$.

یکبار دیگر فضای سه بعدی برای بردارهایی در دستگاه e_i را در نظر می گیریم. با به کارگیری بسط بردارها بر حسب بردارهای پایه و خواص (۱-۳) جفت ab را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$ab = a^i e_i b^j e_j = a^i b^j e_i e_j.$$

این موضوع دقیقاً ۹ جفت متفاوت $e_i e_j$ را معرفی می کند. اکنون یک فضای خطی را در نظر می گیریم که در آن پایه ها یک مجموعه از جفت های ۹ تایی را تشکیل می دهند و آن را فضای تانسوری مرتبه ۲ (یا تانسور مرتبه ۲) می نامند. ضرایب عددی این جفت ها، مولفه های تانسور نامیده می شوند. بنابراین هر عنصر از این فضا، تانسور A ، دارای نمایش زیر است:

$$A = a^{ij} e_i e_j$$

برای حفظ کردن خاصیت جسمی عنصرهای این فضا، لازم است که مولفه های A تحت تبدیل دستگاه مربوطه به صورت متناظر تبدیل شود. توجه داشته باشید که اندیس های زیرنویس برای مولفه های A تعریف شده اند. با گسترش فصل ۲ این موضوع به قوت خود باقی می ماند.

برای آماده سازی بخش بعد، ضرب نقطه ای جفت ab در بردار c را معرفی می کنیم:

$$ab \cdot c = (b \cdot c) a. \quad (۲-۳)$$

پس نتیجه به دست آمده، برداری هم جهت با a است. به طور مشابه، می توان ضرب نقطه ای را از سمت چپ معرفی کرد:

$$c \cdot ab = (c \cdot a) b. \quad (۳-۳)$$

تمرین ۱-۳ (الف) یک جفت به شکل ee که e بردار یکه است، اغلب جفت تصویری نامیده می شود. آن را تشریح کنید. (ب) ماتریس های متناظر با جفت های $i_1 i_1$ ، $i_2 i_2$ و $i_3 i_1$ را بنویسید.

۳-۲ تانسورها از منظر عملگر

دیدگاه متفاوت تانسور مرتبه دو به صورت یک جمع وزنی از جفت‌ها است که در آن تانسور همانند یک عملگر دیده می‌شود. از این نقطه نظر تانسور A را به صورتی در نظر می‌گیریم که بردار x را به بردار y مطابق معادله زیر می‌نگارد.

$$y = A \cdot x.$$

برعکس، با داشتن یک رابطه خطی بین x و y می‌توان عملگر A را به صورت یکتا تعریف کرد. بنابراین اگر برای تمام x ها داشته باشیم $A \cdot x = B \cdot x$ ، آن‌گاه $A = B$. اکنون می‌توان نشان داد که مولفه‌ها بر حسب هر پایه که به شکل تساوی $y = A \cdot x$ است، به صورت یکتای واقعی تعریف می‌شود. تانسور A بر حسب بسط $a^{ij} e_i e_j$ در برخی پایه‌های e_i نشان داده می‌شود. آشکار است که عملیات $A \cdot x$ بر حسب خطی x است، بنابراین اگر عملکرد آنرا بر روی تمام سه بردار پایه مشخص کنیم، A را می‌توان به صورت یکتا تعریف کرد. با در نظر گرفتن $x = e^k$ ، y متناظر با آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A \cdot x = a^{ij} e_i e_j \cdot e^k = a^{ik} e_i.$$

با ضرب نقطه‌ای این عبارت در e^l به دست می‌آوریم:

$$a^{lk} = e^l \cdot A \cdot e^k.$$

در این حالت می‌توانیم مولفه‌های تانسور A را بر حسب هر پایه به دست آوریم:

$$a^{ij} = e^i \cdot A \cdot e^j, \quad a_{i,j}^i = e^i \cdot A \cdot e_j,$$

$$a_{ij} = e_i \cdot A \cdot e_j, \quad a_i^j = e_i \cdot A \cdot e^j.$$

توجه داشته باشیم که در "مولفه‌های ترکیبی" می‌توانیم موقیت اندیس‌ها را به گونه‌ای در نظر بگیریم که وابستگی آنها به جفت‌های گوناگون ثابت باقی بماند.

با تجزیه و تحلیل دلایل بالا، می‌توان دریافت که قانون خارج قسمت برای تانسورهای مرتبه دو اثبات شده است. اگر y برداری مفروض باشد و برای هر بردار x y تبدیل خطی x به y وجود داشته باشد، آن‌گاه تبدیل خطی به صورت یک تانسور است

و می‌توان نوشت $y = A \cdot x$. گاهی اوقات این گزاره در ایجاد مشخصه تانسوری یک مجموعه از کمیت‌های عددی مفید است (یعنی مولفه‌های A). اغلب عملیات جبری معمول از منظر عملگری قابل تعریف است. با تانسورهای مفروض A و B جمع تانسوری $A+B$ به صورت یکتا توسط شرط زیر برای تمام x ها تعریف می‌شود.

$$(A+B) \cdot x = A \cdot x + B \cdot x$$

اگر c یک عدد باشد، آن‌گاه cA توسط شرط زیر برای تمام x ها تعریف می‌شود.

$$(cA) \cdot x = c(A \cdot x)$$

در حالت خاص هر حاصل‌ضربی به شکل $0A$ تانسور صفر را که با 0 نمایش داده می‌شود، به دست می‌دهد. ضرب نقطه‌ای $A \cdot B$ به عنوان ترکیبی از عملگرهای B و A در نظر گرفته می‌شود:

$$(A \cdot B) \cdot x \equiv A \cdot (B \cdot x).$$

ضرب نقطه‌ای $y \cdot A$ که پیش حاصل‌ضرب A در بردار y نامیده می‌شود توسط شرط زیر برای تمام x ها تعریف می‌شود.

$$(y \cdot A) \cdot x = y \cdot (A \cdot x)$$

یک تانسور ساده اما مهم تانسور واحد است که با E نشان داده شده و توسط شرط زیر برای هر x تعریف می‌شود.

$$E \cdot x = x \cdot E = x. \quad (4-3)$$

باید داشته باشیم: i_i آشکار هست که در هر دستگاه مختصات دکارتی

$$E = \sum_{i=1}^3 i_i i_i. \quad (5-3)$$

در هر دستگاه مختصات برای مولفه‌های ترکیبی داریم:

$$E = e^i e_i = e_j e^j \quad (6-3)$$

در نتیجه اندیس‌های بالا و پایین را می‌توان به صورت زیر بر حسب مولفه‌های غیر ترکیبی بیان کرد:

$$E = g_{ij} e^i e^j = g^{ij} e_i e_j \quad (7-3)$$

می‌بینیم که تانسور واحد در نقش تانسور متریک ظاهر می‌شود! در سرتاسر مبحث تانسورهای مرتبه دو بر شباهت نزدیک بین نظریه تانسور و نظریه ماتریس تاکید کردیم. معادلات (۳-۵) و (۳-۶) نشان می‌دهند که نمایش ماتریسی $\mathbf{E}$ هم در دستگاه دکارتی و هم بر حسب مولفه‌های ترکیبی به صورت یک ماتریس همانی 3×3 است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

این موضوع برای مولفه‌های غیر ترکیبی (۳-۷) برقرار نمی‌باشد.

تمرین ۳-۲. با به کارگیری (۳-۴) به همراه (۲-۴) و (۲-۵) نشان دهید که مولفه‌های متفاوت $\mathbf{E}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} e^{ij} &= g^{ij}, & e_j^i &= \delta_j^i, \\ e_{ij} &= g_{ij}, & e_j^i &= \delta_j^i. \end{aligned}$$

سپس (۳-۶) را به دست آورید.

در نظر گرفتن $\mathbf{A}$ به عنوان یک عملگر، ما را به مفهوم *تانسور معکوس* رهنمون می‌سازد: اگر

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E},$$

آن‌گاه $\mathbf{A}^{-1}$ معکوس $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود. معکوس تانسور نیز یک تانسور است. یک حالت ویژه مهم وقتی اتفاق می‌افتد که ماتریس تانسور به صورت *ماتریس قطری* باشد. اگر در دستگاه مختصات دکارتی $\mathbf{i}_i$ داشته باشیم:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i$$

آن‌گاه ماتریس متناظر به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j^{-1} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j$$

با ماتریس متناظر زیر:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix}$$

و با تشکیل ضرب داخلی $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i \cdot \sum_{j=1}^3 \lambda_j^{-1} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{i}_i \sum_{j=1}^3 \lambda_j^{-1} (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{i}_i \lambda_i^{-1} \mathbf{i}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i \\ &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

این بدان معنا است که $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ به طور متناظر،

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تمرین ۳-۳ برای تانسورهای معکوس پذیر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ فرمول زیر را به دست آورید.

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

تانسور مرتبه دوم $\mathbf{A}$ تکین نامیده می شود اگر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ برای برخی $\mathbf{x} \neq 0$. از این رو $\mathbf{A}$ غیر تکین است اگر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ فقط وقتی که $\mathbf{x} = 0$. یادآوری می کنیم که ماتریس A غیر تکین است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$. ارتباط بین کاربردهای این اصطلاح در دو

زمینه به شرح زیر بیان می‌شود. اگر یک نمایش ترکیبی از تانسور $\mathbf{A}$ را داشته باشیم، معادله $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ یک مجموعه از معادلات همزمان بر حسب مولفه‌های $\mathbf{x}$ را ایجاد می‌کند که این معادلات دارای جواب غیر بدیهی است اگر و فقط اگر دترمینان ماتریس ضریب (یعنی نمایش ماتریسی $\mathbf{A}$) صفر باشد. علاوه بر این، با در نظر گرفتن نمایش‌های دیگری از $\mathbf{A}$ و نمایش دوگان بردار، دوباره به نتایج مشابهی بر اساس دترمینان می‌رسیم. این موضوع کاربرد جمله "تکین" مربوط به تانسور $\mathbf{A}$ را نشان می‌دهد. طبق تعریف، دترمینان تانسور مرتبه دوم $\mathbf{A}$ که با $\det \mathbf{A}$ نمایش داده می‌شود با دترمینان ماتریس مولفه‌های ترکیبی آن برابر است:

$$\det \mathbf{A} = |a_i^j| = |a_m^k| = \frac{1}{g} |a_{st}| = g |a^{pq}|.$$

تساوی اول تعریفی است بر اساس موارد ذکر شده، بررسی مابقی را به خواننده واگذار می‌کنیم. فرمول‌های متفاوت دیگری همانند:

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{mnp} a_m^i a_n^j a_p^k$$

می‌تواند بر اساس دترمینان به‌دست آید.

این بخش را با تذکر مهمی به پایان می‌رسانیم. تمام خواص مورد نظر هر تانسور و نحوه عملیات تانسوری در هر دستگاه مختصات را می‌توان به‌دست آورد. اغلب استفاده از دستگاه مختصات دکارتی مرسوم در نظر گرفته می‌شود. اما اگر معادله یا عبارتی را با استفاده از دستگاه مختصات دکارتی به‌دست آوریم و بتوان در ادامه این نتیجه را در دستگاه غیر مختصات نمایش داد، آن‌گاه بیان دقیقی از موضوع خواهیم داشت. همان‌گونه که پیشتر گفته شد، تانسور دارای ماهیت وجودی است و در نهایت تمام نتایج وابسته به آنها باید مستقل از دستگاه باشد.

۳-۳ مولفه‌های دوتایی تحت تبدیل

برای به‌دست آوردن قوانین تبدیل، نقطه نظری وجود دارد که در هر فضا، تانسوری با هر پایه دارای عنصر یکسانی است و فقط (۳-۱) و قوانینی را برای بردارهایی که می‌توانند

تحت قوانین تبدیل قرار گیرند به صورت مولفه‌های یک تانسور به دست آورده‌ایم. ابتدا با تبدیل مولفه‌ها وقتی پایه متقابل وجود دارد، شروع می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$a_{ij} e^i e^j = a^{ij} e_i e_j$$

و ضرب نقطه‌ای را همانند (۲-۳) و (۳-۳) در نظر می‌گیریم:

$$e_k \cdot a_{ij} e^i e^j \cdot e_m = e_k \cdot a^{ij} e_i e_j \cdot e_m.$$

این رابطه ایجاب می‌کند:

$$a_{ij} (e_k \cdot e^i) (e^j \cdot e_m) = a^{ij} (e_k \cdot e_i) (e_j \cdot e_m),$$

بنابراین

$$a_{km} = a^{ij} g_{ki} g_{jm}.$$

مشاهده می‌شود که مولفه‌های تانسور متریک در این تبدیل وجود دارد.

اکنون، وقتی تغییر پایه دارای شکل کلی زیر باشد، می‌توان فرمول‌هایی برای تبدیل مولفه‌های تانسور ساخت:

$$e_i = A_i^j \tilde{e}_j.$$

از

$$\tilde{a}^{ij} \tilde{e}_i \tilde{e}_j = a^{km} e_k e_m = a^{km} A_k^p \tilde{e}_p A_m^q \tilde{e}_q$$

به دست می‌آوریم:

$$\tilde{a}^{ij} = a^{km} A_k^i A_m^j. \quad (۸-۳)$$

به طور مشابه، تبدیل معکوس

$$\tilde{e}_j = A_i^j e_i$$

منجر می‌شود به

$$a^{ij} = \tilde{a}^{km} \tilde{A}_k^i \tilde{A}_m^j. \quad (۹-۳)$$

معادله‌های (۳-۸) و (۳-۹) با هم نتیجه می‌دهند:

$$A_j^k \tilde{A}_k^i = \delta_j^i.$$

عبارت‌های مختلف **A**.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{kl} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^l = a_i^{\cdot j} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = a_l^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^l \\ &= \tilde{a}^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \tilde{a}_{kl} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^l = \tilde{a}_i^{\cdot j} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \tilde{a}_l^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^l, \end{aligned}$$

منجر به فرمول‌های تبدیلی دیگری همانند:

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{A}_i^k \tilde{A}_j^l a_{kl}, \quad a_{ij} = A_i^k A_j^l \tilde{a}_{kl},$$

9

$$\tilde{a}_i^{\cdot j} = \tilde{A}_i^k \tilde{A}_l^j a_k^{\cdot l}, \quad \tilde{a}_{\cdot j}^i = A_k^i \tilde{A}_j^l a_{\cdot l}^k.$$

می‌شود.

با یادآوری اصطلاح بخش ۲-۵، دلیل نامگذاری a_{ij} به مولفه‌های هم‌ورد و به مولفه‌های پادورد $\mathbf{A}$ ، مشاهده می‌شود. مولفه‌های $a_i^{\cdot j}$ و $a_{\cdot j}^i$ مولفه‌های ترکیبی نامیده می‌شوند.

خلاصه کوتاه

داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \tilde{a}^{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{a}_{kl} \tilde{\mathbf{e}}^k \tilde{\mathbf{e}}^l = \tilde{a}_i^{\cdot j} \tilde{\mathbf{e}}^i \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{a}_l^k \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}^l \\ &= a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{kl} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^l = a_i^{\cdot j} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = a_l^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^l, \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{ij} &= A_k^i A_l^j a^{kl}, & a^{ij} &= \tilde{A}_k^i \tilde{A}_l^j \tilde{a}^{kl}, \\ \tilde{a}_{ij} &= \tilde{A}_i^k \tilde{A}_j^l a_{kl}, & a_{ij} &= A_i^k A_j^l \tilde{a}_{kl}, \\ \tilde{a}_i^{\cdot j} &= A_k^i \tilde{A}_j^l a_{\cdot l}^k, & a_i^{\cdot j} &= \tilde{A}_k^i A_j^l \tilde{a}_{\cdot l}^k, \\ \tilde{a}_{\cdot j}^i &= \tilde{A}_i^k A_l^j a_{\cdot l}^k, & a_{\cdot j}^i &= A_i^k \tilde{A}_l^j \tilde{a}_{\cdot l}^k. \end{aligned}$$

تمرین ۳-۴ (الف) قانون تبدیل زیر را بر حسب نمادگذاری ماتریسی بیان کنید.

$$\tilde{b}^{ij} = A_k^i A_m^j b^{km}$$

(ب) مساله را برای قانون تبدیل به شکل زیر، تکرار کنید.

$$\tilde{b}_{ij} = \tilde{A}_i^k \tilde{A}_j^m b_{km}.$$

تمرین ۳-۵ مقادیر A_i^j تبدیلی از یک پایه به پایه دیگر را می‌دهد. آنها تبدیل فضایی را که به صورت عملگر می‌باشد، تعریف می‌کنند و در نتیجه یک تانسور مرتبه دوم خواهیم داشت. این تانسور را با مولفه‌های A_i^j بنویسید. مساله را برای تبدیل معکوس تکرار کنید.

۳-۴ عملگرهای دوتایی دیگر

ضرب نقطه‌ای دو جفت ab و cd به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ab \cdot cd = (b \cdot c)ad.$$

نتیجه حاصل ضرب یک جفت با ضریب $b \cdot c$ است. بسط این تعریف و فرمول‌های (۳-۱) و (۳-۲) با توجه به عمل جمع بر روی جفت‌ها و بردارها (با استفاده از (۳-۱) و قوانین برداری) تعدادی قانون را ارائه می‌دهد که از ضرب نقطه‌ای پیروی می‌کند. فرض کنیم A و B جفت، a و b بردار و λ و μ اعداد حقیقی باشند. در این صورت:

$$A \cdot (\lambda a + \mu b) = \lambda A \cdot a + \mu A \cdot b,$$

$$(\lambda A + \mu B) \cdot a = \lambda A \cdot a + \mu B \cdot a.$$

برای ضرب نقطه‌ای با ترتیب‌های متقابل، اتحادهای مشابهی برقرار است. این نتایج نشان می‌دهند که در هنگام کار با این عملگرها، خاصیت خطی بودن در نظر گرفته شده است.

اکنون به شباهت نزدیک ضرب نقطه‌ای و ضرب ماتریسی می‌پردازیم. با حالت ساده دستگاه مختصات دکارتی شروع می‌کنیم. جفت A و بردار b را در نظر گرفته و آنها را نسبت به پایه i_k بیان می‌کنیم:

$$A = a^{km} i_k i_m, \quad b = b^j i_j.$$

با در نظر گرفتن

$$c = A \cdot b \quad (۳-۱۰)$$

داریم

$$c^k i_k = a^{km} i_k i_m \cdot b^j i_j$$

به طوری که

$$c^k = \sum_{j=1}^3 a^{kj} b^j.$$

(نماد جمع را وارد کردیم زیرا j در دو موقعیت بالایی قرار گرفته و جمع‌بندی معمولی به کار گرفته نمی‌شود). دستگاه سه معادله‌ای زیر به دست می‌آید:

$$c^1 = a^{11}b^1 + a^{12}b^2 + a^{13}b^3,$$

$$c^2 = a^{21}b^1 + a^{22}b^2 + a^{23}b^3,$$

$$c^3 = a^{31}b^1 + a^{32}b^2 + a^{33}b^3,$$

یا

$$\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}.$$

پس یک معادله ماتریسی به شکل زیر خواهیم داشت:

$$c = Ab \quad (۱۱-۳)$$

که c و b بردارهای ستونی و ماتریسی 3×3 است. از (۱۰-۳) و (۱۱-۳) شباهت بین ضرب نقطه‌ای و ضرب ماتریسی دیده می‌شود. این شباهت برای دستگاه‌های غیر دکارتی نیز قابل بسط است. پس به عنوان مثال می‌توان نوشت:

$$A = a^{km} e_k e_m, \quad b = b_j e^j.$$

در این حالت $c = A \cdot b$ ایجاب می‌کند:

$$c^k e_k = a^{km} e_k e_m \cdot b_j e^j = a^{km} e_k \delta_m^j b_j,$$

بنابراین

$$c^k = a^{kj} b_j.$$

پس معادله ماتریسی متناظر عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}.$$

با درک مناسبی می‌توان این عبارت را همانند (۳-۱۱) نوشت. باید توجه داشت آنچه که به‌دست آمد بر اساس این موضوع بود که جفت و بردار برحسب مولفه‌های همورد بیان شدند:

$$\mathbf{A} = a_{km} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m, \quad \mathbf{b} = b_j \mathbf{e}^j.$$

به‌دست می‌آوریم:

$$c_k = a_{km} g^{mj} b_j$$

و تانسور متریک به‌دست می‌آید. شکل ماتریس متناظر به‌صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

از آنجایی که اندیس مولفه برداری تانسور متریک قابل افزایش است، اغلب این معادلات را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$c_k = a_{km} b^m$$

9

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}.$$

اکنون ضرب نقطه‌ای دو جفت را بررسی می‌کنیم. برای مولفه‌های جفت

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

بسته به چگونگی انتخاب بیان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ، حالت‌های مختلفی وجود دارد. اگر تمام مولفه‌های پادهمورد را به‌کار ببریم و بنویسیم:

$$\mathbf{A} = a^{km} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{B} = b^{km} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m,$$

آن‌گاه

$$\mathbf{C} = c^{kn} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_n$$

که

$$c^{kn} = a^{km} g_{mj} b^{jn}.$$

به طور مشابه، به کارگیری مولفه های همورد همانند

$$\mathbf{A} = a_{km} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m, \quad \mathbf{B} = b_{km} \mathbf{e}^m,$$

به

$$\mathbf{C} = c_{kn} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^n$$

منجر می شود، که

$$c_{kn} = a_{km} g^{mj} b_{jn}.$$

مولفه های ترکیبی وقتی ظاهر می شوند که داشته باشیم:

$$\mathbf{A} = a^{km} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m, \quad \mathbf{B} = b_{km} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m.$$

پس

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a^{km} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m \cdot b_{jn} \mathbf{e}^j \mathbf{e}^n = a^{km} \delta_m^j b_{jn} \mathbf{e}_k \mathbf{e}^n = a^{kj} b_{jn} \mathbf{e}_k \mathbf{e}^n.$$

با تعریف

$$c_{,n}^k = a^{kj} b_{jn}$$

داریم

$$\mathbf{C} = c_{,n}^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^n.$$

بقیه حالت های دیگر را به خواننده واگذار می کنیم.

تمرین ۳-۶ (الف) چگونگی به دست آمدن فرمول $c_{,n}^k = a^{kj} b_{jn}$ را بحث کنید. (ب) چگونگی ضرب ماتریسی متناظر با تمام شکل های بالا را نشان دهید. (پ) اگر مولفه های ترکیبی در سمت راست عبارت $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به کار گرفته شود، چه اتفاقی رخ می دهد؟ ضرب دو نقطه ای عملگر مفید دیگری است که می تواند بین دو تانسور اعمال شود. اگر $\mathbf{ab}$ و $\mathbf{cd}$ جفت باشند، تعریف می کنیم:

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

یعنی، ابتدا بردارهای نزدیک به هم را و سپس بقیه را ضرب نقطه ای می کنیم، که حاصل به صورت عدد به دست می آید.

تمرین ۳-۷ (الف) اگر $\mathbf{A}$ تانسور مرتبه دو باشد، $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ را محاسبه کنید. ارتباط بین رد ماتریس نمایش دهنده $\mathbf{A}$ بر حسب مولفه های ترکیبی چگونه است؟ (ب) فرض

کنید A و B تانسورهای مرتبه دو باشند. چند شکل مختلف مولفه ای را برای کمیت $A \cdot B$ بنویسید.

اما عملگر دیگری به صورت ضرب عددی تانسورهای مرتبه دو A و B وجود دارد که با $A \cdot B$ نمایش داده می‌شود. ضرب عددی بیان کننده بسط طبیعی عملگر زیر بین جفت‌های ab و cd است:

$$ab \cdot cd = (a \cdot c)(b \cdot d)$$

۳-۵ خواص تانسورهای مرتبه دو

اکنون می‌خواهیم به جزییات بیشتری از پرکاربردترین تانسورها، تانسورهای مرتبه دو، بپردازیم. ابتدا یادآور می‌شویم که چنین تانسوری برحسب جفت‌ها به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = a^{ij} e_i e_j.$$

احتمالاً تانسورهایی را که در علوم کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرد، با نمایش ماتریسی زیر بیان می‌شود:

$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix}. \quad (۱۲-۳)$$

وقتی از شکل ماتریسی (۱۲-۳) استفاده می‌کنیم، پایه جفت تانسور به صورت ضمنی است. البته هنگام استفاده از دستگاه منحصر بفرد برای فضای برداری، مثلاً دکارتی، نشان دادن جفت‌ها اهمیت چندانی ندارد. پیشنهاد ایده‌های شناخته شده از نظریه ماتریس‌ها را می‌توان توسط تناظر بین جفت و نمایش‌های ماتریسی ارائه داد.

ترانهاد تانسور

با مفهوم ترانهاد شروع می‌کنیم. برای ماتریس $A = (a^{ij})$ ، ماتریس ترانهاد A^T عبارت است از:

$$A^T = (a^{ji}).$$

به طور مشابه، عملگر ترانهاد را برای تانسور $\mathbf{A}$ تعریف می کنیم:

$$\mathbf{A}^T = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (۱۳-۳)$$

این عملگر بر حسب نمایشی از اندیس های متناظر با ترتیب معکوس، تانسور جدیدی را به دست می دهد:

$$\mathbf{A}^T = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{ji} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = a_{ji}^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = a_j^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j.$$

رابطه مفیدی برای تانسور مرتبه دو $\mathbf{A}$ و هر بردار $\mathbf{x}$ عبارت است از:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^T. \quad (۱۴-۳)$$

رابطه بالا با $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k$ و استفاده از (۱۳-۳) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\mathbf{A}^T = a^{ij} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i.$$

معادله (۱۴-۳) را می توان برای تعریف ترانهاد به کار برد. همچنین باید توجه داشت که برای هر تانسور مرتبه دو $\mathbf{A}$ داریم:

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

تمرین ۳-۸ فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تانسورهای مرتبه دو باشند. نشان دهید که:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}.$$

تمرین ۳-۹ فرض کنید $\mathbf{A}$ تانسور مرتبه دو باشد. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ را بیابید. نشان دهید که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{A} = 0$.

تمرین ۳-۱۰ (الف) اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تانسورهای مرتبه دو باشند، نشان دهید که:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

(ب) فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردار بوده و $\mathbf{C}$ تانسور مرتبه دو باشد. نشان دهید که:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}.$$

(پ) اگر $\mathbf{A}$ یک تانسور غیر تکین مرتبه دو باشد، نشان دهید که مولفه های تانسور $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ توسط فرمول های زیر به دست می آید:

$$b_i^j = \frac{1}{2 \det \mathbf{A}} \varepsilon_{ikl} \varepsilon^{jmn} a_m^k a_n^l.$$

(ت) روابط زیر را تحقیق کنید:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}^{-1} &= (\det \mathbf{A})^{-1}, & (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \\ (\mathbf{A}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^T, & (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A}. \end{aligned}$$

افزایش توانی تانسورها

مشابه با جبر ماتریسی می توان تانسور را به توان عدد صحیح مثبتی رساند.

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{A}^4 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^3,$$

توجه داشته باشید که $\mathbf{A}^k$ هنوز نمایش دهنده یک عملگر خطی است. توان های

صحیح منفی به صورت افزایش توان های صحیح مثبت $\mathbf{A}^{-1}$ تعریف می شوند:

$$\mathbf{A}^{-2} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{A}^{-3} = \mathbf{A}^{-2} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{A}^{-4} = \mathbf{A}^{-3} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

این عملگرها را می توان با استفاده از بسط تیلور توابع مقدماتی برای ساختن تابع های تانسوری به کار برد. برای مثال:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

با توجه به رابطه بالا می توان تابع نمایی تانسور $\mathbf{A}$ را به صورت زیر معرفی کرد:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots$$

اساس موضوع همگرایی چنین سری هایی شبیه همگرایی مطلق سری های معمولی است که از نرم تانسور $\mathbf{A}$ استفاده می شود (بخش ۳-۱۲ را ببینید). توجه داشته باشید که $e^{\mathbf{A}}$ نمایشی از یک عملگر خطی است. توابع دیگر را می توان به طور مشابه تعریف کرد. به عنوان مثال، این روش در مطالعه کشسانی غیر خطی استفاده می شود.

تانسورهای متقارن و پاد متقارن

تانسورهای متقارن در بین تمامی رده های تانسورهای مرتبه دو، نقش مهمی را ایفا می کنند. این تانسورها، تانسورهای کشش و تنش موجود در نظریه کشسانی را شامل می شود. تانسور اینرسی چون تانسور متریک است پس متقارن است. تمام این تانسورها در رابطه زیر صادق هستند:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

اگر $\mathbf{A}$ متقارن باشد، رابطه بالا را در (۳-۱۴) جایگذاری کنیم:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (۳-۱۵)$$

و

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}) \quad (۳-۱۶)$$

خواننده به یاد می آورد که تانسور یک $\mathbf{E}$ در رابطه‌ای به شکل (۳-۱۵) صدق می کند. تانسور $\mathbf{A}$ پاد متقارن نامیده می شود اگر:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T.$$

تمرین ۳-۱۱ ماتریس های متناظر با حالت های تانسورهای متقارن و پاد متقارن را ارائه دهید. برای یک تانسور متقارن چه تعدادی از مؤلفه ها می توانند به طور مستقل مشخص شوند؟ برای تانسور پاد متقارن چطور؟

تانسورهای متقارن و پاد متقارن به طور طبیعی در علوم فیزیک ظاهر می شوند. در ضمن خواص آنها در زیر نشان داده شده است.

قضیه ۳-۱ هر تانسور مرتبه دوم را می توان به صورت مجموع تانسورهای متقارن و پاد متقارن تجزیه کرد:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

جایی که $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ و $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^T$.

اثبات: قرار می دهیم

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T),$$

□

و تمامی گزاره ها را بررسی می کنیم.

به عنوان مثال جفت $\mathbf{ab}$ را می توان به بخش های متقارن و پاد متقارن به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\mathbf{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}).$$

تمرین ۳-۱۲ اگر A متقارن و B پاد متقارن باشد. نشان دهید $A \cdot B = 0$.

تمرین ۳-۱۳ اگر تانسور مرتبه دوم A با قسمت متقارنش جایگزین شود، نشان دهید که شکل مربعی $x \cdot A \cdot x$ تغییر نمی‌کند.

با فرض اینکه $C = c^{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j$ یک تانسور پاد متقارن در دستگاه دکارتی باشد، می‌توانیم مطابق فرمول‌های

$$\omega^1 = c^{32}, \quad \omega^2 = c^{13}, \quad \omega^3 = c^{21},$$

بردار زیر را بسازیم:

$$\omega = \omega^k \mathbf{i}_k.$$

به آسانی و به‌طور مستقیم می‌توان بررسی کرد که

$$C \cdot x = \omega \times x, \quad x \cdot C = x \times \omega,$$

که x یک بردار دلخواه است. این فرمول‌ها در شکل غیر مختصاتی نیز نوشته می‌شوند، بنابراین آنها در هر دستگاهی برقرارند. خواننده می‌تواند برای هر دستگاه دلخواه فرمول‌هایی برای ω ، که بردار مزدوج نامیده می‌شود را به‌دست آورد.

ضرب‌های خارجی تانسور $A = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ و بردار x توسط فرمول زیر تعریف می‌شوند.

$$A \times x = a^{ij} \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \times x), \quad x \times A = a^{ij} (x \times \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i.$$

تمرین ۳-۱۴ نشان دهید $C = E \times \omega = \omega \times E$.

۳-۶ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تانسور مرتبه دوم متقارن

اکنون این سؤال که کدامین پایه شکل ساده‌تری از تانسور را به‌دست می‌دهد را بررسی می‌کنیم. چون سؤال مشابه در نظریه ماتریس‌ها به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، مرتبط است، این مفاهیم را برای تانسورها تعمیم می‌دهیم. دوتایی

$$(\lambda, x) \quad (x \neq 0)$$

زوج ویژه نامیده می‌شود اگر معادله زیر برقرار باشد

$$A \cdot x = \lambda x. \quad (17-3)$$

بنابراین x یک بردار ویژه A است اگر عمل A روی x بردار متناسب با x را به‌دست دهد. معادله (۱۷-۳) را نیز می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0.$$

تمرین ۳-۱۵ جفت ویژه جفت ab را بیابید. اکنون قرار گرفتن یک بردار در سمت چپ را امتحان می‌کنیم: $x \cdot ab = \lambda x$. باید بدانید که این بردار ویژه با قبلی متفاوت است و بنابراین معرفی بردارهای ویژه چپ و راست با معنی است. در حالتی که تانسور متقارن باشد این بردارهای ویژه منطبق‌اند.

مقادیر ویژه تانسور مرتبه دوم A جواب‌های معادله مشخصه A می‌باشند که به صورت زیر به دست می‌آیند. شکل مؤلفه‌ای (۳-۱۷) عبارت است از

$$a^{ij} e_i e_j \cdot x^k e_k = \lambda x^i e_i$$

یا

$$a^{ij} g_{jk} x^k e_i = \lambda x^k \delta_k^i e_i.$$

با نوشتن این رابطه به شکل

$$(a_{.k}^i - \lambda \delta_k^i) x^k = 0,$$

دستگاهی از سه معادله همزمان با سه متغیر x^k را خواهیم داشت. یک جواب نابدیهی داریم اگر و فقط اگر دترمینال ماتریس ضرایب صفر شود:

$$\begin{vmatrix} a_{.1}^1 - \lambda & a_{.2}^1 & a_{.3}^1 \\ a_{.1}^2 & a_{.2}^2 - \lambda & a_{.3}^2 \\ a_{.1}^3 & a_{.2}^3 & a_{.3}^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

این معادله مشخصه A می‌باشد. با نوشتن این معادله به شکل

$$-\lambda^3 + I_1(A)\lambda^2 - I_2(A)\lambda + I_3(A) = 0 \quad (۳-۱۸)$$

توجه داشته باشیم که این معادله بر حسب جملاتی از مؤلفه‌های ترکیبی تانسور بیان شده است. بهر حال این مشخص کننده خواص تانسور بوده و دارای خواص ناورد است، زیرا مقادیر ویژه یک تانسور به دستگاه مختصات به دست آورنده آنها بستگی ندارد.

توجه می‌کنیم که این معادله بر حسب λ مکعبی است، بنابراین حداکثر سه مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ داریم. ضریب‌های $I_1(\mathbf{A})$ ، $I_2(\mathbf{A})$ و $I_3(\mathbf{A})$ اولین، دومین و سومین پایای $\mathbf{A}$ نام دارند و توسط فرمول‌های ویژه بر حسب مقادیر ویژه بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2(\mathbf{A}) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ I_3(\mathbf{A}) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

بعد از نمایش تانسور در شکل قطبی به آسانی می‌توان مشاهده نمود که $I_1(\mathbf{A})$ و $I_3(\mathbf{A})$ به ترتیب رد و دترمینال تانسور $\mathbf{A}$ می‌باشند.

در حقیقت،

$$I_1(\mathbf{A}) = \text{tr} \mathbf{A}, \quad I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} [\text{tr}^2 \mathbf{A} - \text{tr} \mathbf{A}^2], \quad I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}.$$

در کشسانی غیرخطی، پایاها و مقادیر ویژه تانسورها نقش مهمی در فرمول بندی قوانین گوناگون ساختاری ایفا می‌کنند. به عنوان مثال، مراجع آلری (۱۹۹۰)، لری (۲۰۰۵)، اوگدن (۱۹۹۷) [ملاحظه شوند].

تمرین ۳-۱۶ تانسور $\mathbf{A}$ وقتی پایه دکارتی مخصوصی در نظر گرفته شود دارای ماتریس زیر است

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

اولین، دومین و سومین پایاهای اصلی $\mathbf{A}$ را بیابید.

مهمترین تانسورهای مرتبه دوم از نظر کاربردی، ماتریس‌های متقارن و مقدار حقیقی می‌باشند. این‌ها دارای خواص ویژه‌ای می‌باشند. برای تانسور مقدار حقیقی که به عنوان یک عملگر در فضای مختلط $\mathbb{C}^3$ در نظر گرفته می‌شود، فرمول‌هایی مشابه با (۳-۱۶) خواهیم داشت:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x} \cdot \overline{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{y})}. \quad (۳-۱۹)$$

این مطلب در ادامه بکار خواهد رفت. یادآوری می‌کنیم که بار بر روی یک عبارت دلالت بر مزدوج مختلط دارد.

قضیه ۲-۳ مقادیر ویژه یک تانسور متقارن حقیقی، حقیقی می‌باشند. علاوه بر این، بردارهای متناظر با مقادیر ویژه متمایز متعامد می‌باشند.

اثبات. فرض کنیم A یک تانسور متقارن حقیقی و λ یک مقدار ویژه از A باشد که متناظر با بردار ویژه $x \neq 0$ است بنابراین

$$A \cdot x = \lambda x.$$

با ضرب نقطه‌ای دو طرف این معادله در $\bar{x}$ خواهیم داشت:

$$\lambda = \frac{(A \cdot x) \cdot \bar{x}}{x \cdot \bar{x}}.$$

اکنون ثابت می‌کنیم که λ حقیقی است. در حقیقت، $\lambda \neq \bar{\lambda}$ مستلزم آن است که $x \cdot \bar{x} = 0$ باشد. برای

مشاهده مقدار حقیقی بودن $(A \cdot x) \cdot \bar{x}$ ، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} (A \cdot x) \cdot \bar{x} &= x \cdot \overline{(A \cdot x)} \\ &= \overline{(A \cdot x) \cdot x} \end{aligned}$$

(از خاصیت ضرب داخلی در فضای خطی مختلط و سپس (۳-۱۹) استفاده کرده‌ایم). چون مقدار ویژه λ مثبت است، مؤلفه‌های بردارهای ویژه در یک دستگاه معادلات خطی همزمان با ضرایب حقیقی صادق‌اند، لذا آنها نیز حقیقی می‌باشند.

برای اثبات قسمت دوم قضیه، فرض می‌کنیم

$$A \cdot x_1 = \lambda_1 x_1, \quad A \cdot x_2 = \lambda_2 x_2,$$

که $\lambda_1 \neq \lambda_2$. از این‌ها به‌دست خواهیم آورد

$$\lambda_1 x_1 \cdot x_2 = (A \cdot x_1) \cdot x_2, \quad \lambda_2 x_2 \cdot x_1 = (A \cdot x_2) \cdot x_1,$$

و تفاضل آنها ایجاب می‌کند که

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot A \cdot x_1 - x_1 \cdot A \cdot x_2 = 0.$$

از این‌رو

$$x_1 \cdot x_2 = 0.$$

(۳-۲۰)

از (۲۰-۳) می‌توان خواص دیگری از بردارهای ویژه x_1, x_2 که به متعامد تعمیم یافته معروف است را به دست آورد:

$$x_1 \cdot A \cdot x_2 = 0.$$

این رابطه که برای بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز یک تانسور متقارن حقیقی A برقرار است در کاربردها مفید است.

تمرین ۳-۱۷ نشان دهید که در هر تانسور مرتبه دوم A (نه لزوماً متقارن)، بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز مستقل‌اند.

در حل معادله مشخصه بر حسب λ ، می‌توان دریافت که سه جواب متمایز یا کمتر وجود دارد. توجه داشته باشیم که اگر x یک بردار ویژه A باشد، آن‌گاه αx برای هر $\alpha \neq 0$ نیز چنین است. به بیان دیگر، یک بردار ویژه در حد ضرب یک ثابت معین می‌شود. بنابراین هرگاه مقادیر ویژه متمایز باشند، می‌توان دستگاهی مختصات دکارتی از بردارهای ویژه متعامد x_k ساخت و سپس تانسور A را برحسب مؤلفه‌های a_{ji} به صورت زیر بیان کرد:

$$A = \sum a_{ji} x_i x_j.$$

چون دستگاه x_k دکارتی است، پایه متقابل نیز چنین بوده و می‌توانیم مؤلفه‌های A را از رابطه زیر محاسبه کنیم.

$$a_{ij} = x_i \cdot A \cdot x_j$$

چون x_i ها نیز بردار ویژه هستند، می‌توانیم بنویسیم

$$A \cdot x_j = \lambda_j x_j,$$

ضرب داخلی در x_i از سمت چپ به دست می‌دهد

$$x_i \cdot A \cdot x_j = x_i \cdot \lambda_j x_j = \lambda_j \delta_i^j.$$

بنابراین ضرایب جفت $x_i x_j$ در A ، فقط وقتی غیر صفر هستند که آنها در روی قطر اصلی ماتریس متناظر A قرار گیرند، علاوه براین، این درایه‌های قطری مقادیر ویژه A می‌باشند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i x_i. \quad (۲۱-۳)$$

این رابطه نمایش متعامد A نامیده می‌شود. بردارهای ویژه سازنده دستگاه مختصات، محورهای اصلی A را می‌دهند و فرایند مراجعه به محورهای اصلی‌اش را به‌عنوان قطری سازی می‌شناسند.

وقتی معادله مشخصه یک تانسور کمتر از سه ریشه برای λ داشته باشد، آن‌گاه مقادیر ویژه تکراری تباهیده نام دارند. اگر A متقارن باشد، می‌توان A را برحسب پایه دکارتی نمایش داده و حقایق نظریه ماتریس‌های متقارن را به‌کار گرفت. متناظر با یک ریشه چندگانه از معادله مشخصه، یک زیر فضا از بردارهای ویژه را خواهیم داشت. اگر $\lambda_1 = \lambda_2$ یک ریشه مضاعف باشد، آن‌گاه این زیر فضا دو بعدی است و می‌توان یک زوج متعامد که بر بردار ویژه سوم عمود هستند را انتخاب کرد (چون λ_1 و λ_3 متمایز هستند). چنین مقادیر ویژه متناظر با دو بردار ویژه مستقل خطی به‌عنوان مقدار ویژه چندگانه در نظر گرفته می‌شود (چندگانگی دو). اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ، آن‌گاه هر برداری یک بردار ویژه است، و با انتخاب یک دستگاه دکارتی یک مقدار ویژه از چندگانگی سه خواهیم داشت. به‌رحال، این حالت زمانی پدیدار می‌شود که تانسور مورد بررسی با تانسور یک E متناسب باشد. چنین تانسوری، تانسور گوی نام دارد.

تمرین ۳-۱۸ به‌طور مستقیم نشان دهید که یک تانسور مرتبه دوم (نه لزوماً متقارن) با داشتن سه مقدار ویژه متمایز، متناظر با هر مقدار ویژه دارای بیش از یک بردار ویژه مستقل خطی نیست.

۳-۷ قضیه کیلی - هامیلتون

قضیه کیلی - هامیلتون بیان می‌کند که هر ماتریس مربعی در معادله مشخصه خود صدق می‌کند. برای مثال ماتریس 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

دارای معادله مشخصه زیر است

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0,$$

و قضیه کیلی-هامیلتون می‌گوید که خود A در رابطه زیر صدق می‌کند

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0,$$

که در اینجا I ماتریس 2×2 است و صفر سمت راست دلالت بر ماتریس صفر دارد. به‌طور مشابه، قضیه کیلی-هامیلتون برای یک تانسور مرتبه دوم A که معادله مشخصه آن توسط $(3-18)$ داده شده است بیان می‌کند که A در معادله زیر صدق می‌کند

$$-A^3 + I_1(A)A^2 - I_2(A)A + I_3(A)E = 0. \quad (3-22)$$

این رابطه به ما اجازه می‌دهد که A^3 را بر حسب توان‌هایی کوچکتر A نمایش دهیم. علاوه بر این، می‌توان $(3-22)$ را در A ضرب کرده و سپس A^4 را بر حسب توان‌های کمتر A نمایش داد. آشکار است که می‌توان این روند را ادامه داد و نهایتاً هر توان مورد نظر A را بر حسب E ، A و A^2 بیان کرد. این در کاربردهای بخصوصی مفید است (به‌عنوان مثال، گشتاور غیر خطی) جایی که توابع تانسور توسط سری تیلور کوتاه شده به‌طور تقریبی نمایش داده می‌شوند.

به آسانی می‌توان قضیه کیلی-هامیلتون را برای حالت تانسور متقارن اثبات کرد. چنین تانسور A دارای نمایش $(3-21)$ است که $\mathbf{i}_i = \mathbf{x}_i$ ، زیرا بردارهای ویژه $\mathbf{x}_i$ تشکیل یک پایه متعامد یکه می‌دهند:

$$A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i.$$

داریم

$$A^2 = A \cdot A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i \cdot \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j = \sum_{i,j=1}^3 \lambda_i \lambda_j \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j \delta_j^i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i.$$

به‌طور مشابه

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i. \quad (3-23)$$

به معادله $(3-18)$ برمی‌گردیم و با نوشتن مقدار ویژه i ام در عبارت $(3-23)$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^3 &= \sum_{i=1}^3 \left[I_1(\mathbf{A})\lambda_i^2 - I_2(\mathbf{A})\lambda_i + I_3(\mathbf{A}) \right] \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i \\
 &= I_1(\mathbf{A}) \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i - I_2(\mathbf{A}) \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i + I_3(\mathbf{A}) \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i \\
 &= I_1(\mathbf{A}) \mathbf{A}^2 - I_2(\mathbf{A}) \mathbf{A} + I_3(\mathbf{A}) \mathbf{E},
 \end{aligned}$$

همانطور که خواسته شده بود.

تمرین ۳-۱۹ اگر $\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2$ ، با به کارگیری قضیه کیلی-هامیلتون، $\mathbf{A}^3$ را بر حسب $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{E}$ و $\mathbf{A}^2$ بنویسید.

۳-۸ خواص دیگر تانسورهای مرتبه دوم

تانسورهای دوران

تانسور مرتبه دوم $\mathbf{Q}$ متعامد نامیده می‌شود اگر در معادله زیر صدق کند

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}.$$

مشاهده می‌شود که برای هر تانسور متعامد

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}.$$

علاوه بر این

$$\det \mathbf{Q} = \pm 1.$$

در حقیقت، $\det \mathbf{Q}$ توسط دترمینالهای ماتریسهای ترکیبی مؤلفه‌های $\mathbf{Q}$ معین می‌شود. به دلیل خواص دترمینال یک ماتریس و تناظر بین تانسورها و ماتریسها، برای تانسورهای مرتبه دوم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ داریم:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

و

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T.$$

بنابراین

$$1 = \det \mathbf{E} = \det \mathbf{Q} \det \mathbf{Q}^T = (\det \mathbf{Q})^2$$

همانطوری که خواسته شده بود. تانسور Q را تانسور متعامد سره نامیم اگر $\det Q = +1$ ؛ تانسور Q را تانسور متعامد ناسره نامیم اگر $\det Q = -1$.

تمرین ۳-۲۰ (الف) نشان دهید که تانسور $Q = -i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$ متعامد است. آیا این تانسور ناسره است؟ (ب) اگر Q متعامد باشد نشان دهید

$$q_{ij} q^{kj} = \delta_i^k$$

(پ) اگر Q متعامد باشد نشان دهید که Q^n نیز برای هر عدد صحیح n چنین است. اکنون تانسور متعامد Q را به عنوان یک عملگر در فضای همه بردارها در نظر می گیریم. قضیه ۳-۳ عملگر تعریف شده توسط تانسور متعامد Q حافظ اندازه بردارها و زاویه های بین آنها است.

اثبات. نتیجه حاصل از به کارگیری Q روی دو طرف ضرب داخلی $x \cdot y$ را در نظر بگیرید:

$$(Q \cdot x) \cdot (Q \cdot y) = (x \cdot Q^T) \cdot (Q \cdot y) = x \cdot Q^T \cdot Q \cdot y = x \cdot E \cdot y = x \cdot y.$$

ابتدا برای اینکه نشان دهیم Q حافظ اندازه، بردار است، قرار می دهیم $y = x$:

$$|Q \cdot x|^2 = |x|^2.$$

بنابراین، با توجه به تعریف ضرب داخلی بر حسب کسینوس، زاویه ها نیز حفظ می شوند. □

عمل Q بر دوران تمام بردارهای فضا دلالت می کند. (به طور دقیق تر این حالتی برای تانسور متعامد سره است، درحالی که تانسور ناسره به دلیل تغییر دستی دستگاه مختصات باعث بازتاب محوری می شود.) این وضعیت مشابه حالت جسم جامدی است که با مکان نقطه ای به صورت برداری با ابتدای واقع در مبدا ثابت دستگاه مختصات و انتهایی که بر نقطه قرار دارد، تعریف می شود. هر نوع حرکت جسم جامد با نقطه ای ثابت به صورت دورانی است نسبت به محوری که با زاویه ای مشخص می شود. اغلب معادلات فیزیک به گونه ای معرفی می شوند که تحت دوران دستگاه مختصات با مکان نامعین در فضا، ناوردا باقی می مانند. چنین ناوردایی تحت دوران قابل اثبات است و در بخش بزرگی از آن با نمایش به کارگیری Q برای تمام بردارهای مرتبط که نمی تواند تغییری در شکل روابط به وجود آورد، قابل انجام است.

توجه داشته باشید که برخی کمیت ها همیشه تحت دوران ناورداد هستند. یکی از آنها، اولین ناوردای $I_1(\mathbf{A})$ برای یک تانسور است. این کمیت که رد تانسور نامیده می شود و با $\text{tr}(\mathbf{A})$ نمایش داده می شود، با جمع مولفه های ترکیبی قطر $\mathbf{A}$ برابر است:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_i^i.$$

در شکل غیر مختصاتی می توان رد را به صورت معادل زیر نوشت:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$$

(خواننده می تواند آن را به دست آورد). برای نشان دادن ناوردایی تانسور زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q} \cdot (a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{Q}^T \\ &= a^{ij} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Q}^T) \\ &= a^{ij} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j). \end{aligned}$$

مشاهده می شود، این رابطه نمایشی از یک تانسور دوران یافته است که به عنوان نتیجه ای از به کارگیری $\mathbf{Q}$ برای هر بردار مولفه های جفت $\mathbf{A}$ به دست می آید. رد تانسور دوران یافته با رابطه زیر بیان بیان می شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) &= \mathbf{E} \cdot (\mathbf{Q} \cdot a_i^j \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{Q}^T) \\ &= \mathbf{E} \cdot a_i^j (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^i) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j). \end{aligned}$$

دستگاه مختصات $\mathbf{e}_i$ در اثر عمل $\mathbf{Q}$ به دستگاه مختصات $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i$ تبدیل می شود، به طوری که پایه متقابل آن برابر $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^i$ است. این بدان معنا است که در حالت خاص تانسور یک (تانسور متریک!) به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^i) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^j) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j).$$

این رابطه ایجاب می کند که

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) &= [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^k)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k)] \cdot a_i^j (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^i)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j) \\
&= a_i^j [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^i)] [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^k) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j)] \\
&= a_i^j [(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^i)] [(\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j)] \\
&= a_i^j [\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^i] [\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j] \\
&= a_i^j [\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^i] [\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j] \\
&= a_i^j [\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^i] [\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j] \\
&= a_i^j \delta_k^i \delta_j^k \\
&= a_k^k \\
&= \text{tr}(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

مثال دیگری توصیف می‌کند که مقادیر ویژه تانسور $\mathbf{A}$ تحت تبدیل $\mathbf{Q}$ ثابت باقی می‌ماند درحالی که مقادیر ویژه $\mathbf{x}_i$ دوران می‌یابد. در حقیقت فرض کنید:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i &= \lambda_i \mathbf{x}_i. \\
\text{نشان می‌دهیم که } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_i &\text{ بردار ویژه } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^\perp \text{ است:} \\
(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^\perp) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_i) &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^\perp \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_i \\
&= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}_i \\
&= \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i) \\
&= \mathbf{Q} \cdot (\lambda_i \mathbf{x}_i) \\
&= \lambda_i (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_i).
\end{aligned}$$

فرض کنید $\mathbf{e}$ محور دورانی است که توسط تانسور متعامد $\mathbf{Q}$ تعریف شده و ω زاویه دوران حول $\mathbf{e}$ باشد. می‌توان نشان داد که تانسور متعامد سره دارای نمایش زیر است:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} \cos \omega + (1 - \cos \omega) \mathbf{e} \mathbf{e} - \mathbf{e} \times \mathbf{E} \sin \omega.$$

تجزیه قطبی

تانسور مرتبه دو $\mathbf{A}$ نامنفرد است، اگر:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

که A ماتریس مولفه‌های ترکیبی A است. این امکان وجود دارد که چنین تانسوری را بتوان به صورت حاصل ضرب یک تانسور متقارن در تانسور دیگر بیان کرد. گزاره‌ای از این نتیجه که به عنوان قضیه تجزیه قطبی شناخته می‌شود، نیاز به معرفی برخی اصطلاحات بیشتر دارد. تانسور متقارن اگر تمام مقادیر ویژه آن مثبت باشد، معین مثبت نامیده می‌شود. چنین تانسور S را می‌توان با تجزیه متعامد به صورت زیر نوشت:

$$S = \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3,$$

که تمام $\lambda_i > 0$ و بردارهای ویژه $\mathbf{i}_k$ تشکیل یک پایه متعامد را می‌دهند. اگر A نامنفرد باشد آن‌گاه تانسور $A \cdot A^T$ متقارن و معین مثبت است. تقارن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T.$$

برای معین مثبت بودن از تعریف زیر از مقدار ویژه λ :

$$(A \cdot A^T) \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

شروع کرده و با ضرب نقطه‌ای $\mathbf{x}$ از سمت چپ به دست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{\mathbf{x} \cdot (A \cdot A^T) \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}.$$

صورت کسر مثبت است، زیرا:

$$\mathbf{x} \cdot (A \cdot A^T) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot A) \cdot (A^T \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot A) \cdot (\mathbf{x} \cdot A) = |\mathbf{x} \cdot A|^2.$$

در نتیجه تمام مقادیر ویژه λ از $A \cdot A^T$ مثبت هستند. اکنون قطری سازی $A \cdot A^T$ نشان می‌دهد که آن معین مثبت است.

با در دست داشتن این حقایق می‌توان به نتیجه اصلی رسید.

قضیه ۳-۴ هر تانسور نامنفرد مرتبه دو A را می‌توان به صورت حاصل ضرب یک تانسور متعامد در یک تانسور متقارن معین مثبت نوشت. تجزیه را می‌توان به دو روش انجام داد:

د/د: به صورت تجزیه قطبی چپ

$$A = S \cdot Q \quad (۲۴-۳)$$

یا به صورت تجزیه قطبی راست

$$A = Q \cdot S'. \quad (۲۵-۳)$$

در اینجا Q تانسور متعامد مرتبه دو بوده و S و S' تانسورهای معین مثبت و متقارن هستند.

اثبات. به علت اینکه $A \cdot A^T$ متقارن و معین مثبت است، داریم:

$$A \cdot A^T = \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3,$$

که $\mathbf{i}_k$ ها متعامد هستند. تعریف می کنیم:

$$S = (A \cdot A^T)^{1/2} = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \sqrt{\lambda_2} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \sqrt{\lambda_3} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$$

چون λ_i ها مثبت هستند. مشاهده می شود که S^{-1} موجود و برابر است با:

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3.$$

حال قرار می دهیم:

$$Q \equiv S^{-1} \cdot A.$$

برای متعامد بودن Q ، می نویسیم:

$$\begin{aligned} Q \cdot Q^T &= (S^{-1} \cdot A) \cdot (S^{-1} \cdot A)^T \\ &= (S^{-1} \cdot A) \cdot (A^T \cdot (S^{-1})^T) \\ &= S^{-1} \cdot (A \cdot A^T) \cdot (S^T)^{-1} \\ &= S^{-1} \cdot S^2 \cdot S^{-1} \\ &= E. \end{aligned}$$

در نتیجه همانند (۳-۲۴) عبارت $A = S \cdot Q$ را خواهیم داشت. درستی (۳-۲۵) با تعریف $S' \equiv Q^T \cdot S \cdot Q$ به دست می آید.

تمرین ۳-۲۱ اگر تمام مقادیر ویژه تانسوری مثبت باشد، آن را تانسور معین مثبت می نامند. تعریف دیگر این است که A معین مثبت است اگر برای $x \neq 0$ داشته باشیم $x \cdot (A \cdot x) > 0$. این موضوع را تشریح کنید.

به عنوان کاربردی از تجزیه قطبی می توان نشان داد که با عمل کردن تانسور نامنفرد A بر روی بردارهای مکان نقاط کره واحد، بردارهای مکان تعریف شده ای بر روی یک بیضی گون به وجود می آید. اگر r مشخص کننده هر نقطه بر روی کره واحد باشد، آن گاه:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1. \quad (۲۶-۳)$$

فرض کنید $\mathbf{x}$ تصویر $\mathbf{r}$ تحت $\mathbf{A}$ باشد:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}.$$

در این صورت $\mathbf{r} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{x}$ و با جایگذاری آن در (۲۶-۳) به همراه (۲۴-۳) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1 &= [(\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{x}] \cdot [(\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{x}] \\ &= \mathbf{x} \cdot \{ [(\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q})^{-1}]^T \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q})^{-1} \} \cdot \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} \cdot \{ \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1} \} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

(خواننده می‌تواند جزییات گفته نشده را به دست آورد). به دلیل اینکه:

$$\mathbf{S} = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \sqrt{\lambda_2} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \sqrt{\lambda_3} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3,$$

با بسط در دستگاه مختصات دکارتی $\mathbf{i}_k$ به همراه:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{i}_i, \quad \mathbf{S}^{-1} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j$$

رابطه بالا $\mathbf{x} \cdot \{ \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1} \} \cdot \mathbf{x} = 1$ به شکل زیر کاهش می‌یابد:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} x_i^2 = 1.$$

این معادله یک بیضی گون است.

پیش زمینه معرفی اندازه گیری‌های تغییر شکل در مکانیک پیوسته غیرخطی توسط تجزیه قطبی فراهم می‌شود.

نمایش تانسوری گوی و منحرف شونده

$\mathbf{A}$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} I_1(\mathbf{A}) \mathbf{E} + \text{dev} \mathbf{A}.$$

چنین نمایشی در نظریه کشسانی مفید است. از این گذشته، در فرمول بندی معادلات اساسی نظریه‌های پلاستیکی شدن، جابه‌جایی و کشسانی چسبندگی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تانسور $\text{dev} \mathbf{A}$ توسط تساوی بالا تعریف می‌شود. این کمیت دارای بردارهای ویژه همانند $\mathbf{A}$ است اما مقادیر ویژه آن با مقادیر ویژه $\mathbf{A}$ به اندازه $(1/3)I_1(\mathbf{A})$ متفاوت است:

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A}.$$

۳-۹ تعمیم ایده جفت

تانسورهای مرتبه سوم را می‌توان به‌روش موازی با جفت‌های معرفی شده در بخش ۱-۳ ارایه داد. همانند آنچه گفته شد، کمیت‌های *تر/یاد* از نوع را می‌توان با استفاده از ضرب تانسوری معرفی کرد:

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}$$

در اینجا $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردار هستند. با بسط این بردارها برحسب پایه $\mathbf{e}_i$ به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{R} = a^i b^j c^k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k.$$

در نتیجه می‌توان یک فضای خطی را در نظر گرفت که پایه آن مجموعه‌ای از ۲۷ کمیت $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ است و آن را فضای تانسورهای مرتبه سوم می‌نامند. در ادامه، به مقادیر عددی $a^i b^j c^k$ به‌عنوان مولفه‌های تانسور رجوع می‌کنیم. عنصر کلی این فضا، تانسور $\mathbf{R}$ مرتبه سه، دارای نمایش زیر است:

$$\mathbf{R} = r^{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k. \quad (۲۷-۳)$$

خاصیت واقعی $\mathbf{R}$ که به‌صورت برجسته خودنمایی می‌کند، در هنگام تغییر دستگاه مختصات منجر به تبدیل مناسب مولفه‌ها می‌شود. اکنون با انجام روش آشنا جایگذاری:

$$\tilde{r}^{ijk} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_j \tilde{\mathbf{e}}_k = r^{mnp} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \mathbf{e}_p$$

تحت تغییر دستگاه مختصات:

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \tilde{\mathbf{e}}_j$$

به دست می آوریم:

$$\tilde{r}^{ijk} = r^{mnp} A_m^i A_n^j A_p^k$$

که بسط مستقیمی از (۳-۸) است. با نمایش جایگزین (۳-۲۷) بر حسب مولفه های پادهمورد، می توان نمایش نوع همورد آن را به کار برد:

$$\mathbf{R} = r_{ijk} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k$$

یا یکی از نمایش های ترکیبی زیر:

$$\mathbf{R} = r_{..k}^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k, \quad \mathbf{R} = r_{.jk}^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k.$$

این عبارت ها، قوانین تبدیل متناظر را ایجاب می کنند:

$$\tilde{r}_{ijk} = r_{mnp} \tilde{A}_i^m \tilde{A}_j^n \tilde{A}_k^p$$

9

$$\tilde{r}_{..k}^{ij} = r_{..p}^{mn} A_m^i A_n^j A_k^p, \quad \tilde{r}_{.jk}^i = r_{.np}^m A_m^i \tilde{A}_j^n \tilde{A}_k^p,$$

که به آسانی قابل بررسی هستند.

ضرب های نقطه ای مربوط به ترایادها از قوانین آشنایی پیروی می کنند. ضرب نقطه ای یک ترایاد با یک بردار توسط فرمول زیر داده می شود:

$$abc \cdot \mathbf{x} = ab(c \cdot \mathbf{x}),$$

در حالی که ضرب نقطه ای دوگانه یک ترایاد با یک جفت به صورت زیر بیان می شود:

$$abc \cdot \cdot xy = a(c \cdot \mathbf{x})(b \cdot \mathbf{y}).$$

همچنین می توان ضرب نقطه ای سه گانه یک ترایاد با یک ترایاد دیگر را به صورت زیر تعریف کرد:

$$abc \dots xyz = (c \cdot \mathbf{x})(b \cdot \mathbf{y})(a \cdot \mathbf{z}).$$

ضرب عددی ترایادها توسط قانون زیر تعریف می شود:

$$abc \cdot xyz = (a \cdot \mathbf{x})(b \cdot \mathbf{y})(c \cdot \mathbf{z}).$$

تاکنون خواننده حدس زده که مرتبه هر تانسور همواره برابر تعداد اندیس های آزادی است که مشخص کننده مولفه های آن است. به عنوان مثال، هر بردار تانسوری از مرتبه یک است. در فصل ۲ همچنین با کمیتی روبرو شدیم که مولفه های آن توسط سه

اندیس ε_{ijk} مشخص می‌شوند. این کمیت که به‌طور طبیعی در مبحث ضرب خارجی برداری رخ می‌دهد، به‌عنوان تانسور لوی-سیویتا شناخته شده و به‌صورت زیر است:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k.$$

تمرین ۲۲-۳ بررسی کنید که $\varepsilon = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}$.

تمرین ۲۳-۳ فرمول‌های زیر را برای عملگرهای شامل تانسور لوی-سیویتا بررسی کنید.

$$(\text{الف}) \quad \varepsilon \dots xyz = x \cdot (y \times z)$$

$$(\text{ب}) \quad \varepsilon \dots xy = y \times x$$

$$(\text{پ}) \quad \varepsilon \cdot x = -x \times$$

توجه: نماد (پ) توضیح بیشتری نیاز دارد. نتیجه تاثیر تانسور مرتبه سوم ε بر روی بردار x با تانسور مرتبه دوم $\varepsilon \cdot x$ برابر است. وقتی $\varepsilon \cdot x$ بر روی بردار دیگر y اثر می‌کند، معادل با ضرب خارجی $y \times x$ می‌شود. این موضوع معنی سمت راست (پ) است. گرچه این نماد مناسب نمی‌باشد، اما بندرت اتفاق می‌افتد که عمل برخی تانسورها به‌صورت عمل دو بردار تشریح شود و تضمین کننده بسط نماد خاصی نمی‌باشد.

۳-۱۰ تانسورهای مرتبه چهارم و بالاتر

به‌وضوح می‌توان رفتار کنونی تانسورها را به مرتبه‌های مورد نظر بسط داد. اکنون با استفاده از تانسورهای مرتبه چهارم، نقاط اساسی را بررسی می‌کنیم.

تانسور مرتبه چهارم C را می‌توان توسط چندین نوع از مولفه‌ها نمایش داد:

$$c^{ijkl}, \quad c_i^{jkl}, \quad c_{ij}^{kl}, \quad c_{ijk}^{l}, \quad c_{ijkl}$$

اولین و آخرین به‌ترتیب کاملاً پاهمورد و کاملاً همورد هستند، در حالی که سه تای دیگر به‌صورت ترکیبی از اندیس‌هایی با مکان‌های متفاوت می‌باشند. این مولفه‌ها همانند قبل نمایش دهنده C نسبت به پایه‌های مختلف می‌باشد، به‌عنوان مثال:

$$C = c^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l.$$

ضرب‌های داخلی آنها در بردارها همانند قبل تعریف می‌شود: قاعده به‌صورت ساده ضرب نقطه‌ای نزدیکترین بردارهای پایه‌ای به علامت ضرب داخلی است. نحوه

به کارگیری چنین عملیاتی باعث می‌شود که بتوانیم نتایجی را از انواع گوناگونی به دست آوریم. برای مثال، ضرب داخلی تانسور مرتبه چهارم در یک بردار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \\ &= c^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \cdot x_m \mathbf{e}^m \\ &= c^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \delta_l^m x_m \\ &= c^{ijkl} x_l \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

که یک تانسور مرتبه سه است. به طور مشابه، ضرب داخلی تانسور مرتبه سوم در یک بردار برابر تانسور مرتبه دوم می‌شود. هر جا از ضرب داخلی استفاده شود، خاصیت‌های خطی حالت پیشین حفظ می‌شود.

اغلب در کاربردها از ضرب‌های دو نقطه‌ای نیز استفاده می‌شود. به عنوان مثال در کشسانی با ضرب دو نقطه‌ای تانسور ثابت‌های کشسانی در تانسور کشش، برخورد می‌کنیم. در حالت کلی شکل قانون هوک به صورت زیر است:

$$\sigma = \mathbf{C} \cdot \cdot \varepsilon$$

که σ تانسور تنش، $\mathbf{C}$ تانسور ثابت‌های کشسانی و ε تانسور کشش است. چگالی تابع انرژی درونی (کشسانی) در کشسانی خطی برابر است با:

$$\frac{1}{2} \sigma \cdot \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{C} \cdot \cdot \varepsilon) \cdot \cdot \varepsilon.$$

به دلیل اینکه σ و ε متقارن هستند، عبارت آخر را می‌توان به شکل متقارن‌تری نوشت:

$$\frac{1}{2} \varepsilon \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \varepsilon$$

که نتیجه به مرتبه عملیات انجام شده، بستگی ندارد.

تانسورهای ایزوتروپیک

مواد ایزوتروپ در مهندسی نقش مهمی را ایفا می‌کنند. اینها موادی هستند که در تمام جهت‌ها دارای خواص یکسانی هستند. برای مثال هوا ایزوتروپ است زیرا دارای شفافیت

مساوی در تمام جهتها است. دوران گوی که از ماده ایزوتروپ ساخته تحت هر زاویه‌ای غیر ممکن است. خواص مواد در مکانیک از طریق روابط اصلی بیان می‌شود. از نقطه نظر ریاضی، ماده‌ای ایزوتروپ است که معادلات اصلی آن تحت تبدیلات به خصوص دوران‌ها و بازتاب‌های آینه‌ای، ناورد باشد.

ابتدا این سوال را بررسی می‌کنیم که چه موقع کمیت‌های تانسوری مختلف می‌توانند ایزوتروپ باشند. تانسوری/ایزوتروپ نامیده می‌شود که مولفه‌های منفرد آن تحت تمام دوران‌ها و بازتاب‌های آینه‌ای ممکن در $\mathbb{R}^3$ ناورد باشد.

هر کمیت عددی، ایزوتروپ است. آشکار است که بردار $\mathbf{0}$ تنها بردار ایزوتروپ است. فرض کنید که $\mathbf{A}$ تانسور مرتبه دوم است که بر حسب پایه‌های $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{A} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

یادآور می‌شویم که هر دوران یا بازتاب آینه‌ای از $\mathbb{R}^3$ به صورت یکتا با تانسور متعامد $\mathbf{Q}$ تعریف می‌شود. با به کارگیری $\mathbf{Q}$ بر روی هر یک از بردارهای پایه به دست می‌آوریم:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k.$$

بر حسب پایه جدید داریم:

$$\mathbf{A} = \tilde{a}^{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_j.$$

فرض کنیم $\mathbf{A}$ ایزوتروپ باشد. به کمک تعریف بالا بایستی $\tilde{a}^{ij} = a^{ij}$ را داشته باشیم. بنابراین:

$$\mathbf{A} = \tilde{a}^{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_j = a^{ij} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{Q} \cdot (a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{Q}^T.$$

این بدان معنا است که $\mathbf{A}$ ایزوتروپ است اگر و فقط اگر معادله زیر برای هر تانسور متعامد $\mathbf{Q}$ برقرار باشد:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

از روی درک کلی می‌توان فهمید که تانسور متریک $\mathbf{E}$ که شبیه تانسور یکه است بایستی ایزوتروپ باشد. اکنون این موضوع را بررسی می‌کنیم. برای هر تانسور متعامد $\mathbf{Q}$ داریم:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}.$$

که به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

بنابراین $\mathbf{E}$ ایزوتروپ است. اگر λ عدد باشد، آن گاه به سادگی دیده می شود که تانسور گوی $\lambda \mathbf{E}$ نیز ایزوتروپ است.

متاسفانه در تمرین زیر این موضوع خیلی بدیهی بیان نشده است. این تمرین بیان می کند که هر تانسور مرتبه دوم ایزوتروپ به صورت $\lambda \mathbf{E}$ است.

تمرین ۳-۲۴ نشان دهید که $\mathbf{A}$ تانسور مرتبه دوم ایزوتروپ است اگر و فقط اگر به صورت تانسور گوی باشد، یعنی، $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}$ برای برخی عدد λ .

تحت هر تبدیل متعامد $\mathbf{Q}$ از $\mathbb{R}^3$ ، تانسور مرتبه چهارم

$$\mathbf{C} = c^{ijmn} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$$

به صورت زیر می شود:

$$\mathbf{C} = \tilde{c}^{ijmn} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_m) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_n).$$

از تعریف کلی می فهمیم که این تانسور ایزوتروپ است اگر $\tilde{c}^{ijmn} = c^{ijmn}$ برای هر $\mathbf{Q}$. شکل کلی تانسور ایزوتروپ مرتبه چهارم در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر است:

$$\alpha \mathbf{E} \mathbf{E} + \beta \mathbf{e}_k \mathbf{E} \mathbf{e}^k + \gamma \mathbf{I}, \quad (28-3)$$

که α, β, γ عددهای اختیاری هستند [جفریز (۱۹۳۱)]. اثبات این موضوع پیچیده بوده و از آن صرف نظر می کنیم. خواص تانسورها به صورت نمایشی در تمرین های ۳-۲۷، ۳-۲۸ و ۳-۲۹ آمده است. این حقیقت می تواند در به کارگیری تانسور ثابت های کشسانی در مواد ایزوتروپ استفاده شود. کمیت های σ و ε را در فصل ۶ بیشتر مورد بررسی قرار می دهیم.

۳-۱۱ تابع های شناسه های تانسوری

خواننده با نمادگذاری تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ با n متغیر آشنا است. اگر x_k را بر حسب مولفه های برداری زیر در نظر بگیریم:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

در نتیجه می‌توان f را به عنوان تابعی از شناسه برداری x بیان کرد:

$$f = f(x).$$

اما تعریف خوب منطقی از چنین تابعی توسط الزام فیزیکی اعمال می‌شود که باعث می‌شود تا f از نمایش x برحسب پایه مستقل شود.

به‌طور مشابه می‌توان تابعی از یک یا چند شناسه تانسوری را در نظر گرفت. با داشتن پایه ثابت، چنین تابعی به تابعی با چند متغیر که مولفه‌های آن شناسه‌های تانسوری است، کاهش می‌یابد. اما دوباره یک تابع واقعی از شناسه تانسوری نمی‌تواند به نمایش‌های پایه از شناسه آن وابسته باشد.

برای بسط بیشتر این مفهوم، توابعی را در نظر می‌گیریم که دارای مقادیری در مجموعه بردارها یا حتی تانسورها باشد. چنین توابعی در کاربردها ظاهر می‌شوند. برای مثال بردار نیروی $f = f(t)$ را می‌توان به‌صورت تابعی از زمان t نشان داد. سپس با توابع دیگری روبرو می‌شویم که دارای مقادیری در مجموعه تانسورها با مرتبه‌های دیگر هستند. با توجه این مطالب می‌توان تابع را برحسب مقدار عددی، مقدار برداری یا مقدار تانسوری بیان کرد.

همانند هر تابع چند متغیره می‌توان از ابزار حسابان توابع مقدار تانسوری استفاده کرد. این مطلب شامل پیوستگی، دیفرانسیل مرتبه اول و مشتقات است. این موضوعات در ادامه بررسی می‌شوند.

توابع خطی

در کشسانی خطی و نظریه پوسته خطی، روابط خطی و توابع مربعی (همانند آنچه در عبارت‌های انرژی کششی رخ می‌دهد) نقش اصلی را ایفا می‌کنند. یک تابع خطی از متغیرهای تانسوری را می‌توان به عنوان تابع f در نظر گرفت به طوری که برای تانسورهای A, B ، عددهای λ, μ رابطه زیر برقرار باشد:

$$f(\lambda A + \mu B) = \lambda f(A) + \mu f(B).$$

این عبارت مشابه تعریف عملگری ماتریس خطی است. از این نقطه نظر اگر $b = 0$ ، معادله $y = kx + b$ نشان دهنده یک تابع خطی است.

قضیه ۳-۵ فرض کنیم f یک تابع مقدار عددی از آرگومان برداری $\mathbf{x}$ باشد. عنصر یکتای $\mathbf{c}$ وجود دارد به طوریکه برای هر $\mathbf{x}$ ،

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}. \quad (3-29)$$

اثبات. $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k \mathbf{e}_k$ را بر حسب پایه $\mathbf{e}_k$ بسط می‌دهیم. خطی بودن ایجاب می‌کند که

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^k f(\mathbf{e}_k) \quad \text{معادله (3-29) با } \mathbf{c} = f(\mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \text{ برقرار است. با فرض وجود}$$

داشتن دو بردار $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ که $\mathbf{x} = \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{x}$ و جایگذاری $\mathbf{x} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$ ، $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ را به دست می‌آوریم.

اکنون یک تابع مقدار عددی که آرگومان آن تانسور مرتبه دو $\mathbf{A}$ است را در نظر می‌گیریم. آشکار است که برای هر تانسور مرتبه دو $\mathbf{B}$ ، تابع زیر خطی است:

$$f(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T$$

تمرین ۳-۲۵ نشان دهید که $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$.

قضیه ۳-۶ فرض کنیم f یک تابع مقدار عددی از تانسور مرتبه دو $\mathbf{A}$ است. تانسوری یکتای مرتبه دو $\mathbf{B}$ وجود دارد به طوریکه برای هر $\mathbf{A}$ داریم:

$$f(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T). \quad (3-30)$$

اثبات به خواننده واگذار می‌شود.

نمایش هر تابع مقدار تانسوری از یک آرگومان تانسوری به صورت مشابه است. از این مطلب برای تانسور ثابت های کشسانی در حالت کشسانی خطی استفاده می‌شود.

قضیه ۳-۷ فرض کنیم $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{A})$ تابع خطی از مجموعه تانسورهای مرتبه دو $\mathbf{A}$ به همان مجموعه تانسورهای مرتبه دو باشد. تانسور مرتبه چهار $\mathbf{C}$ وجود دارد که برای

هر $\mathbf{A}$ ،

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^T. \quad (3-31)$$

اثبات. با نوشتن $\mathbf{A} = a^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$ و معرفی $\mathbf{C}$ به صورت فرمول زیر،

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n.$$

به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{F}(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n \cdot a^{ij} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \mathbf{F}(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) a^{mn} = \mathbf{F}(\mathbf{A}).$$

بنابراین نمایش برقرار است. اثبات یکتایی به خواننده واگذار می‌شود.

تمرین ۳-۲۶ عملگری روی مجموعه بردارهای x توسط فرمول $y = B \cdot x$ داده می‌شود به‌طوری‌که B یک تانسور مرتبه دو است. این مطلب را می‌توان با توجه به معادله $Y = B \cdot X^T$ برای مجموعه تانسورهای مرتبه دو بسط داد. نشان دهید که با استفاده از تانسور مرتبه چهار $C = B \cdot e^n E e_n$ برای هر X به‌دست می‌آوریم $C \cdot X^T = B \cdot X^T$. توجه داشته باشید که تنها با استفاده از عملیات $B \cdot X$ نمی‌توان قانون هوک را نمایش دهد.

با توجه به مطالب قبل، می‌دانیم که شکل کلی تانسور مرتبه چهار همگن از سه تانسور مستقل همگن تشکیل شده است. در تمرین‌های زیر، خاصیت‌های آنها آورده شده است.

تمرین ۳-۲۷ با استفاده از (۳-۳۱) نشان دهید که عملگر همانی برابر $I = e_k e_m e^k e^m$ است، یعنی برای هر A داریم $I \cdot A^T = A$.

تمرین ۳-۲۸ یک تابع خطی به‌صورت اتحاد $F(A) = A^T$ تعریف می‌شود. نشان دهید که تانسور مرتبه چهار متناظر برابر $e_k E e^k$ است، به عبارت دیگر نشان دهید:

$$e_k E e^k \cdot A^T = A^T.$$

تمرین ۳-۲۹ یک تابع خطی به‌صورت $F(A) = (\text{tr} A)E$ تعریف می‌شود. نشان دهید که تانسور مرتبه چهار متناظر برابر EE است، به عبارت

$$EE \cdot A^T = (\text{tr} A)E.$$

تابع‌های مقدار عددی همگن

هر تابع عددی از تانسور همگن نامیده می‌شود در صورتی که شکل آن تحت تبدیل متعامد فضایی ثابت باقی بماند (یا به‌طور معادل پایه آن ثابت باقی بماند).

تابع مقدار عددی $f(A)$ از آرگومان مرتبه دو A همگن است اگر و فقط اگر برای هر تانسور متعامد Q داشته باشیم:

$$f(A) = f(Q \cdot A \cdot Q^T).$$

اکنون اثبات می‌کنیم که هر مقدار ویژه λ از تانسور مرتبه دو A هنگامی که به‌صورت تابع مقدار عددی از A (یعنی $\lambda = f(A)$) در نظر گرفته می‌شود، همگن است. درحقیقت، هر مقدار ویژه در معادله مشخصه زیر صدق می‌کند:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

مقادیر ویژه $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

اتحاد زیر نشان می‌دهد که مقادیر ویژه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T$ در معادله یکسانی صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{E}) &= \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T) \\ &= \det[\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T] \\ &= (\det \mathbf{Q})^2 \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \\ &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}). \end{aligned}$$

پس این مقادیر ویژه بر هم منطبق هستند.

تمرین ۳-۳۰ نشان دهید که ناورداهای $I_1(\mathbf{A}), I_2(\mathbf{A}), I_3(\mathbf{A})$ توابع همگنی از $\mathbf{A}$ هستند.

می‌توان نشان داد که هر تابع همگن مقدار عددی از تابع مرتبه دو با تابعی از ناورداهای برابر است [لری (۱۹۹۰)، اوگدن (۱۹۹۷)، تروسدل و نول (۲۰۰۴)]. این‌ها در کشسانی غیر خطی برای معرفی معادلات ساختاری اجسام همگن استفاده می‌شود. هر تابع خطی مقدار عددی با استفاده از قضیه ۳-۶ برای یک تانسور مرتبه دو $\mathbf{B}$ دارای نمایش زیر است:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T.$$

قضیه ۳-۸ تابع $f(\mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T$ همگن است اگر و فقط اگر $\mathbf{B}$ یک تانسور مرتبه دو همگن بوده و در نتیجه تانسور گوی $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{E}$ می‌شود.

اثبات. به دلیل همگن بودن f برای هر تانسور متعامد $\mathbf{Q}$ ، داریم:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T)^T$$

با استفاده از:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} B \cdot (Q \cdot A \cdot Q^T)^T &= \text{tr}(B \cdot Q \cdot A \cdot Q^T) \\ &= \text{tr}(Q^T \cdot B \cdot Q \cdot A) \\ &= (Q^T \cdot B \cdot Q) \cdot A^T. \end{aligned}$$

بنابراین برای هر A داریم:

$$B \cdot A^T = (Q^T \cdot B \cdot Q) \cdot A^T.$$

اما این رخ می دهد اگر و فقط اگر رابطه زیر برای هر Q برقرار باشد:

$$B = Q^T \cdot B \cdot Q$$

بنابراین B همگن است.

تمرین ۳-۳۱ نشان دهید که هر تابع همگن خطی مقدار عددی از تانسور مرتبه دو A به صورت تابع خطی از $\text{tr} A$ است: یعنی $f(X) = \lambda \text{tr} X$.
اگر شکل تابع عددی تحت برخی زیر گروه های تبدیلات متعامد ثابت باقی بماند، در نتیجه می توان توابعی یافت که تحت این زیر گروه ها ناوردا باشند. خوانند می تواند کاربردهای این ایده را در کتاب های مربوط به بلورشناسی و کشسانی پیدا کند.

توابع مقدار تانسوری همگن

اکنون تابع F را که دامنه و برد آن برابر مجموعه تانسورهای مرتبه دو است، در نظر می گیریم. $F(A)$ همگن نامیده می شود اگر مولفه های مقدار تصویر آن از یک پایه دکارتی به پایه دیگر تغییر نکند. پس F همگن است اگر برای هر تانسور متعامد Q رابطه زیر برقرار باشد:

$$F = (Q \cdot A \cdot Q^T) = Q \cdot F(A) \cdot Q^T$$

$F = \lambda A$ مثالی از تابع مقدار تانسوری همگن است.

با توجه به تابع مقدار عددی می توان نشان داد تابع خطی مقدار تانسوری F که بر حسب تانسور مرتبه چهار C نشان داده می شود:

$$F = C \cdot A^T,$$

همگن است اگر و فقط اگر C همگن بوده و بنابراین توسط رابطه (۳-۲۸) داده می شود. پس F به صورت زیر است:

$$F(A) = \alpha E \operatorname{tr} A + \beta A^T + \gamma A.$$

دانشمندان علم مکانیک توابعی را به خدمت می‌گیرند که دامنه و برد آنها می‌تواند مجموعه‌هایی از تانسورهای متقارن باشد. این موضوع باعث اعمال محدودیت‌های اضافی معین بر شکل C می‌شود. در حقیقت $A = A^T$ و $F(A) = F(\tilde{A})$ را خواهیم داشت. با استفاده از نمایش زیر:

$$F(A) = c^{ijmn} a_{mn} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j$$

با پایه دکارتی $\mathbf{i}_i$ ، مشاهده می‌شود که:

$$c^{ijmn} = c^{jimn} = c^{ijnm}.$$

در حالت کلی C دارای ۸۱ مولفه مستقل است. اما با در نظر گرفتن تقارن C تنها دارای ۳۶ مولفه مستقل است. هر تانسور مرتبه چهار همگن C که شرایط تقارن را برآورده می‌کند، به شکل زیر است:

$$\alpha EE + \beta(e_k E e^k + I).$$

بنابراین شکل کلی هر تابع خطی همگن که در شرط تقارن صدق می‌کند، به صورت زیر است:

$$F(A) = \alpha E \operatorname{tr} A + 2\beta A.$$

عناصر حسابان را برای توابعی از آرگومان‌های تانسوری تعریف خواهیم کرد. ابتدا، روشی برای سنجش اندازه بردار یا تانسور لازم داریم. نرم‌هایی مناسبی برای این هدف وجود دارد.

۳-۱۲ نرم‌های مربوط به تانسورها و برخی فضاها

در بخش ۲-۷ نرمی را در فضای $\mathbb{R}^3$ تعریف کردیم. بی‌درنگ می‌توان این تعریف را برای هر k به فضای $\mathbb{R}^k$ بسط داد:

$$\|x\| = (x \cdot x)^{1/2},$$

در اینجا ضرب داخلی x و y در فضا به صورت $x \cdot y$ داده می‌شود.

به طور مشابه می توان نرم و ضرب داخلی را در مجموعه تانسورهای مرتبه دو تعریف کرد. ضرب داخلی با (A, B) نمایش داده شده و با به کارگیری ضرب نقطه‌ای تعریف می شود:

$$\begin{aligned}(A, B) &= A \cdot B^T \\ &= a^{ij} e_i e_j \cdot b^{ts} e_s e_t \\ &= a^{ij} b^{ts} g_{js} g_{it} \\ &= a_{ij} b_{ts} g^{js} g^{it} \\ &= a^{ij} e_i e_j \cdot b_{ts} e^s e^t \\ &= a^{ij} b_{ts} \delta_j^s \delta_i^t \\ &= a^{ij} b_{ij}.\end{aligned}$$

آشکار است که در دستگاه مختصات دکارتی (A, A) با جمع مجذور تمام مولفه‌های A برابر است، در نتیجه با ضرب عددی بردارها کاملاً شباهت دارد. با استفاده از دلیل مشابه با آنچه در بالا آمد، می توان نشان داد که اصول ضرب عددی نیز برقرار است (توجه داشته باشید تنها با به کارگیری دستگاه مختصات دکارتی، مولفه‌ای تانسور به عنوان برداری با نه بعد در نظر گرفته می شود که این دلیل دیگری بر برقرار بودن این اصول است). در این حالت اصول ضرب داخلی برای تانسورهای مرتبه دلخواه A, B, C به صورت زیر نوشته می شود:

$$(A, A) \geq 0 \text{ و } (A, A) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } A = 0 \quad (i)$$

$$(A, B) = (B, A) \quad (ii)$$

$$(\alpha A + \beta B, C) = \alpha (A, C) + \beta (B, C) \quad (iii)$$

در جبر خطی، عبارت زیر:

$$\|A\| = (A, A)^{1/2}$$

نرمی در مجموعه تانسورهای مرتبه دو است. این نرم در اصول زیر صادق است:

$$\|A\| \geq 0 \text{ و } \|A\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } A = 0 \quad (i)$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad (ii)$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\text{iii})$$

نامساوی شوارتز همچنان برقرار است:

$$\|(A, B)\| \leq \|A\| \|B\|.$$

در جبر خطی، ابزارهای خاص متعددی برای بردار و نرم‌های برداری قابل تعریف است. این امر را می‌توان در هر دستگاه ثابتی انجام داد اما اگر بخواهیم دستگاه را تحت ملاحظات تغییر دهیم باید یادآور شویم که این نرم‌ها بر اساس قوانین تبدیل تانسور تغییر می‌کنند.

توجه داشته باشید که در نمایش تابع خطی بخش قبل از A^T به عنوان آرگومان استفاده شد. این موضوع بازتابی از شکل ضرب داخلی مجموعه تانسورهای مرتبه دو است. توجه به دو خاصیت مهم نرم‌های تعریف شده که در آنالیز نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد، دارای اهمیت است. فرض کنیم A و B تانسورهای مرتبه دو و x بردار باشد. در این صورت روابط زیر برقرار است:

$$\|A \cdot x\| \leq \|A\| \|x\|$$

و

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$$

آخرین رابطه ایجاب می‌کند که:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k. \quad (32-3)$$

با به کارگیری این خاصیت می‌توان تعریف توابع مقدار تانسوری شبیه e^A را توجیه کرد. تمرین ۳-۳۲ با استفاده از (۳۲-۳) همگرایی سری زیر را اثبات کنید:

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots.$$

مفهوم ضرب داخلی برای تانسورهایی با هر مرتبه به آسانی بسط داده می‌شود؛ ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A, B) = a^{i_1 i_2 \cdots i_n} b_{i_1 i_2 \cdots i_n}.$$

خواننده می تواند این را برای تمام حالت های بخصوص آن نمایش داده و اصول ضرب داخلی را بررسی کند.

برخی عناصر حسابان

همانند حسابان مقدماتی می توان مفهوم تابع یک یا چند متغیر را در مجموعه بردارها یا تانسورها تعریف کرد. چنین تابعی بر روی مجموعه بخصوص داده خواهد شد. برای مثال، تابعی را روی قطعه $[a, b]$ با مقادیر درون $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. این تابع هر از نقطه $[a, b]$ را به حداکثر یک بردار از $\mathbb{R}^3$ می نگارد. به طور مشابه می توان تابعی از $[a, b]$ به مجموعه ای از تانسورهای با هر مرتبه ساخت. همچنین می توان مفهوم حد و پیوستگی در نقطه t_0 را همانند حسابان تعریف کرد:

تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ در $t = t_0 \in [a, b]$ دارای حد است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد، $\delta > 0$ ، وابسته به ε به طوری که برای هر $t \neq t_0$ و $|t - t_0| \leq \delta$ داشته باشیم $\|f(t) - a\| < \varepsilon$. هرگاه $a = f(t_0)$ ، گوییم تابع در t_0 پیوسته است.

نرم های گوناگونی در $\mathbb{R}^3$ استفاده می شود. اما در جبر خطی نشان داده می شود که در فضایی با بعد متناهی، تمام بعدها معادل هم هستند. معادل بودن دو نرم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ یعنی اینکه ثابت های مثبت c_1 و c_2 وجود دارند به گونه ای که برای هر عنصر x از فضا داشته باشیم:

$$0 < c_1 \leq \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq c_2 < \infty,$$

که c_1 و c_2 مستقل از x هستند. در نتیجه نرم می تواند در تعریف حد استفاده شود: یا حد وجود دارد یا ندارد که در این صورت مستقل از شکل مورد نظر نرم است. همانند حسابان، تابع $f(t)$ روی $[a, b]$ پیوسته نامیده می شود اگر روی هر نقطه $[a, b]$ پیوسته باشد. هرگاه تابع دارای مقادیری در $\mathbb{R}^3$ باشد، تعاریف مقدماتی حد،

مشتق، انتگرال و غیره را می‌توان با جایگذاری نرم به جای قدرمطلق اصلاح کرد. مشتق $f(t)$ در نقطه t_0 به صورت زیر است:

$$f'(t_0) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

مشتق تابع مقدار برداری دارای خواص متعدد شناخته شده موجود در حسابان مقدماتی است. برای مثال، اگر $f(t)$ و $g(t)$ هر دو در t مشتق پذیر باشند، آنگاه قاعده ضرب به شکل زیر برقرار است:

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t).$$

اگر f را بر حسب پایه e_1, e_2, e_3 بسط دهیم به طوری که $f(t) = f^k(t)e_k$ ، آنگاه:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{df^k(t)}{dt} e_k.$$

در اینجا فرض می‌شود که e_k به t بستگی ندارد، در غیراین صورت کاربرد قاعده ضرب لازم است (در ادامه با این حالت روبرو خواهیم شد). انتگرال معین را نیز می‌توان به صورت مولفه‌ای به دست آورد:

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f^k(t) dt \right) e_k.$$

انتگرال دارای تمام خواص شناخته شده موجود در حسابان است.

آشکار است که تمام این مطالب را می‌توان به حالت تابعی از یک متغیر عددی با مقادیری در مجموعه تانسورهای از هر مرتبه بسط داد. علاوه بر این، نظریه توابع چند متغیره با روش مشابه به تابع های تانسوری تعمیم داد. خواننده باید بخاطر داشته باشد که در تمام تعاریف حسابان مقدماتی، قدر مطلق به طور صوری با نرم قابل تعویض است. تنها در اینجا فرمولی را برای مشتق تابع تانسوری $F(t) = f^{mn}(t)e_m e_n$ می‌نویسیم:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{df^{mn}(t)}{dt} e_m e_n.$$

برخی فضاهای نرم‌دار

معمولا در کتاب‌های درسی آنالیز تابعی، نرم تابع برداری در دستگاه مختصات دکارتی تعریف می‌شود. برای مثال، نرم فضای $C(V)$ از توابع برداری پیوسته روی ناحیه فشرده V برابر است با:

$$\|f(x)\|_C = \|f_k(x) \mathbf{i}_k\|_C = \max_k \left(\max_V \|f_k(x)\| \right). \quad (33-3)$$

این فرمول به دستگاه مختصات $\mathbf{i}_k$ بستگی دارد. اگر از نرم مشابه که دارای مولفه‌های برداری در دستگاهی با نقاط تکین در V است، استفاده شود- همانند حالت مختصات کروی- نرمی به دست می‌آید که با (۳۳-۳) برابر نیست. این بدان معنا است که (۳۳-۳) روش نادرستی برای مشخص کردن شدت هر میدان برداری است.

اما نرم درست برای هر تابع در مختصات خمیده خط برا اساس نرم بالا بیان می‌شود:

$$\|f(x)\| = \|f^i(x) \mathbf{r}_i\| = \max_V [f^i(x) f_i(x)]^{1/2}. \quad (34-3)$$

اگر تمایل به استفاده از نرم به شکل (۳۳-۳) داشته باشیم، یادآوری این نکته لازم است که در حین تبدیل دستگاه باید تغییرات متناظر شکل نرم را نیز در نظر گرفت. بر روی مجموعه توابع پیوسته تانسوری مرتبه دوم بر ناحیه فشرده V نرم مشابه (۳-۳) قابل تعریف است:

$$\|A(x)\| = \|a^{ij}(x) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j\| = \max_V [a^{ij}(x) a_{ij}(x)]^{1/2}.$$

در نهایت متذکر می‌شویم که به جای نرم‌های توابع برداری و تانسوری پیوسته می‌توان نرم‌ها و ضرب‌های عددی متناظر با فضای توابع $L^2(V)$ را معرفی کرد. پس ضرب داخلی برابر است با:

$$(A, B) = \int_V a^{ij} b_{ij} dV. \quad (35-3)$$

خواننده بایستی تمام اصول ضرب داخلی را بررسی نموده و تمامی شکل‌های ضرب داخلی و نرم‌های متناظر با (۳۵-۳) را معرفی نماید.

تمرین ۳۳-۳ فرض کنید A تانسور مرتبه دوم با $\|A\| = q < 1$ است. نشان دهید $E - A$ دارای معکوس $(E - A)^{-1}$ بوده که برابر است با:

$$\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^n + \dots$$

تمرین ۳-۳۴ فرض کنید $\mathbf{A}$ تانسور مرتبه دوم با $\|\mathbf{A}\| = q < 1$ است. معکوس $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ چیست؟

۳-۱۳ مشتق توابع تانسوری

در نظریه کشسانی خطی، توابعی وجود دارند که با دو تانسور در ارتباط هستند. برای مثال، تانسورهای تنش و کشش با شکل تعمیم یافته قانون هوک ارتباط دارند. روابط پیچیده‌تر در کشسانی غیر خطی یا پلاستیسیته ظاهر می‌شود. ابتدا باید توابع تانسوری مورد نظر مشتق‌پذیر باشند. برای مثال، تانسور تنش در کشسانی می‌تواند به صورت مشتق انرژی کششی نسبت به تانسور کشش به دست آید.

یادآور می‌شویم که مشتق مقدماتی $f(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

مشتق اول با فرمول زیر به دست می‌آید:

$$df = f'(x)dx. \quad (3-36)$$

برای تابع n متغیره داریم:

$$df(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

با استفاده از پایه دکارتی $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n$ می‌توان آن را به صورت ظاهری زیر نمایش داد:

$$df(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathbf{i}_k \right) \cdot \sum_{m=1}^n dx_m \mathbf{i}_m.$$

با در نظر گرفتن:

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^n x_m \mathbf{i}_m$$

همانند یک بردار، می‌نویسیم:

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(\mathbf{x}),$$

و این را به عنوان تایی با متغیرهای برداری در نظر گرفت. به طریق مشابه تعریف می-کنیم:

$$d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^n dx_m \mathbf{i}_m$$

که dx_m کمیت‌هایی هستند که الزاما مقادیر کوچکی نیستند. فرض کنید ε متغیر حقیقی است. برای ثابت‌های $\mathbf{x}$ و $d\mathbf{x}$ تابع $f(\mathbf{x} + \varepsilon d\mathbf{x})$ ، تابعی از یک متغیر $\mathbf{x}$ است. با به کار گیری صوری قاعده زنجیره‌ای روی این توابع خواهیم داشت:

$$\left. \frac{df(\mathbf{x} + \varepsilon d\mathbf{x})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathbf{i}_k \right) \cdot \sum_{m=1}^n dx_m \mathbf{i}_m. \quad (37-3)$$

بنابراین:

$$df(x_1, \dots, x_m) = \left. \frac{df(\mathbf{x} + \varepsilon d\mathbf{x})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (38-3)$$

سمت راست این تساوی به نام مشتق گاته f در نقطه $\mathbf{x}$ در جهت $d\mathbf{x}$ خوانده می‌شود. برای عبارت میانی، نماد:

$$f_{,x} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathbf{i}_k$$

را معرفی کرده و آن را مشتق f نسبت به $\mathbf{x}$ می‌نامیم. در ادامه، این کمیت برداری را به عنوان گردایان f معرفی می‌کنیم.

با یک تابع n متغیره شروع می‌کنیم اما در حقیقت تابع با آرگومان برداری $f(\mathbf{x})$ در نظر گرفته می‌شود و عملیات مشابه غیر مولفه‌ای را با توجه به آن نمایش می‌دهیم. از (37-3) و (38-3) داریم

$$df(x_1, \dots, x_m) = \left. \frac{df(\mathbf{x} + \varepsilon d\mathbf{x})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = f_{,x} \cdot d\mathbf{x}.$$

هرگاه رابطه‌ای را در دستگاه مختصات دکارتی به دست می‌آوریم اما به صورت غیرمولفه‌ای نمایش داده شود، برای هر پایه‌ای دارای اعتبار است. خواننده می‌تواند این مطلب را با محاسبه مستقیم بررسی نماید. توجه داشته باشید که در هر پایه مولفه‌های

$f_{,x}$ مشتقات جزئی f نسبت به بسط x بر حسب پایه هستند. هرگاه بخواهیم شکلی را داشته باشیم که دارای بردارهای پایه نباشند باید از بسط dx نسبت به پایه دوگان استفاده کنیم.

این ایده‌ها را می‌توان به‌طور صریح به توابع تانسوری با آرگومان های تانسوری تعمیم داد.

ابتدا تابع مقدار عددی $f(X)$ را در نظر می‌گیریم که آرگومان X به تانسورهای مرتبه دوم تعلق دارد. این را می‌توان در پایه ثابت به صورت تابعی با $3 \times 3 = 9$ متغیر، مولفه‌های X در نظر گرفت. همانند آنچه در بالا آمد، در پایه دکارتی $\mathbb{R}^3$ می‌توان مشتق اول df را معرفی کرد. در نتیجه مشتق گاته قابل تعریف است:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(X + \varepsilon dX) \right|_{\varepsilon=0} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(X + \varepsilon dX) - f(X)}{\varepsilon} = f_{,x} \cdot dX^T \quad (3-39)$$

برای هر تانسور dX که لزوماً کوچک نیست. در اینجا بر حسب پایه دکارتی داریم:

$$f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n,$$

که x_{mn} مولفه‌های دکارتی X هستند. بنابراین:

$$df = f_{,x} \cdot dX^T.$$

عبارت $f_{,x}$ مشتق f نسبت به آرگومان تانسوری X نامیده می‌شود. هرچند فرمول آخر در مختصات دکارتی به دست آمده اما در هر پایه ای برقرار است.

برای تابعی که مقادیر X از تانسورهای مرتبه دوم را به مجموعه مشابهی می‌نگارد، مشتق $\mathbf{F}_{,x}(X)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F}_{,x} \cdot dX^T = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{F}(X + \varepsilon dX) \right|_{\varepsilon=0} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(X + \varepsilon dX) - \mathbf{F}(X)}{\varepsilon} \quad (3-40)$$

این حالت خاصی از مشتق گاته است. روش به کار گرفته شده در بالا را می‌توان دوباره برای مشتق اول بر حسب مولفه‌های دکارتی نوشت. مرتبه $\mathbf{F}_{,x}(X)$ برابر چهار است. این تابع بر حسب شکل مولفه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{F}_{,x} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{mn}} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n.$$

(یادآور می‌شویم که در پایه‌هایی دکارتی $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}^k$ و بنابراین جمع‌بندی رایج در موقعیت‌های مشابه این چنینی قابل استفاده است). برای:

$$f_{,x}(\mathbf{X}) \text{ و } \mathbf{F}_{,x}(\mathbf{X})$$

از نمادهای زیر نیز استفاده می‌شود:

$$\frac{df(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} \text{ و } \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}}$$

به روش مشابه می‌توان مشتق تابع مقدار تانسوری برای تانسورهای از هر مرتبه را تعریف کرد.

آشکار است که هنگام محاسبه $d\mathbf{F}$ به تابعی خطی بر حسب $d\mathbf{X}$ می‌رسیم. این دلیلی است که چرا پیشتر توابع خطی را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

اکنون مشتقات جزئی تابع مقدار عددی $f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)$ را بر حسب چندین آرگومان تانسوری معرفی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $\mathbf{X}_i$ تانسور مرتبه دوم باشد. مشتق جزئی f نسبت به $\mathbf{X}_i$ با $\partial f / \partial \mathbf{X}_i$ نمایش داده شده و برای هر تانسور مرتبه دوم $\mathbf{Y}$ توسط اتحاد زیر را تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot \mathbf{Y}^T = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_i + \varepsilon \mathbf{Y}, \dots, \mathbf{X}_m) \right|_{\varepsilon=0}$$

وقتی تابع $\mathbf{F}$ مقادیری در مجموعه تانسور می‌گیرد، مشتق جزئی $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{X}_i$ موجود مشابه توسط اتحاد زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot \mathbf{Y}^T = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{F}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_i + \varepsilon \mathbf{Y}, \dots, \mathbf{X}_m) \right|_{\varepsilon=0}.$$

همانند حالت تابع تانسوری یک متغیره، مؤلفه‌های مشتق‌های جزئی بالا را می‌توان بر حسب مشتق‌های جزئی مؤلفه‌ها بیان کرد. این نمایش را در مختصات دکارتی تشریح می‌کنیم. فرض کنیم

$$f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m) = f(x_{ij}^{(1)}, \dots, x_{ij}^{(m)})$$

تابع $9m$ متغیره با مؤلفه‌های $x_{ij}^{(k)}$ از $\mathbf{X}_k$ باشد. در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_{jk}^{(i)}} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k.$$

تمرین ۳-۲۵ مشتق $f(\mathbf{X}) = I_1(\mathbf{X}) \equiv \text{tr} \mathbf{X}$ را نسبت به $\mathbf{X}$ بیابید.

تمرین ۳-۲۶ مشتق $f(\mathbf{X}) = \text{tr} \mathbf{X}^2$ را به دست آورید.

تمرین ۳-۲۷ با به کارگیری روش استفاده شده در تمرین قبل، نشان دهید که مشتق $f(\mathbf{X}) = \text{tr} \mathbf{X}^3$ نسبت به $\mathbf{X}$ برابر است با $3(\mathbf{X}^T)^2$.

تمرین ۳-۳۸ نشان دهید که مشتق

$$f(\mathbf{X}) = I_2(\mathbf{X}) \equiv \frac{1}{2} [\text{tr}^2 \mathbf{X} - \text{tr} \mathbf{X}^2]$$

نسبت به $\mathbf{X}$ برابر است با:

$$I_2(\mathbf{X})_{,x} = I_1(\mathbf{X})\mathbf{E} - \mathbf{X}^T.$$

تمرین ۳-۳۹ نشان دهید که مشتق

$$f(\mathbf{X}) = I_3(\mathbf{X}) \equiv \det \mathbf{X}$$

نسبت به $\mathbf{X}$ برابر است با

$$[\mathbf{X}^2 - I_1(\mathbf{X})\mathbf{X} + I_2(\mathbf{X})\mathbf{E}]^T.$$

از فرمول‌های مشتق‌گیری پایاهای تانسور کششی برای نوشتن معادله ساختاری مواد همگن کشسان غیر خطی تحت دگرذیسی متناهی استفاده می‌شود.

تمرین ۳-۴۰ انرژی کششی هر محیط کشسان همگن به صورت تابعی از پایاهای I_k از تانسور تنش، $f = f(I_1, I_2, I_3)$ است. با به کارگیری نتایج تمرین‌های (۳-۳۵)، (۳-۳۶) و (۳-۳۷) نشان دهید که مشتق برابر است با:

$$f_{,x} = \left[\frac{\partial f}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial f}{\partial I_2} + I_2 \frac{\partial f}{\partial I_3} \right] \mathbf{E} - \left(\frac{\partial f}{\partial I_2} + I_1 \frac{\partial f}{\partial I_3} \right) \mathbf{X}^T + \frac{\partial f}{\partial I_3} \mathbf{X}^T{}^2.$$

پیشتر مثال‌هایی از مشتق‌های توابع مقدار عددی را ارائه کردیم. مشتق‌های توابع مقدار تانسوری پیچیده‌تر هستند. توجه داشته باشید که مشتق تابع خطی

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{X}^T$$

برابر $\mathbf{C}$ است:

$$\mathbf{F}_{,x} = \mathbf{C}.$$

تمرین ۳-۴۱ با به کارگیری ۳-۲۷ و ۳-۲۸ نشان دهید که اگر $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ ، آن گاه $\mathbf{F}_{,X} = \mathbf{I}$. اگر $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T$ ، آن گاه $\mathbf{F}_{,X} = \mathbf{e}_k \mathbf{E} e^k$. به کمک تمرین بالا،

$$\mathbf{X}_{,X} = \mathbf{I}.$$

یعنی، مشتق تانسوری مرتبه دوم $\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{X}$ برابر $\mathbf{I}$ بوده که تانسوری مرتبه چهارم است.

تابع‌های تانسوری متقارن

تانسورهای اصلی کشانی خطی، تانسور تنش σ و تانسور کشش ε متقارن هستند (به فصل ۶ رجوع کنید). بنابراین مساله مشتق‌گیری تابع مقدار تانسوری از آرگومان متقارن تانسوری همانند حالت خاصی که دارای ویژگی‌های منحصر به فردی است، در نظر گرفته می‌شود.

مشتق تابع مقدار عددی $f(\mathbf{X})$ از تانسور متقارن مرتبه دوم $\mathbf{X}$ را در نظر می‌گیریم. تعریف (۳-۳۹) را همانند زیر اصلاح می‌کنیم. مشتق $f_{,X}$ برابر تانسور متقارن مرتبه دومی است که برای هر تانسور متقارن $d\mathbf{X}$ در شرط زیر صادق است:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X}) \right|_{\varepsilon=0} = f_{,X} \cdot d\mathbf{X} \quad (۳-۴۱)$$

نمایش مؤلفه‌ای $f_{,X}$ در پایه دکارتی برابر است با:

$$f_{,X} = \frac{\partial}{\partial x_{mn}} \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n.$$

پس تقارن $f_{,X}$ به صورت تعریف زیر بیان می‌شود:

$$(f_{,X})^T = f_{,X}.$$

چرا به متقارن بودن $f_{,X}$ احتیاج داریم؟ مجموعه‌های تانسوری متقارن و پاد متقارن مرتبه دوم، زیر فضاهایی از تمام تانسورهای مرتبه دوم هستند. فرض کنیم $\mathbf{A}$ تانسور متقارن و $\mathbf{B}$ تانسور پاد متقارن مرتبه دوم باشند. به آسانی دیده می‌شود که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. بنابراین زیر فضاهای تانسورهای متقارن و پایه متقارن دو به دو متعامد

هستند. در (۳-۴۱)، dX به صورت دلخواه اما متقارن است. اگر در این تعریف نیاز به متقارن بودن $f_{,X}$ وجود نداشته باشد، آن گاه (۳-۴۱) که تنها برای تمام تانسورهای متقارن dX برقرار است، $f_{,X}$ را به گونه ای تعریف می کند که در حد جمع یک جمله از B یکتا نبوده و می تواند هر تانسور پاد متقارن مرتبه دوم باشد.

توجه داشته باشید که تعریف مشتق هر تابع نسبت به آرگومان تانسور متقارن با مساله نمایش تابع خطی عمل کننده بر روی فضای تانسوری متقارن که با حالت کلی کمی متفاوت است، ارتباط نزدیکی دارد. (مسایل ۳-۵۲، ۳-۵۳ و ۳-۵۴ را نگاه کنید). به عنوان مثال، می توان مشتق تابع زیر را به دست می آوریم:

$$f(X) = C \cdot X,$$

که C تانسور مرتبه دو است و $X^T = X$. طبق تعریف برای هر dX که $dX = dX^T$ داریم

$$f_{,X} \cdot dX = C \cdot dX$$

در نگاه اول به نظر می رسد که $f_{,X} = C$ و این رابطه برای هر آرگومان دلخواه X برقرار است. اما برای آرگومان متقارن X جواب تغییر می کند. در حقیقت، مشتق باید تانسوری متقارن باشد و بنابراین $f_{,X} = C$ اگر و فقط اگر $C = C^T$. اکنون حالتی را در نظر می گیریم که C متقارن نباشد. می توان گفت که $f_{,X}$ باید متقارن باشد. نتیجه این است که $f_{,X}$ برابر است با

$$f_{,X} = \frac{1}{2}(C + C^T).$$

این عبارت به صورت یکتا تعریف می شود. در حقیقت، می توان C را به عنوان مجموع تانسور متقارن و پاد متقارن نمایش داد:

$$C = \frac{1}{2}(C + C^T) + \frac{1}{2}(C - C^T)$$

اما

$$\frac{1}{2}(C - C^T) \cdot dX = \frac{1}{2}(C - C) \cdot dX = 0$$

و بنابراین

$$C \cdot dX = \frac{1}{2}(C + C^T) \cdot dX$$

که همان مطلوب مورد نظر است.

به روش مشابه، می‌توان تعریف مشتق تابع مقدار تانسوری از آرگومان متقارن مرتبه دوم را اصلاح کرد. اگر F دارای مقادیری در مجموعه تانسورهای مرتبه n باشد، مشتق بر حسب X با $F_{,X}$ نمایش داده می‌شود، که دارای مقادیری در زیر مجموعه تانسورهای مرتبه $n+2$ که دو اندیس آخر متقارن آن بوده و برای تمام تانسورهای مرتبه دوم متقارن dX در اتحاد زیر صدق می‌کند:

$$F_{,X} \cdot dX = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(X + \varepsilon dX) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (۴۲-۳)$$

تقارن $F_{,X}$ نسبت به دو اندیس آخر بدین معنا است که برای مؤلفه‌های $F_{ij \dots pt}$ از $F_{,X}$ داریم:

$$F_{ij \dots pt} = F_{ij \dots tp}.$$

با تغییر مشابه، اجازه تعریف مشتق جزئی توابع تانسوری با آرگومان‌های تانسوری متقارن را خواهیم داشت.

تمرین ۴۲-۳ فرض کنید

$$F(X) = C \cdot X,$$

که $C = c_{mnpt} i_m i_n i_p i_t$ یک تانسور مرتبه چهارم بوده و X یک تانسور مرتبه دوم متقارن است. نشان دهید:

$$F_{,X} = \frac{1}{2}(C + C'),$$

که C' با انتقال دو اندیس آخر از C بدست می‌آید: $C' = c_{mnpt} i_m i_n i_t i_p$.

تمرین ۴۳-۳ فرض کنید

$$f(X) = \frac{1}{2} X \cdot C \cdot X,$$

که $C = c_{mnpt} i_m i_n i_t i_p$ و X به صورت تانسور مرتبه دو متقارن است. نشان دهید:

$$F_{,X} = \frac{1}{4}(C .. X + C'' .. X + X .. C + X .. C'),$$

که C' از انتقال دو اندیس آخر مؤلفه‌های C یعنی $C' = c_{mnpt} i_m i_n i_t i_p$ و C'' با انتقال اولین دو اندیس از مؤلفه‌ها یعنی، $C'' = c_{mnpt} i_m i_n i_t i_p$ به دست می‌آید.

تمرین ۳-۴۴ فرض کنید

$$f(X) = \frac{1}{2} X .. C .. X,$$

که C یک تانسور مرتبه چهار و X تانسور مرتبه دوم متقارن است. فرض کنید $C = C' = C''$ و $C .. X = X .. C$ بر حسب مؤلفه‌ها برای هر تانسور متقارن X وجود دارد، یعنی اتحادهای $c_{mnpt} = c_{ptmn}$ و $c_{mnpt} = c_{nmpt}$ برای هر مجموعه از اندیس‌ها برقرار است. با به کارگیری جواب مساله 3.43 نشان دهید که $f_{,X} = C .. X$.

۳-۱۴ مسایل

در این بخش به غیر از جاهایی قید شده از A, B, C, X برای نمایش تانسورهای مرتبه دو، λ برای عدد، Ω برای تانسور مرتبه دو خطی، و Q برای تانسور متعامد مرتبه دو استفاده می‌شود.

۳-۱ مؤلفه‌های جفت $i_1 i_2$ را در پایه دکارتی (i_1, i_2, i_3) بنویسید.

۳-۲ مؤلفه‌های تانسوری $i_2 i_1 + 2i_3 i_3$ را در پایه دکارتی (i_1, i_2, i_3) بنویسید.

۳-۳ مؤلفه‌های تانسوری که جفت $a_1 a_2$ در پایه دکارتی (i_1, i_2, i_3) ، که $a_1 = (-1, 2, -2)$ و $a_2 = (1, -1, 2)$ را بنویسد.

۳-۴ نشان دهید $a \cdot 0 = 0 \cdot b = 0$.

۳-۵ قسمت‌های متقارن و پاد متقارن تانسورهای زیر را معین کنید.

(الف) $i_1 i_2$ ؛

(ب) $i_1 i_2 - i_2 i_1 + 2i_3 i_3$ ؛

(پ) $i_1 i_2 - 2i_2 i_1 + i_1 i_3$ ؛

(ت) $i_1 i_2 + i_2 i_3 + i_1 i_3$ ؛

$$(\text{ث}) \quad \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3$$

۳-۶ گوی و بخش‌های انحراف تانسورهای زیر را معین کنید.

$$(\text{الف}) \quad \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$$

$$(\text{ب}) \quad \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1$$

$$(\text{پ}) \quad \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$$

$$(\text{ت}) \quad \mathbf{a}\mathbf{a}$$

$$(\text{ث}) \quad \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3$$

۳-۷ نشان دهید:

$$I_1(\mathbf{X}) = \text{tr} \mathbf{X}, \quad I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} [\text{tr}^2 \mathbf{X} - \text{tr} \mathbf{X}^2], \quad I_3(\mathbf{X}) = \det \mathbf{X}.$$

۳-۸ پایاهای تانسورهای زیر را بنویسید.

$$(\text{الف}) \quad \mathbf{a}\mathbf{a}$$

$$(\text{ب}) \quad \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$$

$$(\text{پ}) \quad \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2$$

$$(\text{ت}) \quad \lambda \mathbf{E}$$

$$(\text{ث}) \quad 2\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + 4\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$$

۳-۹ فرض کنید $\mathbf{A}$ یک تانسور متقارن و معکوس‌پذیر باشد. نشان دهید:

$$I_1(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{I_2(\mathbf{A})}{I_3(\mathbf{A})}, \quad I_2(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{I_1(\mathbf{A})}{I_3(\mathbf{A})}, \quad I_3(\mathbf{A}^{-1}) = I_3^{-1}(\mathbf{A}).$$

۳-۱۰ تجزیه‌های قطبی چپ و راست تانسورهای زیر را بیابید.

$$(\text{الف}) \quad \mathbf{a}\mathbf{a}$$

$$(\text{ب}) \quad \mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b} + \mathbf{c}\mathbf{c} \quad \text{اگر } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ دوجه دو متعامد باشند؛}$$

$$(\text{پ}) \quad \lambda \mathbf{E} + \mathbf{a}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$$

$$(\text{ت}) \quad \lambda \mathbf{E} + \mathbf{a}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{b}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$$

$$(\text{ث}) \quad \mathbf{a}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{b}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{c}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$$

۱۱-۳ فرض کنید $\text{tr} A^2 \neq 0$ ، a یک عدد دلخواه و Y یک تانسور دلخواه مرتبه دو باشد. نشان دهید که

$$X = aY - a \frac{\text{tr}(A \cdot Y)}{\text{tr} A^2} A$$

در معادله $\text{tr}(A \cdot X) = 0$ صدق می‌کند.

۱۲-۳ فرض کنید عدد ناصفر a و تانسورهای مرتبه دو A ، B داده شده باشند. جواب X معادله زیر را بیابید.

$$aX + \text{tr}(A \cdot X)E = B.$$

۱۳-۳ برای معادلات زیر یک جواب X بیابید و شرایطی برای یکتایی به دست آورید.

$$X + \text{tr}(A \cdot X)B = C \quad (\text{الف})$$

$$X^T + \text{tr}(A \cdot X)B = C \quad (\text{ب})$$

$$X + a(\text{tr} X)A = B \quad (\text{پ})$$

۱۴-۳ تحت چه شرایطی معادله

$$aX + E \text{tr} X = 0$$

دارای یک جواب ناصفر X است؟

۱۵-۳ تحت چه شرایطی معادله

$$aX + A \text{tr} X = 0$$

دارای یک جواب نابدیهی است؟

۱۶-۳ نشان دهید که در یک پایه دکارتی داریم:

$$\varepsilon = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3.$$

۱۷-۳ فرض کنید A یک تانسور متقارن باشد. نشان دهید $I_2(\text{dev} A) \leq 0$.

۱۸-۳ فرض کنید A یک تانسور غیر تکین و a و b بردارهای دلخواهی باشند. ثابت

کنید که $A + ab$ یک تانسور غیر تکین است اگر و فقط اگر $a \neq 0$ ، $A^{-1} \cdot b + 1$ و

$$(A + ab)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + b \cdot A^{-1} \cdot a} (A^{-1} \cdot a)(b \cdot A^{-1}).$$

۱۹-۳ نشان دهید که $(E \times \omega)^2 = \omega \omega - E \omega$.

۳-۲۰ نشان دهید که:

$$(\mathbf{E} \times \omega)^{2n} = (-1)^{n-1} (\omega \cdot \omega)^{n-1} (\omega \omega - \mathbf{E} \omega \cdot \omega) \quad (\text{الف})$$

$$(\mathbf{E} \times \omega)^{2n+1} = (-1)^n (\omega \cdot \omega)^n \mathbf{E} \times \omega \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{E} \quad (\text{پ})$$

۳-۲۱ برای تانسور مرتبه دوم $\mathbf{A} = a_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n$ بردار ناوردایی برداری توسط ج. دبلیو.

گیبس (۱۸۳۹-۱۹۰۳) به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathbf{A}_\times = a_{mn} \mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n.$$

برای مثال $(\mathbf{ab})_\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردارهای ناوردای تانسورهای زیر را بیابید.

$$(\text{الف}) \mathbf{aa}$$

$$(\text{ب}) \mathbf{E} \times \omega$$

$$(\text{پ}) \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$$

$$(\text{ت}) \mathbf{E}$$

$$(\text{ث}) \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \text{ اگر}$$

$$\mathbf{A}_\times = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)_\times \quad \text{نشان دهید که}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{A})_\times = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{tr} \mathbf{A} \quad \text{نشان دهید که}$$

۳-۲۴ نشان دهید که $\mathbf{B}^T = 0$ برای تانسورهای دلخواه مرتبه دوم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برقرار است.

$$(\text{الف}) [\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{A})] = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \operatorname{tr} \mathbf{A} \quad \text{نشان دهید که}$$

$$(\text{ب}) \quad \text{نشان دهید که:}$$

$$\mathbf{A} \times \omega = (\omega \times \mathbf{A}^T), \quad \omega \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A}^T \times \omega)^T.$$

۳-۲۷ اگر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ برقرار باشد، تانسورهای مرتبه دوم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را تعوض-

پذیر می‌نامند. نشان دهید که تانسورهای متقارن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تعویض‌پذیر هستند در صورتی که مجموعه‌های بردارهای ویژه آنها یکسان باشد.

۲۸-۳ فرض کنید $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. نشان دهید که جفت‌های $\mathbf{aa}$ و $\mathbf{bb}$ جابه‌جا شونده هستند.

۲۹-۳ فرض کنید تانسورهای متقارن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ جابه‌جا شونده هستند. نشان دهید که $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{\times} = 0$.

۳۰-۳ نشان دهید که تانسور $\mathbf{Q} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$ متعامد است.

۳۱-۳ نشان دهید که پایاهای اصلی هر تانسور متعامد در روابط $I_1 I_3 = I_2$ و $I_3^2 = 1$ صدق می‌کنند.

۳۲-۳ فرض کنید $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$. نشان دهید که تانسور $\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{ee}$ متعامد است.

۳۳-۳ اگر Ω تانسور پادمتقارن باشد آنگاه نشان دهید که تانسور

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{E} + \Omega) \cdot (\mathbf{E} - \Omega)^{-1}$$

متعامد است.

۳۴-۳ اگر Ω پادمتقارن باشد، نشان دهید که تانسور $\mathbf{Q} = \mathbf{e}^{\Omega}$ متعامد است.

۳۵-۳ نشان دهید که تانسور

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{4 + \theta^2} \left[(4 - \theta^2) \mathbf{E} + 2\theta\theta - 4\mathbf{E} \times \theta \right],$$

با توجه به $\theta \cdot \theta = \theta^2$ ، متعامد است. θ بردار دوران متناهی نامیده می‌شود.

۳۶-۳ فرض کنید $\mathbf{Q}$ تانسوری متعامد باشد. اتحاد زیر را به دست آورید.

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{Q}^T - \mathbf{E}) = 6 - 2\text{tr}\mathbf{Q}.$$

۳۷-۳ فرض کنید $\mathbf{e}_k$ ($k = 1, 2, 3$) و $\mathbf{d}_m$ ($m = 1, 2, 3$) دو پایه یک‌ه متعامد باشند.

تحقیق کنید که $\mathbf{Q} = \mathbf{e}_k \mathbf{d}_k$ تانسور متعامد است.

۳۸-۳ فرض کنید $\mathbf{Q}$ تانسور متعامد حقیقی باشد. اتحاد زیر را که در آن ω و $\mathbf{e}$ به-

ترتیب محور و زاویه دوران هستند، به دست آورید.

$$\mathbf{Q}_{\times} = 2 \sin \omega \mathbf{e},$$

۳۹-۳ پایاهای اصلی تانسور $\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{ee}$ را بیابید.

۴۰-۳ پایاهای اصلی تانسور $\mathbf{E} \times \omega$ را بیابید.

۴۱-۳ پایه‌ای اصلی تانسور $(\mathbf{E} \times \omega)^2$ را بیابید.

۴۲-۳ نشان دهید:

$$I_3(\mathbf{A}) = \frac{1}{6} (\text{tr}^3 \mathbf{A} - 3 \text{tr} \mathbf{A} \text{tr} \mathbf{A}^2 + 2 \text{tr} \mathbf{A}^3).$$

۴۳-۳ از قضیه کیلی - هامیلتون برای تانسور غیر تباهیده، داریم:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}^2 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{E}).$$

با استفاده از این رابطه، معکوس تانسورهای زیر را به دست آورید:

(الف) $\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + 2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1$ ؛

(ب) $a \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 + b \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + c \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1$ ، $a, b, c \neq 0$ ؛

(پ) $a \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 + b \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2$ ؛

(ت) $a \mathbf{E} + b \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2$.

۴۴-۳ مشتق توابع مقدار عددی زیر بر حسب $\mathbf{X}$ را به دست آورید:

(الف) $\text{tr} \mathbf{X}^4$ ؛

(ب) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}$ ؛

(پ) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{b}$ ؛

(ت) $\text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{X})$.

۴۵-۳ فرض کنید $\mathbf{A}$ تانسور مرتبه دوم است. تانسور $\mathbf{X}$ هم عامل $\mathbf{A}$ نامیده شده و با

$$\mathbf{X} = \text{cof } \mathbf{A}$$

نمایش داده می شود هرگاه $\mathbf{X}$ در معادله زیر صدق کند:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{E}.$$

اگر $\mathbf{A}$ ناتکین باشد، آن گاه $\mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}$. خواص هم عاملی را در روابط زیر

بررسی کنید:

(الف) $\text{cof}(\mathbf{A}^{-T}) = (\text{cof } \mathbf{A})^T$ ؛

(ب) $\text{cof}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{cof } \mathbf{A} \cdot \text{cof } \mathbf{B}$ ؛

(پ) $\text{cof } \lambda \mathbf{A} = \lambda^2 \text{cof } \mathbf{A}$ ؛

(ت) $I_2(\mathbf{A}) = \text{tr } \text{cof } \mathbf{A}$.

۴۶-۳ فرض کنید $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$. نشان دهید که:

$$\text{cof} \mathbf{A} = \lambda_2 \lambda_3 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_1 \lambda_3 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3.$$

۴۷-۳ تابعی تحلیلی $f(x)$ را بر روی گوی $x < r$ با مرکزیت $x = 0$ در نظر بگیرید، یعنی فرض کنید که نمایش زیر برقرار بوده و سری برای $x < r$ همگرا است.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

درون گوی، رابطه زیر برقرار است:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1}$$

فرض کنید:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \mathbf{X}^k.$$

رابطه زیر را برای $\|\mathbf{X}\| < r$ به دست آورید:

$$[\text{tr}(\mathbf{F}(\mathbf{X}))]_{,X} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} x^{T^{k-1}} = f'(x^T)$$

۴۸-۳ فرض کنید $f(\mathbf{X})$ تابع مقدار عددی است. نشان دهید که مشتق $f(\mathbf{X})$

نسبت به $\mathbf{X}^T$ با ترانهاد مشتق آن بر حسب $\mathbf{X}$ برابر است، یعنی:

$$f(\mathbf{X})_{,X^T} = (f(\mathbf{X})_{,X})^T.$$

۴۹-۳ مشتق توابع مقدار تانسوری زیر را بر حسب $\mathbf{X}$ به دست آورید:

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T) \mathbf{E} \quad (\text{الف})$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{E} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{bcd} \quad (\text{پ})$$

۵۰-۳ برای تانسور ناتکین $\mathbf{X}$ ، نشان دهید که:

$$(\det \mathbf{X})_{,X} = (\det \mathbf{X}) \mathbf{X}^{-T}.$$

۵۱-۳ فرض کنید S برابر با مجموعه تمام تانسورهای متقارن مرتبه دوم باشد. نشان دهید که S زیر فضای خطی از فضای خطی تمام تانسورهای مرتبه دوم است. ضرب داخلی $A \cdot B^T$ از کل فضا بر روی S به صورت زیر است:

$$A \cdot B^T = A \cdot B$$

۵۲-۳ فرض کنید f تابع مقدار عددی از تانسور متقارن مرتبه دوم A است. نشان دهید تانسور مرتبه دوم متقارن یکتایی B وجود دارد که برای هر A متقارن داریم:

$$f(A) = \text{tr}(B \cdot A)$$

یعنی $A = A^T$.

۵۳-۳ فرض کنید $F = F(A)$ تابعی خطی از مجموعه تانسورهای متقارن مرتبه دوم A به مجموعه تانسورهای مرتبه دوم است. نشان دهید تانسور مرتبه چهارم یکتایی C وجود دارد که برای تمام $A = A^T$ داریم:

$$F(A) = C \cdot A, \quad C = c_{mnpt} i_m i_n i_p i_t, \quad c_{mnpt} = c_{mnpt}$$

۵۴-۳ فرض کنید $F = F(A)$ تابعی خطی از مجموعه تانسورهای متقارن مرتبه دوم A به همان مجموعه تانسورهای مرتبه دوم متقارن است ($F(A) = F(A)^T$). نشان دهید تانسور مرتبه چهارم یکتایی C وجود دارد، به طوری که:

$$F(A) = C \cdot A, \quad C = c_{mnpt} i_m i_n i_p i_t, \quad c_{mnpt} = c_{mnpt}, \quad c_{mnpt} = c_{mnpt}, \quad A = A^T \text{ هرگاه}$$

۵۵-۳ فرض کنید Q مجموعه تمامی تانسورهای پاد متقارن مرتبه دوم است. نشان دهید که Q زیر فضای خطی از فضای خطی تمام تانسورهای مرتبه دوم است. ضرب داخلی $A \cdot B^T$ از کل فضا بر روی Q به صورت زیر است:

$$A \cdot B^T = -A \cdot B = -A^T \cdot B^T.$$

۵۶-۳ فرض کنید C تانسور مرتبه n ام است که دو مولفه آخر آن $c_{mn \dots pt} = -c_{mn \dots tp}$ پادمتقارن هستند. A را به صورت تانسور مرتبه دوم دلخواه متقارن در نظر بگیرید. نشان دهید که $C \cdot A = 0$ ، جایی که 0 تانسور صفر از مرتبه $n-2$ است.

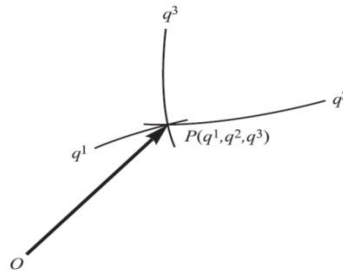
فصل ۴: میدان‌های تانسوری

۴-۱ میدان‌های برداری

موقعیت نقطه (بسیار دقیق‌تر از یک حجم بی‌نهایت کوچک) درون جسمی طبیعی معمولاً با بردار یا تانسور مشخص می‌شود. بنابراین، درون هر جسم فضایی چیزی وجود دارد که میدان برداری یا تانسوری نامیده می‌شود. این میدان‌ها همانند هر قانون توسط معادلات دیفرانسیلی جزئی لحظه‌ای تعیین می‌گردند. چنین معادلاتی معمولاً با استفاده از چارچوب مختصات فضای دکارتی به دست می‌آید. عملیات‌های حسابان در این چارچوب معمولاً به تحلیل یک بعدی بسیار نزدیک است: برای مثال، مشتق‌گیری تابع برداری روی هر مولفه توسط مولفه پایه انجام می‌شود. هر چند این کار اغلب با تعریف قراردادی مختصات منحنی الخط درون جسم بر حسب فرمول بندی مساله راحت‌تر به نظر می‌رسد. در این روش، چارچوبی را در نظر می‌گیریم که از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند و مشتق‌گیری به روش مولفه‌ای برای تعیین تغییر تابع برداری کافی نیست. بنابراین لازم است تا اسباب حسابان را برای تابع‌های برداری و تانسوری هنگامی که جسم قابل تغییر است، گسترش دهیم. دلیل دیگر برای معرفی این ابزارها عینی بودن قوانین طبیعت است: باید قادر به فرمول بندی عبارت‌های مستقل چارچوب این قوانین باشیم. در نهایت، یک دلیل زیباشناختی نیز وجود دارد: بیشتر عبارت‌های حالت بدون مختصه در ریاضی فیزیک به نظر خیلی کندتر از همتایان با مختصات آنها قرار

دارند. چنین است که می‌گویند در جهان زیبایی حکومت می‌کند؛ هر چند این موضوع کاملاً درست نیست اما بیشتر دانش‌آموزان عبارت زیبا و کوتاه را به فرمول ترسناک و نصف صفحه‌ای ترجیح می‌دهند.

موقعیت هر نقطه در فضا با سه عدد که مختصات نقطه نام دارد، مشخص می‌شود. دستگاه‌های مختصات به‌طور کلی متشکل از دستگاه‌های دکارتی، استوانه‌ای و کروی است. دستگاه اول از دوتای دیگر دارای یک تفاوت مهمی است: بردارهای چارچوب دستگاه دکارتی یکتا هستند، در حالی‌که اینها برای دستگاه‌های منحنی الخط از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر می‌کند. مکان نقطه در فضا در هر دستگاه مختصه کلی به‌طور یکتا توسط سه عدد q^1, q^2, q^3 تعیین می‌شود. این موضوع اگر چارچوب دکارتی نباشد، به صورت مختصات منحنی/خط بیان می‌شود. شکل ۴-۱ را نگاه کنید.



شکل ۴-۱ مختصات منحنی الخط

اگر دو تا از مختصات را ثابت در نظر بگیریم و سومی تغییر کند، خطی در فضا به نام خط مختصات خواهیم داشت. مختصات دکارتی x^1, x^2, x^3 هر نقطه را می‌توان با استفاده از مختصات منحنی الخط کلی توسط نسبت‌های شکل زیر به‌دست آورد:

$$x^i = x^i(q^1, q^2, q^3) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4-1)$$

تناظر (۴-۱) به جز برخی مجموعه نقاط تکین در فضا به‌صورت یک به یک است. فرض کنید که تابع‌های $x^i = x^i(q^1, q^2, q^3)$ صاف (به صورت پیوسته مشتق پذیر) است. در این حالت تناظر یک به یک موضعی توسط درایست‌های ژاکوبی زیر تعیین می‌شود:

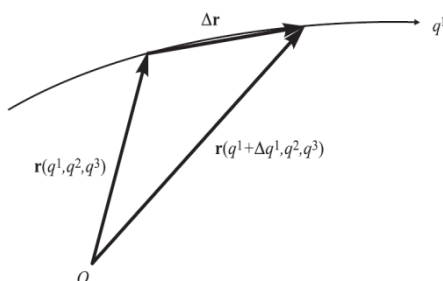
$$\left| \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right| \neq 0. \quad (4-2)$$

با ثابت کردن مبدا O مکان نقطه $P(q^1, q^2, q^3)$ را با بردار $\mathbf{r}$ که نقاط P و O را به هم متصل می‌کند، مشخص می‌کنیم:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3).$$

وقتی نقطه در امتداد خط مختصات حرکت کند، برای مثال در امتداد خط q^1 ، انتهای بردار مکان آن نیز در امتداد این خط حرکت کرده و جهت اختلاف بردار زیر در امتداد کمان قرار می‌گیرد (شکل ۴-۲):

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1 + \Delta q^1, q^2, q^3) - \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$$



شکل ۴-۲ تولید بردار مماسی موضعی بر خط مختصات.

هر چه مقدار Δq^1 کوچک‌تر باشد، $\Delta \mathbf{r}$ به مماس واقع بر خط q^1 نزدیک‌تر می‌شود. حد $\Delta q^1 \rightarrow 0$ در نسبت $\Delta \mathbf{r} / \Delta q^1$ برابر بردار زیر است:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} = \mathbf{r}_1$$

که بر خط مختصات q^1 مماس است. در همین نقطه (q^1, q^2, q^3) می‌توان دو بردار دیگر را معرفی کرد:

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2}, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3},$$

که به ترتیب بر خط مختصات q^2 و q^3 مماس هستند. اگر نقطه مختصات (q^1, q^2, q^3) تکین نباشد، آنگاه بردارهای $\mathbf{r}_i$ هم صفحه نیستند و بنابراین یک چارچوب سه‌تایی را

تشکیل می‌دهند. ترکیب حاصل از $\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$ با حجم متوازی السطوح چارچوب برابر است؛ در صورت نیاز با شماره گذاری دوباره مختصات، از آن می‌توان عبارت مشابهی را برای ژاکوبی (۴-۲) به دست آورد. اکنون کمیت زیر برای ما مشخص است:

$$\sqrt{g} = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} \right|.$$

برخلاف فصل‌های پیشین که تمام بردارهای چارچوب ثابت بودند، اکنون با بردارهای چارچوبی سر و کار داریم که از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کنند. گرچه در هر نقطه می‌توان استدلال‌های قبلی را تکرار نمود. در حالت خاص، پایه معکوس $\mathbf{r}^i$ را با رابطه زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_j^i.$$

ضرایب متریک را در فصل پیش به صورت زیر تعریف کردیم:

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j, \quad g_i^j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j = \delta_i^j,$$

که مولفه‌های تانسور متریک $\mathbf{E}$ در هر نقطه از فضا هستند.

در بالا مشتق تابع برداری $\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ گرفته شده است. توجه داشته باشید که قوانین مشتق گیری توابع برداری کاملاً شبیه مشتق گیری توابع معمولی است. برای اختصار، حالت میدان‌های وابسته به تک متغیر t را بررسی می‌کنیم. با در نظر گرفتن $\mathbf{e}_1(t)$ و $\mathbf{e}_2(t)$ که در مقدار معین t به طور پیوسته مشتق پذیر هستند، یعنی برای $i = 1, 2$ داریم:

$$\frac{d\mathbf{e}_i(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_i(t + \Delta t) - \mathbf{e}_i(t)}{\Delta t}.$$

به آسانی دیده می‌شود که:

$$\frac{d(\mathbf{e}_1(t) + \mathbf{e}_2(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_1(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{e}_2(t)}{dt}.$$

در حالی که:

$$\begin{aligned}\frac{d(e_1(t) + e_2(t))}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e_1(t + \Delta t) - e_1(t) + e_2(t + \Delta t) - e_2(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e_1(t + \Delta t) - e_1(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e_2(t + \Delta t) - e_2(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{de_1(t)}{dt} + \frac{de_2(t)}{dt}.\end{aligned}$$

به‌طور مشابه برای c ثابت داریم:

$$\frac{d(c e_1(t))}{dt} = c \frac{de_1(t)}{dt}.$$

در نهایت حاصل ضرب تابع عددی $f(t)$ و تابع برداری $e(t)$ با استفاده از قانون تشابه فرمول مشتق‌گیری حاصل ضرب توابع عددی، قابل مشتق‌گیری است:

$$\frac{d(f(t)e(t))}{dt} = c \frac{df(t)}{dt} e(t) + f(t) \frac{de(t)}{dt}.$$

خواننده می‌تواند اثبات را برای حالت عددی به‌طور کلمه به کلمه تطبیق دهد. قوانین مشتق جزیی توابع برداری بر حسب چندین متغیر کاملاً مشابه بوده و فرمول‌نویسی آن را بر خواننده واگذار می‌کنیم. با نمایش بردارها در مختصات دکارتی، دیدن درستی فرمول‌های زیر ساده است:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e_1(t) \cdot e_2(t)) &= e_1'(t) \cdot e_2(t) + e_1(t) \cdot e_2'(t) \\ \frac{d}{dt}(e_1(t) \times e_2(t)) &= e_1'(t) \times e_2(t) + e_1(t) \times e_2'(t).\end{aligned}$$

تمرین ۴-۱. (الف) مشتق $e_1(t) \cdot e_2(t)$ و $e_1(t) \times e_2'(t)$ را بر حسب t به‌دست آورید در صورتی‌که:

$$e_1(t) = \mathbf{i}_1 e^{-t} + \mathbf{i}_2, \quad e_2(t) = -\mathbf{i}_1 \sin^2 + \mathbf{i}_2 e^{-t}.$$

(ب) نشان دهید که $[e(t) \times e'(t)]' = e(t) \times e''(t)$ برای هر تابع برداری مشتق پذیر $e(t)$ برقرار است.

تمرین ۴-۲. برای حاصل ضرب ترکیبی:

$$[\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)] = (\mathbf{e}_1(t) \times \mathbf{e}_2(t)) \cdot \mathbf{e}_3(t)$$

نشان دهید که:

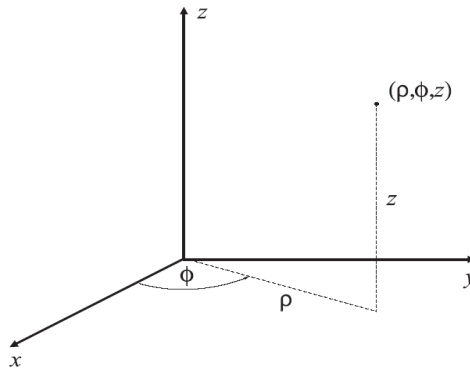
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)] = [\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)] + [\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \mathbf{e}_3(t)] + [\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}'_3(t)].$$

مختصات استوانه‌ای

در دستگاه مختصات استوانه‌ای داریم:

$$(q^1, q^2, q^3) = (\rho, \phi, z),$$

در اینجا ρ فاصله اصلی از محور z و ϕ زاویه سمتی است (شکل ۴-۳).



شکل ۴-۳ دستگاه مختصات استوانه‌ای

با استفاده از عبارت:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z$$

برای بردار مکان در مختصات متعامد و فرمول‌های تبدیل مختصات زیر:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z,$$

داریم:

$$\mathbf{r} = (\rho, \phi, z) = \hat{\mathbf{x}}\rho \cos \phi + \hat{\mathbf{y}}\rho \sin \phi + \hat{\mathbf{z}}z.$$

سپس:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}(\rho, \phi, z)}{\partial \rho} = \hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi.$$

به‌طور مشابه می‌توان محاسبه کرد:

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(\rho, \phi, z)}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{x}} \rho \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \rho \cos \phi, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}(\rho, \phi, z)}{\partial z} = \hat{\mathbf{z}}.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \\ &= (\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi) \cdot [(-\hat{\mathbf{x}} \rho \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \rho \cos \phi) \times \hat{\mathbf{z}}] \\ &= (\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi) \cdot (\hat{\mathbf{y}} \rho \sin \phi + \hat{\mathbf{x}} \rho \cos \phi) \\ &= \rho (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

اثبات این‌که چارچوب بردارهای $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ به‌طور متقابل بر هم عمود هستند، آسان است. به‌عنوان مثال:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 &= (\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi) \cdot (-\hat{\mathbf{x}} \rho \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \rho \cos \phi) \\ &= -\rho \cos \phi \sin \phi + \rho \cos \phi \sin \phi = 0. \end{aligned}$$

با محاسبه مستقیم نیز می‌توان نوشت:

$$|\mathbf{r}_1| = 1, \quad |\mathbf{r}_2| = \rho, \quad |\mathbf{r}_3| = 1.$$

این حقایق را می‌توان به‌عنوان پایه‌های معکوس به‌کار گرفت:

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_2 / \rho^2, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}_3.$$

محاسبه ضرایب متریک مختلف برای چارچوب استوانه‌ای بسیار ساده است و عبارتند از:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

معمولا بردارهای پایه یک‌ه در مختصات استوانه‌ای به صورت $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ و $\hat{\mathbf{z}}$ تعریف می‌شوند. این بردارهای یک‌ه به‌ترتیب در امتداد جهت‌های $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ در نقطه مورد نظر

هستند. با در نظر گرفتن بردار $\mathbf{v}$ در هر نقطه (ρ, ϕ, z) از فضا، آن را می‌توان به صورت قراردادی نوشت:

$$\mathbf{v} = \hat{\rho}v_{\rho} + \hat{\phi}v_{\phi} + \hat{z}v_z.$$

کمیات v_{ρ} , v_{ϕ} و v_z به‌عنوان مولفه‌های فیزیکی $\mathbf{v}$ شناخته می‌شوند. (برای هر بردار، مولفه‌های فیزیکی با مسیرهای بردار روی جهت‌های بردارهای چارچوب متناظر برابر است.^۳) اما از آنجایی که می‌توان عبارت $\mathbf{v}$ را نیز به‌صورت‌های زیر نوشت:

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{r}_1 + v^2\mathbf{r}_2 + v^3\mathbf{r}_3 = v_1\mathbf{r}^1 + v_2\mathbf{r}^2 + v_3\mathbf{r}^3,$$

مولفه‌های هم‌وردا و پاد هم‌وردا $\mathbf{v}$ را می‌توان از عبارت‌های پیشین مشخص کرد. یعنی:

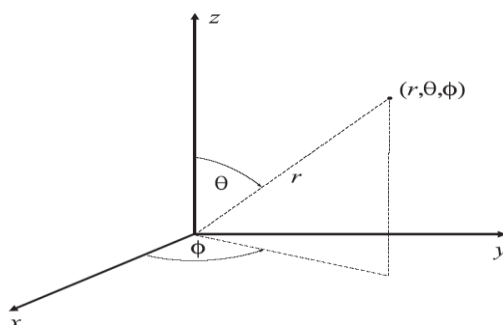
$$(v^1, v^2, v^3) = (v_{\rho}, v_{\phi}, v_z), \quad (v_1, v_2, v_3) = (v_{\rho}, v_{\phi}, v_z).$$

می‌بینیم که عبارت $\mathbf{v}$ برحسب پایه‌های $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ را با مولفه‌های $(v_{\rho}, v_{\phi}, v_z)$ مرتبط هستند که نه هم‌وردا هستند و نه پاد هم‌وردا.

تمرین ۳-۴. نشان دهید که شتاب هر ذره در مختصات قطبی تخت (ρ, ϕ) به صورت زیر است:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \hat{\rho} \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \hat{\phi} \left(\rho \frac{d^2\phi}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\phi}{dt} \right).$$

^۳ ریاضیدانان اغلب سر و کار داشتن با مقادیر بدون بعد را ترجیح می‌دهند. اما عملاً بسیاری از کمیت‌ها دارای ابعاد فیزیکی نیستند (مثلاً N/m^2 برای فشار). وقتی معرفی مختصات در فضا، برخی از آنها دارای ابعادی هم هستند؛ مثلاً در مختصات کروی r دارای بعد طول است در حالی که θ و ϕ بدون بعد هستند. از آنجایی که $\mathbf{r}$ بعد طول دارد، بردارهای چارچوب متناظر با θ و ϕ باید بعد طول داشته باشند در حالی که بردار چارچوب مربوط به r بدون بعد است. در این روش برخی مولفه‌های تانسور متریک می‌تواند دارای بعد باشد و هنگام در نظر گرفتن فرمول‌های تبدیل می‌تواند نه تنها تغییرات عددی بلکه تغییرات بعدی برحسب اینکه ممکن است چنین کمیتی به آن اضافه شوند را نشان دهد. وقتی مولفه‌های فیزیکی بردارها و تانسورها مورد استفاده قرار می‌گیرد، بعد تانسور متناظر به‌طور کامل به‌دست آمده و بردارهای چارچوب بدون بعد می‌شوند.



شکل ۴-۴ دستگاه مختصات کروی

مختصات کروی

در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, \phi),$$

که r فاصله شعاعی از مبدأ، ϕ زاویه سمتی و θ زاویه قطبی است (شکل ۴-۴).
فرمول‌های تبدیل مختصات:

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta$$

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = \hat{\mathbf{x}} r \sin\theta \cos\phi + \hat{\mathbf{y}} r \sin\theta \sin\phi + \hat{\mathbf{z}} r \cos\theta.$$

در نتیجه:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \hat{\mathbf{x}} \sin\theta \cos\phi + \hat{\mathbf{y}} \sin\theta \sin\phi + \hat{\mathbf{z}} \cos\theta,$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{x}} r \cos\theta \cos\phi + \hat{\mathbf{y}} r \cos\theta \sin\phi - \hat{\mathbf{z}} r \sin\theta,$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{x}} r \sin\theta \sin\phi + \hat{\mathbf{y}} r \sin\theta \cos\phi.$$

در این حالت:

$$\sqrt{g} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

در این دستگاه به دست می آوریم که:

$$|\mathbf{r}_1| = 1, \quad |\mathbf{r}_2| = r, \quad |\mathbf{r}_3| = r \sin \theta,$$

و بردارهای چارچوب دوباره به صورت جفتی برهم عمود هستند. پس برای بردارهای پایه معکوس داریم:

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_2 / r^2, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}_3 / r^2 \sin^2 \theta$$

ضرایب متریک عبارتند از:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

تمرین ۴-۴. بردارهای پایه یک مختصات کروی به صورت $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ و نمایش داده می شوند. برای بردار $\mathbf{v}$ عبارت مرتبط با دستگاه های مختلف از مولفه های $(v_1, v_2, v_3), (v^1, v^2, v^3)$ و (v_r, v_θ, v_ϕ) را به دست آورید.

می بینیم که هر دو چارچوب کروی و استوانه ای متعامد هستند. در این حالت، بردارهای پایه معکوس دارای جهت های یکسانی همانند بردارهای پایه اصلی هستند، اما طول های معکوس آنها به گونه ای است که برای هر i ، $|\mathbf{r}_i| |\mathbf{r}^i| = 1$ برقرار است.

در § ۲-۴ قوانین تبدیلاتی را به دست آوردیم که برای مولفه های بردار تحت تغییر چارچوب به کار می رود. این قوانین نتیجه ای از تغییرات مختصات منحنی الخط قدیمی q^k به دیگر مختصات $\tilde{q}^j$ است، بنابراین:

$$\tilde{q}^j = \tilde{q}^j(q^1, q^2, q^3), \quad q^k = q^k(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3) \quad (j, k = 1, 2, 3).$$

تمام کمیات در مختصات $\tilde{q}^j$ به روشی مشابه با مختصات q^k نوشته می شوند، اما با مدهای که در بالا می آیند: $\tilde{\mathbf{r}}^k, \tilde{\mathbf{r}}_k, \dots$. اکنون قوانین تبدیلات را برای حالت میدان بردار در مختصات کلی بررسی می کنیم. به علت اینکه:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i} = \tilde{\mathbf{r}}_j \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i}$$

می‌توان برای تشریح تغییر چارچوب نوشت:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad A_i^j = \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i}, \quad (۳-۴)$$

برای برای تغییر معکوس:

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \tilde{A}_j^i \mathbf{r}_j, \quad \tilde{A}_j^i = \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i}, \quad (۴-۴)$$

اکنون نتایج § ۲-۴ را به کار گرفته و بلافاصله می‌توان برای قوانین تبدیل مرتبط با مولفه‌های میدان بردار f نوشت:

$$\tilde{f}^i = A_j^i f^j, \quad \tilde{f}_i = \tilde{A}_j^i f_j, \quad f^i = \tilde{A}_j^i \tilde{f}^j, \quad f_i = A_j^i \tilde{f}_j,$$

هنوز f^i را می‌توان به عنوان مولفه‌های پاد وردا f به کار گرفت، در حالی که f_i برای مولفه‌های هم وردا استفاده می‌شود- تفاوت اصلی این است که اکنون $\tilde{A}_j^i$ و A_j^i را می‌توان از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر داد. به طور مشابه می‌توان قوانین تبدیل برای مولفه‌های میدان‌های تانسور با درجه بالاتر را نوشت.

تمرین ۴-۵. دستگاهی از مختصات مستقیم *الخط مایل* (u, v) در صفحه با دستگاهی از مختصات دکارتی (x, y) توسط معادلات تبدیل مرتبط می‌شود:

$$x = u \cos \alpha + v \cos \beta, \quad y = u \sin \alpha + v \sin \beta$$

در اینجا α, β ثابت هستند. (الف) تعدادی منحنی هماهنگ u و v رسم کنید که روی صفحه xy هستند را اضافه شود. (ب) بردارهای پایه $\mathbf{r}_i$ ($i=1,2$) و بردارهای پایه معکوس $\mathbf{r}^i$ را در دستگاه (u, v) بیابید. با استفاده از اینها، ضرایب متریک را محاسبه کنید. (پ) $\mathbf{z}$ را به عنوان برداری در نظر بگیرید. مولفه‌های هم وردا $\mathbf{z}$ را در دستگاه مایل برحسب مولفه‌های پاد وردا $\mathbf{z}$ به دست آورید.

۴-۲ مشتقات و عملگر نابلا

اکنون به بررسی بردار بی نهایت کوچک از نقطه (q^1, q^2, q^3) تا $(q^1 + dq^1, q^2 + dq^2, q^3 + dq^3)$ می پردازیم که به صورت $d\mathbf{r}$ نمایش داده می شود:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{r}_i dq^i.$$

پس می توان dq^i را به صورت زیر تعریف کرد:

$$dq^i = \mathbf{r}^i \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^i. \quad (۵-۴)$$

در اینجا جمع روی i وجود ندارد. توجه داشته باشید که تنها مختصات فضایی دارای بالا نویس هستند. گرچه برای چارچوب های دکارتی معمولاً از زیر نویس های منحصر به فردی استفاده می شود. طول این بردار بی نهایت کوچک به صورت زیر تعریف می شود:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i dq^i \cdot \mathbf{r}_j dq^j = g_{ij} dq^i dq^j. \quad (۶-۴)$$

در سمت راست، شکل مربعی وابسته به متغیرهای dq^i وجود دارد؛ ضرایب این شکل مربعی به صورت مولفه های هم ورده تانسور متریک هستند. در چارچوب دکارتی، (۶-۴) حالت آشنایی به خود می گیرد:

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

در چارچوب های استوانه ای و کروی به ترتیب داریم:

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2,$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2,$$

تمرین ۴-۶. $(ds)^2$ را برای دستگاه مایل تمرین ۴-۵ پیدا کنید.

اکنون فرض می شود که $f(q^1, q^2, q^3)$ تابع عددی مشتق پذیر برای متغیرهای q^i است. مشتق آن برابر است با:

$$df(q^1, q^2, q^3) = \frac{\partial f(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^i} dq^i.$$

در اینجا و در موقعیت های مشابه، i مخرج در حالت پایین تری قرار داشته و بنابراین باید روی i جمع بسته شود. با استفاده از (۵-۴) می توان نوشت:

$$df = \mathbf{r}^i \frac{\partial f}{\partial q^i} d\mathbf{r}.$$

اولین جمله ضرب در سمت راست بردار $\mathbf{r}^i \partial f / \partial q^i$ است. اکنون به معرفی بردار نمادین:

$$\Delta = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

که عملگر نابلا نامیده می‌شود پرداخته که روی تابع f همانند آنچه در بالا آمد، رفتار می‌کند:

$$\nabla f = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

(تکرار می‌کنیم که در اینجا جمع روی i است). عملگر نابلا اغلب به عنوان عملگر گرادیان بیان می‌شود.

تمرین ۴-۷. (الف) نشان دهید که بردار یکه عمود بر سطح $\mathbf{c} = \mathcal{G}(q^1, q^2, q^3)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{n} = \frac{g^{ij} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q^i}}{\sqrt{g^{mn} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q^m} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q^n}}} \mathbf{r}_j.$$

(ب) نشان دهید که زاویه در نقطه از تقاطع سطوح زیر:

$$\varphi(q^1, q^2, q^3) = c_1, \quad \psi(q^1, q^2, q^3) = c_2,$$

به صورت زیر است:

$$\cos \theta = \frac{g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \frac{\partial \psi}{\partial q^i}}{\sqrt{g^{mn} \frac{\partial \varphi}{\partial q^m} \frac{\partial \varphi}{\partial q^n} g^{rt} \frac{\partial \psi}{\partial q^r} \frac{\partial \psi}{\partial q^t}}}$$

(پ) نشان دهید که زاویه بین سطوح مختصات $q^1 = c_1, q^2 = c_2$ به این صورت زیر است:

$$\cos \theta_{12} = \frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}g^{22}}}.$$

(ت) شرط عمود بودن سطوح را به دست آورید.

$$g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \frac{\partial \psi}{\partial q^j} = 0.$$

تمرین ۴-۸. نشان دهید که عملگر گرادیان در چارچوب‌های استوانه‌ای و کروی به ترتیب توسط فرمول زیر بیان می‌شود:

$$\nabla f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\nabla f = \hat{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi},$$

هنگام استفاده از مولفه‌های مرتبط با سه تایی $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{r}^i$ چه عبارت‌هایی برای آنها وجود دارد؟

اکنون فرمولی را برای مشتق تابع برداری $\mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)$ به دست می‌آوریم:

$$d\mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) = \frac{\partial \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^i} dq^i.$$

دوباره از (۴-۵) استفاده می‌کنیم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) &= \frac{\partial \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^i} (\mathbf{r}^i dr) \\ &= (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^i) \frac{\partial \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^i} \\ &= d\mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{r}^i \frac{\partial \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^i} \right). \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نشان داد که:

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{f}.$$

کمیت ∇f که به عنوان گرادیان $\mathbf{f}$ شناخته می‌شود، به‌طور آشکار تانسوری درجه دوم محسوب می‌شود. به کمک جابه‌جایی می‌توان $d\mathbf{f}$ را به‌شکل زیر نوشت:

$$d\mathbf{f} = \nabla \mathbf{f}^T \cdot d\mathbf{r}.$$

گاهی اوقات $\nabla \mathbf{f}^T$ به‌صورت گرادیان $\mathbf{f}$ نامیده می‌شود؛ به آن مشتق $\mathbf{f}$ در جهت $\mathbf{r}$ نیز گفته می‌شود و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{r}} = \nabla \mathbf{f}^T.$$

یکی از کاربردهای گرادیان در تانسور این است که تانسور جدیدی را به وجود می‌آورد که درجه آن نسبت به تانسور اولیه، یک درجه بالاتر است.

برای هر جفت بردار می‌توان دو نوع ضرب معرفی کرد: عملیات ضرب نقطه‌ای و برداری. اینها را برای جفت برداری که شامل عملگر نابلا (که شکل برداری آن در نظر گرفته می‌شود) و تابع بردار $\mathbf{f} = \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3)$ است، به کار می‌گیریم. در این حالت دو نوع عملیات داریم: واگرایی

$$\text{div } \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i},$$

و چرخش:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i}. \quad (۷-۴)$$

بردار:

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{f}$$

حلقه $\mathbf{f}$ نامیده می‌شود. با توجه به حلقه $\mathbf{f}$ می‌توان تانسور Ω را معرفی کرد:

$$\Omega = \mathbf{E} \times \omega.$$

این تانسور پادمتقارن است (اثبات بر عهده خواننده است) و تانسور اسپینی نام دارد. می‌توان نشان داد که:

$$\Omega = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{f}^T - \nabla \mathbf{f}).$$

به همین ترتیب می توان عملیات چرخش و واگرایی را برای تانسور $\mathbf{A}$ با هر درجه ای معرفی کرد:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{A}, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{A}.$$

اکنون می بینیم که هنگام اعمال عملگر نابلا بر بردار شعاعی چه اتفاقی رخ می دهد:

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \mathbf{E},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_i = 3,$$

9

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r} = \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

تمرین ۴-۹. عبارت های $\nabla \cdot \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{E}$, $\nabla \cdot \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{E}$ و $\nabla \times \mathbf{E}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۴-۱۰. فرض کنید f و g دو تابع و $\mathbf{f}$ بردار و $\mathbf{Q}$ تانسوری درجه دوم باشد. موارد زیر را اثبات کنید:

$$\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g,$$

$$\nabla(f \mathbf{f}) = (\nabla f) \mathbf{f} + f \nabla \mathbf{f},$$

$$\nabla(f \mathbf{Q}) = (\nabla f) \mathbf{Q} + f \nabla \mathbf{Q}.$$

تمرین ۴-۱۱. نشان دهید که موارد زیر برقرار هستند ($\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ بردار هستند):

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\nabla \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g}^T = (\nabla \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} + (\nabla \mathbf{g}) \cdot \mathbf{f},$$

$$\nabla(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \mathbf{f}) \times \mathbf{g} - (\nabla \mathbf{g}) \times \mathbf{f},$$

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{f} - \mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g} + \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{g},$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \mathbf{g}) = (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{g} + \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{g},$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}).$$

۴-۳ مشتق‌گیری تابع برداری

با توجه به درک مفهوم فرمول‌هایی که به حسابان متداول مشابهی نیاز دارند، از تابع‌های برداری نسبت به q^i مشتق‌گیری می‌کنیم. همچنین خواننده مطمئناً می‌داند که برای مشتق‌گیری از تابع برداری:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = f^k(x_1, x_2, x_3) \mathbf{i}_k$$

بر حسب متغیر دکارتی x_i کافی است از هر مولفه تابع $\mathbf{f}$ بر حسب این متغیر مشتق‌گیری کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f^k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \mathbf{i}_k \quad (۴-۸)$$

اکنون می‌توان چگونگی مشتق‌گیری تابع برداری $\mathbf{f}$ را به صورت مختصات منحنی الخط نوشت:

$$\mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) = f^i(q^1, q^2, q^3) \mathbf{r}_i.$$

در این حالت بردارهای چارچوب $\mathbf{r}_i$ به q^k بستگی دارند، یعنی مشتق ساده مولفه‌های $\mathbf{f}$ نتیجه‌ای از فرمول مورد نیاز نیستند. برای درک بهتر مطلب، تابع پیوسته $\mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) = \mathbf{c}$ را در نظر بگیرید. بر اساس تعریف کلی مشتق جزیی، $\partial \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) / \partial q^i = \mathbf{0}$. اما مولفه‌های $\mathbf{f}$ ثابت نخواهند بود زیرا $\mathbf{r}_k$ متغیر است، بنابراین مشتقات مولفه‌های این تابع برابر صفر نیستند.

مشتق حاصل ضرب هر تابع ساده و تابع برداری از قاعده ضرب به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) &= \frac{\partial}{\partial q^k} [f^i(q^1, q^2, q^3) \mathbf{r}_i] \\ &= \frac{\partial f^i(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^k} \mathbf{r}_i + f^i(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k}. \end{aligned}$$

بنابراین مشتق تابع برداری که بر حسب مولفه‌های آن نوشته می‌شود از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول همانند مشتق در چارچوب دکارتی (۴-۸) است و بخش

دوم شامل مشتق‌های بردارهای چارچوب است. پس لازم است تا بخش دوم نیز محاسبه شود.

۴-۴ مشتقات بردارهای چارچوب

مقدار مشتق زیر را می‌خواهیم به دست آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i = \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i. \quad (9-4)$$

البته اگر عبارت مولفه‌های دکارتی بردار چارچوب را داشته باشیم، می‌توان این مشتقات را محاسبه کرد (و در تمرین‌ها نیز انجام می‌شود)؛ اما در حالت کلی با استفاده از این اصل که مشتق بردار چارچوب نیز بردار است، آن را در برای هر چارچوب مشابهی $\mathbf{r}_i$ ($i=1,2,3$) می‌توان بسط داد. اکنون ضرایب این بسط را با Γ_{ij}^k نمایش می‌دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k. \quad (10-4)$$

کمیات Γ_{ij}^k ضرایب کریستوفل نوع دوم نامیده شده و به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}. \quad (11-4)$$

با استفاده از (۹-۴) می‌توان گفت که زیر نویس‌های نماد کریستوفل متقارن هستند:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (12-4)$$

حال می‌توان فرمول مشتق تابع برداری را به صورت کامل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{f}(q^1, q^2, q^3) &= \frac{\partial f^i(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^k} \mathbf{r}_i + \Gamma_{ki}^j f^i(q^1, q^2, q^3) \mathbf{r}_j \\ &= \frac{\partial f^i(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^k} \mathbf{r}_i + \Gamma_{kt}^i f^t(q^1, q^2, q^3) \mathbf{r}_i \\ &= \left(\frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t \right) \mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (13-4)$$

این عبارت مشتق‌گیری هم‌وردایی نامیده می‌شود. ضریب $\mathbf{r}_i$ مشتقات هم‌وردایی مولفه‌های پادوردای $\mathbf{f}$ نامیده شده و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\nabla_k f^i = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t.$$

اکنون برخی از ویژگی‌های ضرایب کریستوفل را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴-۵ ضرایب کریستوفل و ویژگی‌های آنها

نمادهای کریستوفل در چارچوب دکارتی برابر صفر هستند بنابراین آنها را نمی‌توان برای چارچوب دیگری که در آن قوانین تبدیلی معمول مولفه‌های تانسور حاکم است، به‌دست آورد. علت آن ساده است: نمادهای کریستوفل نه تنها به بردارهای چارچوب خود بلکه به نرخ تغییرات آنها از نقطه‌ای به نقطه دیگر نیز بستگی دارد و این نرخ‌ها در قوانین تبدیلی تانسورها ظاهر نمی‌شوند. بنابراین نمادهای کریستوفل علی‌رغم نمادهای آنها به‌صورت مولفه‌های تانسور نیستند. علت این‌که چرا بیشتر نویسندگان نماد نشان داده شده در طرف راست معادله (۴-۱۱) را ترجیح می‌دهند، همین موضوع است. داشتن فرمولی برای محاسبه نمادهای کریستوفل بسیار مهم است. اکنون نماد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j}.$$

رابطه (۴-۱۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k \quad (۴-۱۴)$$

که از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_t = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_t = \Gamma_{ij}^k g_{kt}$$

سمت چپ این معادله را می‌توان بر حسب مولفه‌های تانسور متریک بیان کرد:

$$\frac{\partial}{\partial q^j} g_{it} = \frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_t + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{jt}. \quad (۴-۱۵)$$

به‌طور مشابه:

$$\frac{\partial}{\partial q^t} g_{ji} = \frac{\partial}{\partial q^t} \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{jt} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_{it}. \quad (۱۶-۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i} g_{tj} = \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r}_t \cdot \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{ti} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_t \cdot \mathbf{r}_{ji}. \quad (۱۷-۴)$$

اکنون می‌توان $\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_t$ را با کم کردن (۱۶-۴) از مجموع (۴-۱۵) و (۴-۱۷) و تقسیم حاصل آن بر ۲ به دست آورد:

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_t = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{it}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{tj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^t} \right) = \Gamma_{ijt}. \quad (۱۸-۴)$$

کمیات Γ_{ijk} ضرایب کریستوفل نوع اول نامیده می‌شوند. آنها معمولاً به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$[ij, k] = \Gamma_{ijk}.$$

آشکار است که اولین دو زیر نویس متقارن هستند: $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$. بنابراین داریم:

$$\Gamma_{ij}^k g_{kt} = \Gamma_{ijt} \quad (۱۹-۴)$$

و از آن نتیجه می‌شود:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kt} \Gamma_{ijt} \quad (۲۰-۴)$$

با استفاده از اینها می‌توان به دست آورد:

$$\frac{\partial \mathbf{r}^j}{\partial q^i} = -\Gamma_{it}^j \mathbf{r}^t. \quad (۲۱-۴)$$

در واقع:

$$0 = \frac{\partial}{\partial q^t} \delta_j^i = \frac{\partial}{\partial q^t} (\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j) = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^t} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_{jt} = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^t} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}^i \cdot \Gamma_{jt}^k \mathbf{r}_k,$$

بنابراین:

$$\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^t} \cdot \mathbf{r}_j = -\mathbf{r}^i \cdot \Gamma_{jt}^k \mathbf{r}_k = -\Gamma_{jt}^k \delta_k^i = -\Gamma_{jt}^i$$

و داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^t} = -\Gamma_{jt}^i \mathbf{r}^j.$$

معمولا داشتن فرمول‌هایی برای تبدیل نمادهای کریستوفل در اثر تغییر مختصات، مفید است. فرض کنید که ضریب جدید q^i توسط ضریب قدیمی $\tilde{q}^i$ به کمک رابطه $\tilde{q}^i = q^i(q^1, q^2, q^3)$ و در نظر گرفتن معادلات (۳-۴)-(۴-۴) به دست می‌آید. اکنون با به کارگیری در دستگاه جدید به دست می‌آوریم:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{r}}_{ij}. \quad (۲۲-۴)$$

اما:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^j} \tilde{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial q^m}{\partial \tilde{q}^j} \frac{\partial}{\partial q^m} \tilde{\mathbf{r}}_i = \tilde{A}_j^m \frac{\partial}{\partial q^m} (\tilde{A}_i^n \mathbf{r}_n),$$

و بسط دادن با استفاده از قاعده حاصل ضرب به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ij} &= \tilde{A}_j^m \left(\frac{\partial \tilde{A}_i^n}{\partial q^m} \mathbf{r}_n + \tilde{A}_i^n \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q^m} \right) \\ &= \tilde{A}_j^m \frac{\partial \tilde{A}_i^n}{\partial q^m} \mathbf{r}_n + \tilde{A}_j^m \tilde{A}_i^n \Gamma_{nm}^p \mathbf{r}_p \\ &= \tilde{A}_j^m \frac{\partial \tilde{A}_i^n}{\partial q^m} A_n^k \tilde{\mathbf{r}}_k + \tilde{A}_j^m \tilde{A}_i^n \Gamma_{nm}^p A_n^k \tilde{\mathbf{r}}_k. \end{aligned}$$

در مقایسه با (۲۲-۴) نشان داده می‌شود که:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{A}_j^m \frac{\partial \tilde{A}_i^n}{\partial q^m} A_n^k + \tilde{A}_j^m \tilde{A}_i^n A_p^k \Gamma_{nm}^p.$$

وجود جمله اول در سمت راست به این معنا است که ضریب کریستوفل نمی‌تواند تانسوری از مرتبه سو باشد. این ادعای اولیه ما را که بر پایه ادله مشتق گیری بود به اثبات می‌رساند.

تمرین ۴-۱۲. نشان دهید که تنها ضرایب غیر صفر کریستوفل نوع اول برای مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$\Gamma_{221} = -\rho, \quad \Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \rho.$$

نشان دهید که ضرایب کریستوفل غیر صفر نوع اول برای مختصات کروی عبارتند از:

$$\begin{aligned}\Gamma_{221} &= -r, & \Gamma_{122} &= \Gamma_{212} = r, \\ \Gamma_{331} &= -r \sin^2 \theta, & \Gamma_{332} &= -r^2 \sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{313} &= \Gamma_{133} = r \sin^2 \theta, & \Gamma_{233} &= \Gamma_{323} = r^2 \sin \theta \cos \theta,\end{aligned}$$

تمرین ۴-۱۳. نشان دهید که تنها ضریب کریستوفل غیر صفر نوع دوم برای مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$\Gamma_{22}^1 = -\rho, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^2 = 1/\rho.$$

نشان دهید که ضرایب کریستوفل غیر صفر نوع دوم برای مختصات کروی عبارتند از:

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= -r, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = 1/r, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{33}^3 &= \Gamma_{13}^3 = 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cos \theta.\end{aligned}$$

تمرین ۴-۱۴. دستگاهی از مختصات بیضوی تخت (u, v) بر حسب فرمول‌های تبدیل زیر تعریف می‌شوند:

$$x = c \cosh u \cos v, \quad y = c \sinh u \sin v,$$

که c ثابت است. ضرایب کریستوفل را پیدا کنید.

فضای اقلیدسی و نا اقلیدسی

هنگام مشتق‌گیری از طول بردار اولیه $d\mathbf{r}$ می‌نویسیم:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i dq^i \cdot \mathbf{r}_j dq^j = g_{ij} dq^i dq^j. \quad (۲۳-۴)$$

با توجه به متغیرهای dq^i و dq^j به‌طور کلی تعریف مثبتی از شکل مربعی خواهیم داشت. این یکی از ویژگی‌های مهم تانسور متریک برای مختصات فضایی واقعی است.

چنانچه فضا اقلیدسی باشد، یعنی اگر بتوان آن را توسط مجموعه‌ای از مختصات دکارتی x^t ($t=1,2,3$) تعریف کرد، در این صورت آرایه خطی $(ds)^2$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(ds)^2 = \sum_{t=1}^3 (dx^t)^2. \quad (۲۴-۴)$$

با داشتن مجموعه‌ای از معادلات تبدیل قابل قبول $x^t = x^t(q^n)$ ، همان آرایه خطی را می‌توان به صورت مختصات کلی q^n بیان کرد. از آنجایی که:

$$dx^t = \frac{\partial x^t}{\partial q^n} dq^n$$

داریم:

$$(ds)^2 = \sum_{t=1}^3 \left(\frac{\partial x^t}{\partial q^n} dq^n \right)^2,$$

و در مقایسه با معادله (۴-۲۳) برای ضرایب متریک در دستگاه q^n به دست می‌آید:

$$g_{ij} = \sum_{t=1}^3 \frac{\partial x^t}{\partial q^i} \frac{\partial x^t}{\partial q^j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (۴-۲۵)$$

اکنون سوال زیر را مطرح می‌کنیم. فضایی را که در ابتدا تشریح شد بر حسب مجموعه‌ای از مختصات کلی q^n در نظر بگیرید. چنین تعریفی باید شامل مجموعه‌ای از ضرایب متریک (۴-۲۳) باشد که در هر نقطه دارای تعریف مثبتی است. آیا می‌توان مجموعه‌ای از مختصات دکارتی را به صورت x^t تعریف کرد که بتواند این فضا را نیز تشریح کند؟ یعنی آیا می‌توان وجود توابع همانند $x^t(q^n)$ در مختصات حاصل از $x^t = x^t(q^n)$ که دارای آرایه خطی به صورت (۴-۲۴) هستند را تضمین کرد؟ به شکل دیگر، آیا فضا/قلیدسی است؟ لزوماً خیر. با داشتن g_{ij} در دستگاه q^n از معادله (۴-۲۵) می‌توان شش معادله برای سه تابع نامعلوم $x^t(q^n)$ به دست آورد. این مساله بیان می‌کند که شرایط دیگر باید توسط ضرایب متریک داده شده، به وجود آید. امکان فرمول‌بندی این محدودیت‌ها بر حسب تانسور مرتبه چهارم واقعی R_{ijk}^p که به صورت معادله زیر تعریف می‌شود، وجود دارد:

$$R_{ijk}^p = 0. \quad (۴-۲۶)$$

تانسور R_{ijk}^p به تانسور ریمان-کریستوفل معروف است و تانسور مرتبط با آن:

$$R_{nijk} = g_{np} R_{ijk}^p$$

تانسور انحنای فضا نامیده می‌شود. آن را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$R_{ijk}^p = \frac{\partial \Gamma_{ij}^p}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial q^j} - (\Gamma_{mj}^p \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{mk}^p \Gamma_{ij}^m).$$

همچنین R_{ijk}^p به طور واقعی تنها دارای شش مولفه مستقل است، بنابراین (۴-۲۶) بیان کننده شش شرط روی g_{ij} است که باید برای فضای تشریح شده توسط g_{ij} در فضای اقلیدسی استفاده شود [سوکولنیکوف (۱۹۹۴)].

این اطلاعات تنها برای آگاهی خواننده آورده شد، همانند چنین ملاحظاتی در جای خود بسیار با اهمیت است. جزییات بیشتر و فرمول بندی دقیق تر را می توان در مراجع زیادی پیدا کرد.

۴-۶ مشتق گیری هم وردا

اکنون به مساله مشتق یری تابع برداری برگردیم. فرمول مشتقی (۴-۱۳) را به دست آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial q^k} (f^i \mathbf{r}_i) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t \right) \mathbf{r}_i$$

و مشاهده می شود که ضرایب بسط با رابطه زیر قابل بیان است:

$$\nabla_k f^i = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t \quad (۴-۲۷)$$

که مشتقات هم وردا مولفه های پادوردای تابع برداری $\mathbf{f}$ نامیده می شود. اکنون مشتقات مشابه را بر حسب مولفه های هم وردا بیان می کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial q^k} (f_i \mathbf{r}^i) = \frac{\partial f_i}{\partial q^k} \mathbf{r}^i + f_i \frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{r}^i.$$

با استفاده از (۴-۲۱) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{f} = \frac{\partial f_i}{\partial q^k} \mathbf{r}^i - f^i \Gamma_{kt}^i \mathbf{r}^t = \left(\frac{\partial f^i}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^j f_j \right) \mathbf{r}^i.$$

ضرایب این بسط به صورت مشتقات هم وردا مولفه های پادوردا نامیده شده و به صورت زیر نشان داده می شوند:

$$\nabla_k f_i = \frac{\partial f_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^j f_j. \quad (۲۸-۴)$$

با این نمادگذاری‌ها می‌توان فرمول مشتق‌گیری را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^k \nabla_i f_k = \mathbf{r}_j \nabla_i f^j. \quad (۲۹-۴)$$

زیرا:

$$\nabla \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} (f_j \mathbf{r}^j) = \mathbf{r}^i (\nabla_i f_j) \mathbf{r}^j = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \nabla_i f_j,$$

می‌بینیم که $\nabla_i f_j$ مولفه هم‌وردای از $\nabla \mathbf{f}$ است. به طور مشابه:

$$\nabla \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} (f^j \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_i f^j$$

نشان می‌دهد که $\nabla_i f_j$ مولفه ترکیبی از $\nabla \mathbf{f}$ است.

تمرین ۴-۱۵. مشتقات هم‌وردای مولفه‌های پادوردای بردار $\mathbf{f}$ را بر حسب مختصات

قطبی تخت بنویسید؟

خلاصه بحث

فرمول مشتق‌گیری بردار عبارتست از:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^k \nabla_i f_k = \mathbf{r}_j \nabla_i f^j$$

که در آن:

$$\nabla_k f_i = \frac{\partial f_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^j f_j, \quad \nabla_k f^i = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t.$$

فرمول:

$$\nabla \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \nabla_i f_j = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_i f^j$$

نشان می‌دهد که $\nabla_i f_j$ مولفه هم‌وردای $\nabla \mathbf{f}$ است، در حالی که $\nabla_i f^j$ مولفه‌ای

ترکیبی از $\nabla \mathbf{f}$ است.

۴-۷ مشتقات هم وردای تانسور مرتبه دوم

اکنون مشتق جزئی تانسور $\mathbf{A}$ مرتبه دوم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial q^k} (a^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) \\ &= \frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j + a^{ij} (\mathbf{r}_{ik} \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \mathbf{r}_{jk}) \\ &= \frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j + a^{ij} (\Gamma_{ik}^t \mathbf{r}_t \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \Gamma_{jk}^t \mathbf{r}_t).\end{aligned}$$

با تغییر زیرنویس‌های مجازی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a^{sj} + \Gamma_{ks}^j a^{is} \right) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j.$$

عبارت داخل پرانتز بیان‌کننده مشتق هم وردا است:

$$\nabla_k a^{ij} = \frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a^{sj} + \Gamma_{ks}^j a^{is}.$$

به‌طور مشابه:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial q^k} (a_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) \\ &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j + a_{ij} \left(\frac{\partial r^i}{\partial q^k} \mathbf{r}^j + \mathbf{r}^i \frac{\partial r^j}{\partial q^k} \right) \\ &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j - a_{ij} (\Gamma_{kt}^i \mathbf{r}^t \mathbf{r}^j + \mathbf{r}^i \Gamma_{kt}^j \mathbf{r}^t) \\ &= \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_{sj} - \Gamma_{kj}^s a_{is} \right) \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j.\end{aligned}$$

همانند آنچه پیشتر نشان دادیم:

$$\nabla_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_{sj} - \Gamma_{kj}^s a_{is}.$$

تمرین ۴-۱۶. نشان دهید:

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_s^j + \Gamma_{ks}^j a_i^s \right) \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j,$$

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a_s^j - \Gamma_{kj}^s a_i^s \right) \mathbf{r}_i \mathbf{r}^j.$$

عبارت‌ای داخل پرانتز به همین روش نشان داده می‌شوند:

$$\nabla_k a_i^j = \frac{\partial a_i^j}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_s^j + \Gamma_{ks}^j a_i^s,$$

$$\nabla_k a_i^j = \frac{\partial a_i^j}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a_s^j - \Gamma_{kj}^s a_i^s.$$

خلاصه بحث

برای تانسور $\mathbf{A}$ مرتبه دوم داریم:

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} = \nabla_k a^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = \nabla_k a_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = \nabla_k a_i^j \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j = \nabla_k a_j^i \mathbf{r}_i \mathbf{r}^j$$

که:

$$\nabla_k a^{ij} = \frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a^{sj} + \Gamma_{ks}^j a^{is}, \quad \nabla_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_{sj} - \Gamma_{kj}^s a_{is},$$

$$\nabla_k a_i^j = \frac{\partial a_i^j}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_s^j + \Gamma_{ks}^j a_i^s, \quad \nabla_k a_j^i = \frac{\partial a_j^i}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a_s^j - \Gamma_{kj}^s a_i^s.$$

تمرین ۴-۱۷. نشان دهید مشتقات هم‌وردای هر مولفه تانسور متریک برابر صفر است؟

تمرین ۴-۱۸. ثابت کنید که مولفه‌های تانسور متریک هنگام مشتق‌گیری هم‌وردای

مولفه‌ها دارای رفتار یکسانی هستند؟

$$\nabla_k g^{st} a_t = g^{st} \nabla_k a_t, \quad \nabla_k g_{st} a^t = g_{st} \nabla_k a^t.$$

۴-۸ عملیات مشتق گیری

در اینجا به عملیات مشتق گیری دیگری که می توان بر میدان تانسوری و برداری اعمال کرد، می پردازیم. از چرخش بردار شروع می کنیم. به کمک (۴-۷) و (۴-۲۹) داریم:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^j \nabla_i f_j = \varepsilon^{ijk} \mathbf{r}_k \nabla_i f_j.$$

استفاده از (۴-۲۸) به ما اجازه می دهد که بنویسیم:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \varepsilon^{ijk} \mathbf{r}_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial q^i} - \Gamma_{ij}^n f_n \right). \quad (۴-۳۰)$$

با در نظر گرفتن جمله دوم داخل پرانتز، توسط (۴-۱۲) و تغییر نام زیرنویس های مجازی خواهیم داشت:

$$\varepsilon^{ijk} \Gamma_{ij}^n = \varepsilon^{ijk} \Gamma_{ji}^n = \varepsilon^{jik} \Gamma_{ij}^n$$

اما $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$ ، بنابراین $\varepsilon^{ijk} \Gamma_{ij}^n = -\varepsilon^{jik} \Gamma_{ij}^n$ به طوری که $\varepsilon^{ijk} \Gamma_{ij}^n = 0$. معادله

(۴-۳۰) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{r}_k \varepsilon^{ijk} \frac{\partial f_j}{\partial q^i}.$$

به عنوان مثال می دانیم که میدان برداری $\mathbf{E}$ الکترواستاتیک $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ را ارضا می کند. چنین میدانی غیر چرخشی نامیده می شود. بنابراین مختصات کلی هر میدان برداری $\mathbf{f}$ غیر چرخشی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\varepsilon^{ijk} \frac{\partial f_j}{\partial q^i} = 0.$$

البته عملیات $\nabla \times \mathbf{f}$ در چارچوب دکارتی توسط فرمول معروف زیر بیان می شود:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}.$$

اکنون به واگرایی $\mathbf{f}$ برمی‌گردیم. از رابطه زیر شروع می‌کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \nabla_i f_j = g^{ij} \nabla_i f_j.$$

به کمک نتیجه به دست آمده از تمرین ۴-۱۸ و معادله (۴-۲۷) می‌توان نوشت:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla_i g^{ij} f_j = \nabla_i f^i = \frac{\partial f^i}{\partial q^i} + \Gamma_{in}^i f^n. \quad (۴-۳۱)$$

همانند آنچه در (۴-۳۰) بود، می‌توان آن را ساده کرد؛ ابتدا باید تعریفی کاربردی از Γ_{in}^i ارائه دهیم. از رابطه زیر شروع می‌کنیم:

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^n} = \frac{\partial}{\partial q^n} [\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)] = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^n} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial q^n} (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial q^n} (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial q^n} + \mathbf{r}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^n} \times \mathbf{r}_3 \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial q^n} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^n} \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^n} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q^n} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q^n} \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial q^n} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

با بازنویسی آن به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^n} &= \mathbf{r}_{1n} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_{2n} \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_{3n} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \\ &= \Gamma_{1n}^i \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \Gamma_{2n}^i \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + \Gamma_{3n}^i \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \\ &= \Gamma_{1n}^2 \sqrt{g} + \Gamma_{2n}^3 \sqrt{g} + \Gamma_{3n}^1 \sqrt{g} \\ &= \sqrt{g} \Gamma_{in}^i. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\Gamma_{in}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^n}.$$

که همان تعریف مورد نیاز است و با آن می‌توان (۴-۳۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} f^i). \quad (4-32)$$

می‌دانیم که شرط تراکم ناپذیری مایع در علم هیدرومکانیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

که $\mathbf{v}$ سرعت هر نقطه مادی است، به طوری که تحت شرایط کلی می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} v^i) = 0.$$

قانون چشمه مغناطیسی در نظریه الکترومغناطیسی از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ پیروی می‌کند که در آن $\mathbf{B}$ میدان برداری است که بر چگالی شار مغناطیسی دلالت می‌کند. به طور کلی اگر $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ ، میدان برداری $\mathbf{f}$ سیم لوله‌ای نامیده می‌شود. همان گونه که می‌دانید $\nabla \cdot \mathbf{f}$ در چهارچوب دکارتی با عبارت شناخته شده زیر بیان می‌شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}.$$

تمرین ۴-۱۹. با استفاده از (۴-۳۲) عبارتی برای $\nabla \cdot \mathbf{f}$ در دستگاه مختصات کروی و استوانه‌ای به دست آورید؟
چرخش میدان تانسور $\mathbf{A}$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد. با رابطه زیر شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{r}^k \times \frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{r}^k \times \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \nabla_k a_{ij} \\ &= \varepsilon^{kin} \mathbf{r}_n \mathbf{r}^j \nabla_k a_{ij} \\ &= \varepsilon^{kin} \mathbf{r}_n \mathbf{r}^j \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s - \Gamma_{kj}^s a_{is} \right). \end{aligned}$$

سپس با استفاده از:

$$\varepsilon^{kin} \Gamma_{ki}^s = 0, \quad -r^j \Gamma_{kj}^s = \frac{\partial r^s}{\partial q^k},$$

خواهیم داشت:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon^{kin} \mathbf{r}_n \left(\mathbf{r}^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathbf{r}^s}{\partial q^k} a_{is} \right)$$

و بنابراین:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon^{kin} \mathbf{r}_n \frac{\partial}{\partial q^k} (\mathbf{r}^i a_{ij}).$$

برای محاسبه واگرایی (دایورژانس) میدان تانسور $\mathbf{A}$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{r}^k \cdot \frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \nabla_k a^{ij} \\ &= \mathbf{r}_j \nabla_i a^{ij} \\ &= \mathbf{r}_j \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial q^i} + \Gamma_{is}^i a^{sj} + \Gamma_{is}^i a^{is} \right). \end{aligned}$$

اما:

$$\mathbf{r}_j \Gamma_{is}^j = \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q^i}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{r}_j \frac{\partial a^{ij}}{\partial q^i} + \mathbf{r}_j \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^s} a^{sj} + \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q^i} a^{is} \\ &= \frac{\partial}{\partial q^i} (\mathbf{r}_j a^{ij}) + \mathbf{r}_j \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^i} a^{ij}. \end{aligned}$$

در نهایت به‌دست می‌آوریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} a^{ij} \mathbf{r}_j). \quad (۴-۳۳)$$

بیشتر مسایل ریاضی فیزیک به معادله لاپلاس یا پواسون تبدیل می‌شوند. تابع نامعلوم در این معادلات می‌تواند به صورت تابع عددی (همانند الکترومغناطیس) یا تابع برداری باشد. معادلات نظریه خطی کشسانی جابه‌جایی‌ها نیز از عملگر لاپلاس و دیگر عملیات که به صورت عملگر نابلا هستند، تشکیل می‌شود. در چارچوب‌های دکارتی نوشتن عبارت‌های متناظر ساده است. برای حل مسایل متناظر با استفاده از مختصات منحنی الخط نیاز به پیدا کردن فرمولی برای نمایش آنها داریم. با فرمولی که به تانسور مرتبه دوم $\nabla\nabla f$ مرتبط است، شروع می‌کنیم. داریم:

$$\nabla\nabla f = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\mathbf{r}^j \frac{\partial}{\partial q^j} \right) = \mathbf{r}^i \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial q^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial q^k} \right) \mathbf{r}^j,$$

بنابراین:

$$\nabla\nabla f = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial q^k} \right). \quad (34-4)$$

از اینجا می‌بینیم که:

$$(\nabla\nabla f)^T = \nabla\nabla f \quad (35-4)$$

که به خاطر متقارن بودن (i و j) ضریب کریستوفل و بقیه عبارت در سمت راست (34-4) آشکار است. اضافه کردن صوری^۴ از عملیات حاصل ضرب نقطه‌ای بین بردارها (34-4) به ما اجازه می‌دهد تا عبارتی برای معادله لاپلاسی $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot \nabla f$ به دست آوریم:

$$\nabla^2 f = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial q^k} \right) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial q^k} \right). \quad (36-4)$$

بنابراین معادله لاپلاس $\nabla^2 f = 0$ با مختصات کلی زیر ظاهر می‌شود:

^۴ این نوع عملیات را می‌توان برای هر جفت بردار به کار برد؛ با وارد کردن یک نقطه از **ab** می‌توان یک مقدار عددی **ab** به دست آورد. این عملیات وقتی با تانسور **A** به کار برده شود، معانی دیگری دارد: اگر تانسور به صورت ترکیبی $a_i^j \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ بنویسیم، $a_i^j \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j$ را به دست می‌آوریم. این بدان معنا است که اولین ناورد **A** به عنوان رد **A** شناخته می‌شود.

$$g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial q^k} \right) = 0.$$

در چارچوب دکارتی، (۴-۳۶) به صورت زیر است:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

اما در چارچوب کروی و استوانه‌ای به ترتیب عبارت است از:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

تمرین ۴-۲۰. نشان دهید اضافه کردن صوری عملیات ضرب متقاطع بردارهای (۴-۳۴) به ایجاد تعریف مفید زیر منجر می‌شود:

$$\nabla \times \nabla f = 0,$$

که برای هر میدان اسکالر f صادق است.

از آنجایی که مقدار مشتق گیری برای چیزهایی شبیه عدد f هم ورده و مفید است، می‌توان نوشت:

$$\nabla \nabla f = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{r}^j \frac{\partial}{\partial q^j} f = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} (\mathbf{r}^j \nabla_j f) = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \nabla_i \nabla_j f = \mathbf{r}^j \mathbf{r}^i \nabla_i \nabla_j f$$

که در آخرین گام از (۴-۳۵) استفاده کردیم. نتیجه متناظری برای لاپلاسی وجود دارد:

$$\nabla^2 f = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \nabla_i \nabla_j f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = \nabla^j \nabla_j f$$

که در آن:

$$\nabla^j \equiv \nabla^{ij} \nabla_i.$$

لاپلاسی بردار در کاربردهای فیزیکی همانند نظریه میدان الکترومغناطیسی مورد

استفاده قرار می‌گیرد. برای این حالت داریم:

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{f} = \mathbf{r}^k \cdot \frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_i f^j = \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_k \nabla_i f^j = g^{ki} \mathbf{r}_j \nabla_k \nabla_i f^j$$

بنابراین:

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \nabla^i \nabla_i f^j.$$

همچنین:

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} (\sqrt{g} f^j) \right] = \mathbf{r}^i \nabla_i \nabla_j f^j.$$

می‌توان نشان داد که:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{f} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{f} - \nabla^2 \mathbf{f}.$$

۴-۹ دستگاه‌های مختصات متعامد

بیشتر چارچوب مختصات مورد استفاده معمولاً دکارتی، استوانه‌ای و کروی است. تمام آنها متعامد هستند. چارچوب‌های مختصات متعامد زیاد دیگری نیز وجود دارد. لازم است رفتار کلی این دستگاه‌ها تعریف شود زیرا تعامد دو به دو بردارهای چارچوب باعث سادگی بیشتر فرمول‌ها می‌شود. علت دیگر برای تعریف رفتار کلی این حقیقت است که در کاربردها، دانستن اندازه مولفه‌های میدان دارای اهمیت است. فرمول بندی کلی ارایه شده در بالا برای این منظور کاربردی نیستند؛ یعنی بردارهای چارچوب کلی دارای طول یکتایی نیستند، بنابراین اندازه جهت منسوب به هر بردار در چارچوب متعامد با مولفه متناظر بردار برابر نیست. مولفه‌های فیزیکی هر بردار در چارچوب‌های متعامد به طور قراردادی توسط ضرایب لامه نمایش داده می‌شود.

در این بخش، چارچوب‌هایی که بردارهای مختصات دو به دو برهم عمود هستند را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0, \quad i \neq j.$$

ضرایب لامه H_i عبارتند از:

$$(H_i)^2 = g_{ii} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

توجه داشته باشید که H_i طول بردار چارچوب $\mathbf{r}_i$ است. چارچوب مختصات در هر (q^1, q^2, q^3) متعامد است. در چارچوب متعامد با استفاده از پایه‌های متقابل، بردارهای $\mathbf{r}^i$ به کمک $\mathbf{r}_i$ هم‌جهت شده و حاصل ضرب طول‌های آنها برابر یک است. بنابراین:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}^i / (H_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

اکنون چارچوبی را که بردارهای هم جهت شده آن با بردارهای پایه که طول یکسانی دارند، تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i / H_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

پس در هر نقطه، بردار $\mathbf{r}_i$ پایه‌های دکارتی را تشکیل می‌دهند که هنگام حرکت مبدا چارچوب از یک نقطه به نقطه دیگر، چارچوب دوران می‌کند. وقتی بردارها بر اساس این پایه‌ها داده می‌شوند باید تمام فرمول‌های اصلی مشتق‌گیری ارایه گردند. اینها از نظر تئوری جالب توجه به نظر نمی‌رسند زیرا بسیاری از ویژگی‌های تقارن در آنها نادیده گرفته شده، اما هنگام محاسبات در مختصات متناظر وجود آنها ضروری به نظر می‌رسد. با نمادگذاری زیر شروع می‌کنیم:

$$\mathbf{r}_i = H_i \hat{\mathbf{r}}_i, \quad \mathbf{r}^i = \hat{\mathbf{r}}_i / H_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

اکنون $\hat{\mathbf{r}}_i$ را در دستگاه کروی و استوانه‌ای محاسبه می‌کنیم. در چارچوب استوانه‌ای:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1,$$

داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_1 &= \hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi, \\ \hat{\mathbf{r}}_2 &= -\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi, \\ \hat{\mathbf{r}}_3 &= \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

در چارچوب کروی:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta,$$

داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_1 &= \hat{\mathbf{x}} \sin \phi \cos \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta, \\ \hat{\mathbf{r}}_2 &= \hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \sin \phi - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta, \\ \hat{\mathbf{r}}_3 &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi. \end{aligned}$$

مشتق گیری بر حسب پایه های متعامد

عملگر ∇ می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\nabla = \frac{\hat{\mathbf{r}}_i}{H_i} \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

(در این فرمول روی i عمل جمع انجام می گیرد و برای تمامی فرمول های این بخش به کار گرفته می شود. در اینجا قرارداد جمع روی شاخص های بالا و پایین تعریف اصلاح می شود زیرا در دستگاه دکارتی که چارچوب $\hat{\mathbf{r}}_i$ به صورت موضعی تشکیل می شود، پایه های متقابل و اصلی بر هم منطبق هستند.) اکنون می خواهیم برای بردارهای چارچوب جدید، فرمول های مشتق گیری را به دست آوریم. با فرمول (۴-۱۸) شروع می کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_t &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{it}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{tj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^t} \right) \\ &= H_t \frac{\partial H_i}{\partial q^j} \delta_{it} + H_t \frac{\partial H_j}{\partial q^i} \delta_{jt} - H_i \frac{\partial H_j}{\partial q^t} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

در اینجا از این اصل که $g_{ij} = 0$ برای $i \neq j$ استفاده کردیم. از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_t &= \frac{\partial}{\partial q^j} (H_i \hat{\mathbf{r}}_i) \cdot H_t \hat{\mathbf{r}}_t \\ &= \frac{\partial H_i}{\partial q^j} \hat{\mathbf{r}}_i \cdot H_t \hat{\mathbf{r}}_t + H_i \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \cdot H_t \hat{\mathbf{r}}_t \\ &= \frac{\partial H_i}{\partial q^j} H_t \delta_{it} + H_i H_t \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \cdot \hat{\mathbf{r}}_t. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \cdot \hat{\mathbf{r}}_t = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_t}{\partial q^i} \delta_{jt} - \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_i}{\partial q^t} \delta_{ij}.$$

بنابراین:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} = \sum_{t=1}^3 \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial H_t}{\partial q^i} \delta_{jt} - \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_i}{\partial q^t} \delta_{ij} \right) \hat{\mathbf{r}}_t.$$

(توجه داشته باشید که مولفه‌های بردارها در چارچوب مشابه $\mathbf{r}_i$ بیان می‌شوند.) با استفاده از آن به‌دست می‌آوریم:

$$\nabla \hat{\mathbf{r}} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{r}}_i}{H_j} \frac{\partial}{\partial q^j} (f_i \hat{\mathbf{r}}_i).$$

گرادیان، دایورژانس و چرخش میدان برداری $\mathbf{f}$ به‌صورت زیر است:

$$\nabla \mathbf{f} = \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial f_i}{\partial q^j} - \frac{f_i}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q^j} + \delta_{ij} \frac{f_i}{H_k} \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial q^k} \right)$$

9

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} (H_2 H_3 f_1) + \frac{\partial}{\partial q^2} (H_3 H_1 f_2) + \frac{\partial}{\partial q^3} (H_1 H_2 f_3) \right) \quad (۳۷-۴)$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \times \hat{\mathbf{r}}_j}{H_i H_j} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} (H_j f_j) - \frac{\partial}{\partial q^j} (H_i f_i) \right). \quad (۳۸-۴)$$

به کمک گرادیان می‌توان تانسوری با کشش کوچک را برای بردار جابه‌جایی، $u = u_i \hat{\mathbf{r}}_i$ ، که عنصر اصلی کشسانی خطی است، نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial u_i}{\partial q^j} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial u_j}{\partial q^i} - \frac{u_i}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q^j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_j}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q^i} + 2\delta_{ij} \frac{u_t}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q^t} \right). \end{aligned} \quad (۳۹-۴)$$

لاپلاسی میدان عددی f برابر است با:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q^1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (۴۰-۴)$$

به عنوان مثال، در دستگاه‌های مختصات کروی و استوانه‌ای (۳۷-۴) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

9

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi},$$

در حالی که (۴-۳۸) به صورت زیر می شود:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f_z}{\partial \phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho f_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial f_\rho}{\partial \phi} \right)$$

9

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{f} = & \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\phi) - \frac{\partial f_\theta}{\partial \phi} \right) \\ & + \hat{\theta} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial f_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial (r f_\phi)}{\partial r} \right) \\ & + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r f_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

حالت های خاص (۴-۴۰) در مختصات کروی و استوانه ای در بخش ۴-۸ آمده است.

۴-۱۰ برخی فرمول های انتگرال

فرض کنید $f(x_1, x_2, x_3)$ تابع پیوسته ای از مختصات دکارتی x_1, x_2, x_3 در حجم V باشد. فرض کنید q^1, q^2, q^3 مختصات منحنی الخط در همان حجم است که با تناظر یک به یک با مختصات دکارتی به صورت پیوسته مشتق پذیر باشد، به طوری که بعد از تبدیل مختصات تابع به صورت $f(q^1, q^2, q^3)$ قابل نوشتن است. تبدیل عبارتست از:

$$\int_V f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_V f(q^1, q^2, q^3) J dq^1 dq^2 dq^3$$

که:

$$J = \sqrt{g} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q^j} \right|$$

ژاکوبی نامیده می‌شود.

تمرین ۴-۲۱. نشان دهید که دترمینان‌های ژاکوبی تبدیل از مختصات دکارتی به مختصات کروی و استوانه‌ای به ترتیب عبارتند از:

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} \right| = \rho, \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = r^2 \sin \theta.$$

تمرین ۴-۲۲. دو مختصه تبدیل به‌دست آمده برابر هستند با $x^i = x^i(q^j)$ و $x^i = x^i(\tilde{q}^j)$. نشان دهید که دترمینان ژاکوبی تبدیل ترکیبی $q^i = q^i(\tilde{q}^j)$. برابر است با:

$$\left| \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3)} \right| = \left| \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(q^1, q^2, q^3)} \right| \left| \frac{\partial(q^1, q^2, q^3)}{\partial(\tilde{q}^1, \tilde{q}^2, \tilde{q}^3)} \right|.$$

انتگرال جزء به جزء برای تابع‌های $f(x_1, x_2, x_3)$ و $g(x_1, x_2, x_3)$ که در حجم معین V با کران هموار S مشتق پذیر هستند با فرمول معروف گاوس-استروگاردسکی بیان می‌شود:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_k} g \, dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_V \frac{\partial g}{\partial x_k} f \, dx_1 dx_2 dx_3 + \int_S f g n_k dS,$$

در اینجا dS دیفرانسیل جزء سطح S و n_k بزرگی بردار عمود به سمت بیرون n از S روی محور $\mathbf{i}_k$ است. در حالت خاص که $g = 1$ داریم:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_k} g \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_S f g n_k dS, \quad (۴-۴۱)$$

اکنون با استفاده از (۴-۴۱) می‌توان برخی فرمول‌های شامل عملگر نابلا را که به‌طور متناوب مورد استفاده قرار می‌گیرد، به‌دست آورد. این فرمول‌ها علی‌رغم این حقیقت که تبدیلات واسطه که در مختصات دکارتی انجام می‌شود، در مختصات منحنی الخط نیز قابل استفاده هستند زیرا نتایج نهایی به شکل بدون مختصه نوشته می‌شوند. با انتگرال ∇f شروع می‌کنیم:

$$\int_V \nabla f dv = \int_V \mathbf{i}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 dx_2 dx_3 = \mathbf{i}_k \int_S f g n_k dS = \int_S f \mathbf{n} dS.$$

اکنون فرمول مشابهی را برای تابع برداری $\mathbf{f}$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \mathbf{f} dV &= \int_V \mathbf{i}_k \frac{\partial f_t}{\partial x_k} \mathbf{i}_t dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \mathbf{i}_k \mathbf{i}_t \int_S n_k f_t dS \\ &= \int_S n_k \mathbf{i}_k f_t \mathbf{i}_t dS \\ &= \int_S \mathbf{n} f dS. \end{aligned}$$

از آنجایی که سمت چپ و راست به صورت بدون مختصه نوشته شده، از این فرمول می توان برای هر چارچوب مختصاتی $dV = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3$ استفاده کرد. این فرمولی برای هر تانسور $\nabla \mathbf{f}$ است؛ برای به دست آوردن آن داریم:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \mathbf{f} dV &= \int_V \mathbf{i}_k \frac{\partial f_t}{\partial x_k} \mathbf{i}_t dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_t \int_S n_k f_t dS \\ &= \int_S n_k \mathbf{i}_k \cdot f_t \mathbf{i}_t dS \\ &= \int_S \mathbf{n} f dS. \end{aligned}$$

با روش مشابه می توان به دست آورد:

$$\int_V \nabla \times \mathbf{f} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS.$$

به آسانی دیده می شود که:

$$\int_V \nabla \times \mathbf{f}^T dV = \int_S (\mathbf{n} \mathbf{f})^T dS = \int_S \mathbf{f} \mathbf{n} dS.$$

خواننده به همین روش می تواند با استفاده از (۴-۴۱) فرمول های زیر را برای میدان تانسور $\mathbf{A}$ به دست آورد:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \mathbf{A} dV &= \int_S \mathbf{n} \mathbf{A} dS, \\ \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS, \end{aligned}$$

۹

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS$$

در پایان می‌توان فرمول استوکس را به شکل بدون مختصه نوشت. یاد آور می‌شویم که این تابع برداری $\mathbf{f}$ روی سطح بسته S را به تابع دورانی آن روی قطعه‌ای از مدل مرزی هموار Γ مرتبط می‌کند:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{f} dS.$$

این فرمول برای تانسور $\mathbf{A}$ نوع دوم به دو فرمول زیر تبدیل می‌شود:

$$\oint_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} dS$$

۹

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A}^T dS.$$

اثبات این فرمول‌ها را به خواننده واگذار می‌کنیم. باید توجه داشت که فرمول استوکس تنها زمانی که S سطح بسته است، کاربرد دارد؛ فرمول برای سطح چند تکه یا دو تکه باید توسط مقادیر ثابت متناوب اصلاح شود.

۴-۱۱ مسایل

در این دسته تمرین‌ها $\mathbf{u}$ میدان برداری، f, g, h تابع‌های یکنواخت، a, b, c ثابت های دلخواه، $\mathbf{A}$ تانسور مرتبه دوم، $\mathbf{r}$ بردار مکان هر نقطه مادی، $\mathbf{n}$ بردار یکه خارجی عمود بر مرز جسم در نظر گرفته می‌شود.

۴-۱ تابع $f = f(r)$ را با $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ در نظر بگیرید. کمیت‌های ∇f و $\nabla^2 f$ را بیابید.

۴-۲ کمیت‌های a, b, c ثابت دلخواه، f, g تابع‌های دلخواه و $\mathbf{u}$ میدان برداری را در نظر بگیرید. $\nabla \mathbf{u}$ و $\nabla \cdot \mathbf{u}$ را برای $\mathbf{u}$ های زیر بیابید.

$$\mathbf{u} = ax_1 \mathbf{i}_1 + bx_2 \mathbf{i}_2 + cx_3 \mathbf{i}_3 \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{u} = ax_1 \mathbf{i}_1 \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{u} = a\mathbf{r} \quad (\text{پ})$$

$$(ت) \quad \mathbf{u} = f(r) \mathbf{e}_r \quad (\text{با فرض مختصات قطبی})$$

$$(ث) \quad \mathbf{u} = f(r) \mathbf{e}_\phi \quad (\text{با فرض مختصات قطبی})$$

$$(ج) \quad \mathbf{u} = f(r) \mathbf{e}_z \quad (\text{با فرض مختصات استوانه‌ای})$$

$$(چ) \quad \mathbf{u} = f(r) \mathbf{e}_r \quad (\text{با فرض مختصات کروی})$$

$$(ح) \quad \omega = \text{ثابت} , \quad \mathbf{u} = \omega \times \mathbf{r}$$

$$(خ) \quad \mathbf{u} = f(\phi) \mathbf{e}_z + g(\phi) \mathbf{e}_\phi \quad (\text{با فرض مختصات استوانه‌ای})$$

$$(د) \quad \mathbf{u} = f(z) \mathbf{e}_z + g(\phi) \mathbf{e}_\phi \quad (\text{با فرض مختصات استوانه‌ای})$$

$$(ذ) \quad \mathbf{A} = \text{ثابت} , \quad \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$$

۳-۴ نشان دهید که:

$$(الف) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{f} + \mathbf{A}^T \cdot \nabla \mathbf{f}$$

$$(ب) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \cdot \nabla \mathbf{B}$$

$$(پ) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \times \mathbf{r} \quad \text{اگر } \mathbf{A} \text{ تانسور متقارن باشد: } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

$$(ت) \quad \nabla \cdot [(\mathbf{E} \times \omega) \times \mathbf{r}] = 2\omega + (\nabla \times \omega) \times \mathbf{r}$$

$$(ث) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$(ج) \quad \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{f} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + 2\mathbf{f}$$

$$(چ) \quad \text{tr}[\nabla \times (\mathbf{E} \times \omega)] = -2\nabla \cdot \omega$$

$$(ح) \quad \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{f})^T - (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{E}] = 0$$

$$(خ) \quad \nabla \cdot [\nabla \mathbf{f} \times \nabla \mathbf{g}] = 0$$

$$(د) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})^T \quad \text{تانسور متقارن است اگر } \mathbf{A} \text{ متقارن باشد}$$

$$(ذ) \quad \nabla \times (\mathbf{f} \mathbf{f}) = \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{f} + (\mathbf{f} \nabla) \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{f})$$

$$(ر) \quad \text{tr}[\nabla \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})] = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A}^T \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(ز) \quad (\nabla \mathbf{f})_{\times} = \nabla \times \mathbf{f}$$

۴-۴ عبارتهای زیر را به دست آورید:

$$(الف) \quad \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{r})$$

(ب) $\nabla \times [\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{r}]^T$ ، اگر $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ثابت؛

(پ) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$ ، اگر $\mathbf{A}$ ثابت؛

(ت) $\nabla \cdot (\mathbf{fE})$ ؛

(ث) $\nabla \cdot (\mathbf{rE})$ ؛

(ج) $\nabla \cdot (\mathbf{rr})$.

۴-۵ فرض کنید که f, g, h تابع‌های یکنواخت دلخواه هستند و $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$.
واگرایی تانسور $\mathbf{A}$ را که توسط فرمول‌های زیر داده شده‌اند، بیابید.

(الف) $\mathbf{e} = f(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + g(r)\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_\phi + h(z)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ ؛

(ب) $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + g(r)\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_\phi + g(r)\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta$ ؛

(پ) $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + g(r)\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_\phi + h(r)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ ؛

(ت) $\mathbf{A} = f(x_1)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + g(x_2)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + h(x_3)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$ ؛

(ث) $\mathbf{A} = f(x_2)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + g(x_3)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + h(x_1)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$ ؛

(ج) $\mathbf{A} = f(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\phi + g(r)\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_r + h(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_z$ ؛

(چ) $\mathbf{A} = f(z)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_z + g(z)\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_r + h(z)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_r$.

۴-۶ فرض کنید که $\mathbf{A}$ تانسور متقارن مرتبه دوم است که به مختصات بستگی دارد.

کمیت $\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ را به دست آورید. عبارت $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$ را برحسب $\mathbf{f}$ بیابید.

۴-۷ مختصات استوانه ای بیضی با فرمول‌های زیر به مختصات دکارتی مربوط می‌شود:

$$x_1 = a\sigma\tau$$

$$x_2 = \pm a\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}$$

$$x_3 = z,$$

که $|\tau| \leq 1$ ، $\sigma \geq 1$ پارامتر مثبت است. بنابراین σ, τ, z مختصات درونی استوانه هستند. نشان دهید که مختصات درونی متعامد بوده و ضرایب لامه آنها را به دست آورید.

۴-۸ مختصات سهموی σ, τ, ϕ در فضا با مختصات دکارتی x_1, x_2, x_3 توسط فرمول‌های زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$x_1 = \sigma \tau \cos \phi,$$

$$x_2 = \sigma \tau \sin \phi,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2),$$

در اینجا a پارامتر مثبت است. نشان دهید دستگاه مختصات سهموی، متعامد است. ضرایب لامه آن را به دست آورید.

۴-۹ مختصات استوانه‌ای دوقطبی σ, τ, z با مختصات دکارتی x_1, x_2, x_3 توسط فرمول‌های زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$x_1 = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma},$$

$$x_2 = \frac{a \sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma},$$

$$x_3 = z,$$

در اینجا a پارامتر مثبت است. نشان دهید دستگاه مختصات دواستوانه‌ای، متعامد است. ضرایب لامه آن را به دست آورید.

۴-۱۰ مختصات دوقطبی σ, τ, ϕ با مختصات دکارتی x_1, x_2, x_3 توسط فرمول‌های زیر به هم مربوط هستند:

$$x_1 = \frac{a \sin \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \cos \phi,$$

$$x_2 = \frac{a \sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \sin \phi,$$

$$x_3 = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma},$$

در اینجا $0 \leq \sigma < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ پارامتر مثبت است. نشان دهید دستگاه مختصات دوقطبی، متعامد است. ضرایب لامه آن را به دست آورید.

۴-۱۱ مختصات مارپیچی σ, τ, ϕ با مختصات دکارتی توسط فرمول‌های زیر به هم مربوط هستند:

$$x_1 = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \cos \phi,$$

$$x_2 = \frac{a \sinh \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \sin \phi,$$

$$x_3 = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma},$$

در اینجا $0 \leq \sigma < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ پارامتر مثبت است. نشان دهید دستگاه مختصات مارپیچی، متعامد است. ضرایب لامه آن را به دست آورید.

۴-۱۲ با استفاده از قضیه گاوس - استروگراسکی نشان دهید که:

$$\int_S \mathbf{nr} \cdot dS = V \mathbf{E},$$

در اینجا V حجم دامنه محصور توسط سطح S است.

۴-۱۳ نشان دهید که حجم V جسم که توسط سطح S محصور است با فرمول‌های زیر داده می‌شود:

(الف)

$$V = \frac{1}{6} \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla r^2 dS, \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r},$$

(ب)

$$V = \frac{1}{3} \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS.$$

۴-۱۴ فرض کنید که $\mathbf{a}$ میدان برداری است که شرط $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ را ارضا می‌کند. با استفاده از فرمول گاوس - استروگراسکی نشان دهید که:

$$\int_S f \mathbf{na} \cdot dS = \int_V (\nabla f) \cdot \mathbf{a} dV.$$

۴-۱۵ فرض کنید که S سطح بسته است. نشان دهید که:

$$\int_S \mathbf{n} dS = \mathbf{0}.$$

۴-۱۶ تانسور مرتبه دوم $\mathbf{A}$ را متقارن فرض کنید. تساوی زیر را اثبات کنید:

$$\int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) dS = \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV.$$

۴-۱۷ تساوی زیر را اثبات کنید:

$$\int_V \nabla^2 \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{A} dS.$$

۱۸-۴ فرض کنید $\mathbf{A}$ تانسور مرتبه دوم است. در حجم V قرار می‌دهیم $\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ و

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}|_S = \mathbf{g}$ روی سطح S که حجم V را محصور کرده، عبارت زیر را بیابید:

$$\int_V \mathbf{A} dV.$$

۱۹-۴ تساوی $\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A}$ ($\mathbf{n} \times \nabla$) را اثبات کنید.

فصل ۵: مقدمات هندسه دیفرانسیل

لب کلام هندسه دبیرستان به مسایل دو هزار ساله قبل که هندسه بر مبنای فلسفه طبیعی بود، مربوط می‌شود. اما یونانیان باستان پژوهش‌های خود را به دایره و خط مستقیم اجزای اقلیدوسی محدود نکردند. ارشمیدس با به کارگیری روش‌ها و ایده‌هایی که بعدها زیربنای آنالیز کمیت‌های بسیار کوچک شد، توانست طول مارپیچ و مساحت و حجم برخی شکل‌های پیچیده دیگر را محاسبه کند. در جبر مقدماتی با توابع مربعی از قبیل سهمی و هذلولی و همچنین در هندسه تحلیلی با شکل‌های فضایی همانند بیضی‌گون‌ها آشنا شده‌ایم. به طور کلی روش‌های به کار گرفته شده به دکارت منسوب است که ایده‌های موجود در هندسه و جبر را به هم مرتبط کرده و بیشتر کاربرد آنها را به اجسامی محدود کرد که با معادلات مرتبه دوم توصیف می‌شوند. بالاخره در حسابان پایه فرمول‌هایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که اجازه محاسبه طول خم و غیره را به ما می‌دهد. در حال حاضر این روش‌های بسیار قدرتمند، شاخه‌ای از ریاضیات به نام هندسه دیفرانسیل را به وجود آوردند.

هندسه دیفرانسیل اجازه می‌دهد که خم‌ها و شکل‌ها را به طور کاملاً طبیعی دسته بندی کنیم. اهمیت عملی این موضوع به خوبی توسط مساله بهینه سازی تعقیبی که جسمی سعی می‌کند جسم متحرک دیگری را بگیرد، تعیی می‌شود.^۵ البته از اجسام استاندارد همانند دایره و سهمی و غیره به عنوان مثال‌های خاصی که با خواص آنها

^۵ حالت خنده داری از چنین مثالی این است که دو خانم مسن در جهت مخالف یکدیگر حول تپه نیمه کروی که در کمترین زمان ممکن به طور ریاضی به عقب و جلو تا نزدیکی دماغ‌هایشان پرواز می‌کنند.

آشنا هستیم، استفاده می‌کنیم؛ در این حالت اجسام هندسه پایه و تحلیلی هر دو به عنوان هدف اصلی در هندسه دیفرانسیل وارد می‌شوند.

۵-۱- واقعیت‌های مقدماتی از نظریه خم‌ها

در فصل ۴ ایده خم مختصاتی در فضا را تعریف کردیم که با حرکت نوک بردار شعاعی وقتی یکی از مولفه‌های q^1, q^2, q^3 تغییر کند در حالی که دوتای دیگر ثابت باشند، توصیف می‌شود. اکنون یک خم کلی را در نظر می‌گیریم که همانند بردار شعاعی نقطه، مبدا در ابتدای آن و نقطه انتهای آن در امتداد خم در فضا حرکت می‌کند. با به کار گیری برخی پارامتر t می‌توان موقعیت بردار شعاعی را توصیف کرد (برای هر خم مختصاتی این مقدار q^i است). پس هر خم را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1-5)$$

که t روی مجموعه در امتداد محور حقیقی تغییر می‌کند. هر مقدار از t متناظر با یک نقطه از خم است. همیشه مگر جایی که قید شده باشد، فرض می‌شود که وابستگی $\mathbf{r}$ به t بقدر کافی هموار است به طوری که $\mathbf{r}'(t)$ در هر نقطه t پیوسته و جایی که لازم باشد شرایط مشابهی برای $\mathbf{r}''(t)$ برقرار است. مفهوم نرم بردار برای این منظور لازم است (§۷-۲). در اینجا این نرم را توسط نمادهای معمولی اندازه یک بردار با $|\mathbf{r}|$ نمایش می‌دهیم. یادآور می‌شویم که در فصل ۴ بردارهای مختصاتی $\mathbf{r}_i$ که مماس بر خط های مختصاتی بود را معرفی کردیم. اکنون بردار مماس بر هر خم دلخواه در نقطه t که با $\mathbf{r}'(t)$ برابر است را معرفی می‌کنیم. مشتق بردار شعاعی متناظر با خم (۱-۵) برابر است با:

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)dt.$$

طول هر جزء از خم برابر است با:

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt,$$

و طول هر بخش متناظر با $t \in [a, b]$ برابر است با:

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt.$$

تمرین ۵-۱. (الف) طول یک دور از مارپیچ زیر را بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}_1 \cos t + \mathbf{i}_2 \sin t + \mathbf{i}_3 t.$$

(ب) محیط بیضی زیر که در صفحه $z = 0$ قرار دارد را بیابید.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

تمرین ۵-۲. نشان دهید که فرمول‌های کلی طول کمان در دستگاه‌های مختصات قائم، استوانه‌ای و کروی برابرند با:

$$s = \int_a^b \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt,$$

$$s = \int_a^b \left[\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt,$$

$$s = \int_a^b \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt.$$

پارامتری سازی طبیعی خم نظریه‌ی بسیار ساده‌ای است که در آن پارامتر متناظر با طول خم محاسبه شده از نقطه پایانی:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

برابر است. با این پارامترسازی

$$ds = |\mathbf{r}'(s)| ds \quad \text{پس} \quad |\mathbf{r}'(s)| = 1.$$

بنابراین هنگامی که یک خم به‌طور طبیعی پارامتر سازی می‌شود، $\tau(s) = \mathbf{r}'(s)$ برابر مماس یکه در نقطه s است. در این بخش s نشان دهنده پارامتر طول یک خم است.

تمرین ۵-۳. مارپیچ تمرین ۵-۱ را مجدداً برحسب پارامتر طبیعی طول s پارامتر سازی کنید. سپس بردار یکه مماس بر مارپیچ را به‌عنوان تابعی از s محاسبه نمایید.

اگر پارامترسازی دیگری از خم نسبت به پارامترسازی طبیعی $s = s(t)$ وجود داشته باشد، آنگاه بردار $d\mathbf{r}(s(t))/dt$ نیز بر خم در نقطه $s = s(t)$ مماس است. برای مشتق یک تابع برداری قاعده زنجیره‌ای برقرار است:

$$\frac{d\mathbf{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \bigg|_{s=s(t)} \frac{ds}{dt}$$

همانطوری که از هندسه تحلیلی می‌دانیم، هنگامی که موقعیت یک نقطه $\mathbf{a}$ از یک خط مستقیم و جهت دار $\mathbf{b}$ را بدانیم، آنگاه شکل پارامتری خط به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}.$$

این فرمول معادله برداری خط مماس به خم در نقطه $\mathbf{r}(t_0)$ را به دست می‌دهد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \mathbf{r}'(t_0).$$

در مختصات دکارتی (x, y, z) این معادله به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + \lambda x'(t_0), \\ y &= y(t_0) + \lambda y'(t_0), \\ z &= z(t_0) + \lambda z'(t_0), \end{aligned} \quad (2-5)$$

که در شکل غیر پارامتری برابر است با:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \quad (3-5)$$

تمرین ۴-۵. خم مسطح

$$\mathbf{r}(t) = e^t (\mathbf{i}_1 \cos t + \mathbf{i}_2 \sin t),$$

را توصیف کرده و معادله خط مماس بر این خم در نقطه $t = \pi/4$ را بیابید.

تمرین ۵-۵. (الف) معادلات خط مماس به خم‌های مسطح متناظر با - و- را در مختصات قطبی بیابید. (ب) زاویه بین مماس در نقطه‌ای از خم و بردار شعاعی (شروع از مبدا) در این نقطه را بیابید.

تمرین ۶-۵. معادلات خط مماس بر خم متناظر با (۲-۵) و (۳-۵) را در مختصات استوانه‌ای و کروی بنویسید.

توجه داشته باشید که به دست آوردن بردار مماس در صورتی امکان پذیر است که $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. نقطه t_0 که در آن $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{0}$ تکین نامیده می شود.

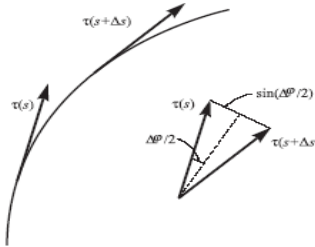
تمرین ۶-۷. برای خم بقدر کافی هموار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، مماس در یک نقطه تکین را بیابید.

تمرین ۵-۸. تحت شرایط تمرین قبل، مماس بر نمایش نوع (۵-۲) را بیابید.

خمیدگی

برای جزیی از کمان یک دایره متناظر با طول ∇s و شعاع R با زاویه مرکزی $\nabla \varphi$ طبق $\nabla s = R \nabla \varphi$ در ارتباط است. بنابراین خمیدگی $k = 1/R$ برابر است با:

$$k = \frac{\nabla \varphi}{\nabla s}.$$



شکل ۵-۱ محاسبه خمیدگی

خمیدگی یک خم مسطح دلخواه در یک نقطه به صورت حد زیر تعریف می شود:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\nabla \varphi}{\nabla s}$$

که در آن $\Delta \varphi$ تغییر زاویه مماس در جزیی از خم است. برای خم فضایی بردار مماس $\tau(s)$ نقش مماس را ایفا می کند. وقتی نقطه ای روی جزیی از خم متناظر با Δs حرکت می کند، مماس به اندازه زاویه $\Delta \varphi$ می چرخد. شکل ۵-۱ تشریح می کند که $|\tau(s + \Delta s) - \tau(s)|$ برابر $2 \sin(\Delta \varphi / 2)$ است. چون

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{(\Delta\varphi/2)} = 1,$$

خمیدگی خم فضایی به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\nabla \varphi}{\nabla s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\tau(s + \Delta s) - \tau(s)|}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}'(s + \Delta s) - \mathbf{r}'(s)|}{\Delta s} \\ &= |\mathbf{r}''(s)|. \end{aligned} \quad (۴-۵)$$

عمداً خمیدگی را به صورتی تعریف کردیم که مثبت باشد. برای خم مسطح خمیدگی به گونه ای تعریف می شود که - بتواند بستگی به تحدب مثبت یا منفی باشد ("تحدب بالا" یا "تحدب پایین").

تمرین ۵-۹. یک ماریچ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}_1 \alpha \cos t + \mathbf{i}_2 \alpha \sin t + \mathbf{i}_3 \beta t.$$

خمیدگی را به عنوان تابعی از پارامترهای α و β مطالعه نموده و نشان دهید $k \rightarrow 0$ همان طوری که $\alpha \rightarrow 0$ و $k \rightarrow 1/\alpha$ همان طوری که $\beta \rightarrow 0$. توضیح دهید.

سه وجهی متحرک

توجه داشته باشیم که $\tau = 1$. $\tau^2 = \tau$ برای هر s . این بدین معنی است که:

$$\frac{d}{ds} \tau^2(s) = 2\tau(s) \cdot \tau'(s) = 0, \quad (۵-۵)$$

در نتیجه $\tau'(s)$ بر $\tau(s)$ عمود است.

تذکر ۵-۱. واضح است که $\tau(s)$ در (۵-۵) لزوماً بردار مماس نیست. بنابراین یک گزاره کلی داریم: هر بردار $e(s)$ بر مشتقش $e'(s)$ عمود است. یعنی، $e(s) \cdot e'(s) = 0$.

قائم/اصلی U در نقطه S با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$v = \frac{\mathbf{r}''(s)}{k}. \quad (۵-۶)$$

اگر خم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ در یک صفحه باشد، به وضوح U در همان صفحه قرار می‌گیرد. صفحه گذرنده از نقطه S که شامل یک مماس بر خم در این نقطه باشد را صفحه مماس نامیم. از بین تمامی این صفحات مماس در یک نقطه از یک خم نامسطح، صفحه یکتایی وجود دارد که نقش صفحه‌ای شامل خم مسطح را ایفا می‌کند. این صفحه‌ای است که همزمان شامل τ و U است. این صفحه، بوسان نامیده می‌شود و می‌توان آنرا به‌عنوان صفحه‌ای با "بیشترین مماس موضعی" از خم در نقطه S در نظر گرفت. یکه قائم به صفحه مماس در نقطه S توسط رابطه زیر معرفی می‌شود.

$$\beta = \tau \times v.$$

بردارهای τ, v و β سه وجهی (کنج) متحرک را تشکیل می‌دهند. در این چارچوب در هر نقطه از خم می‌توان سه صفحه دو به دو متعامد نسبت داد. همانطوری که قبلاً ذکر شد، صفحات τ و v صفحات بوسان نام دارند. صفحه v و β صفحه قائم و صفحه β و τ صفحه اصلاح‌کننده نام دارد.

معادله صفحه بوسان در نقطه s_0 برابر است با

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(s_0)) \cdot \beta(s_0) = 0$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردار شعاعی یک نقطه از صفحه بوسان است. برای پارامترسازی کلی خم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، معادله صفحه بوسان در مختصات دکارتی برابر است با

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

تمرین ۵-۱۰. مطلوب است v و β برای مارپیچ ۵-۹. سپس معادله صفحه اصلاح-کننده را در $t = t_0$ بیابید.

با بکارگیری قاعده زنجیره‌ای می‌توان k را بر حسب عبارت زیر برای پارامترسازی دلخواه خم نمایش داد.

$$k^2 = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))^2}{(\mathbf{r}'^2(t))^3}. \quad (7-5)$$

اکنون خمیدگی را با k_1 نمایش می‌دهیم، زیرا کمیت دیگری هست که مشخص کننده چگونگی اختلاف خم از خط راست است. می‌توانیم شعاع خمیدگی را به عنوان عدد $R = 1/k_1$ بر حسب k_1 تعریف کرد.

تمرین ۵-۱۱. عبارت (۷-۵) را به دست آورید.

بردار قائم اصلی و قائم دوم به فضای خم وقتی که $\tau'(s) = 0$ بطور یکتا تعریف نمی‌شود. هر نقطه که دارای این شرط است نقطه بازگشت خم نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم که خم‌های ما در شرط $\tau'(s) \neq 0$ برای هر s صدق می‌کند.

خم‌ها در صفحه

معادلات در نظر گرفته شده در این بخش در یک صفحه قرار دارند.

در چنین حالتی به صلاح است که در دستگاهی ملموس از قبیل مختصات قائم و یا مختصات قطبی مسطح کار کرد. در دستگاه قائم $(\hat{x}, \hat{y})$ که

$$\mathbf{r} = \hat{x}x(t) + \hat{y}y(t),$$

به آسانی می‌توان دید که طول قسمتی از خم متناظر با بازه $|a, b|$ از پارامتر t برابر است با

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

خمیدگی توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$k_1 = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left\{ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \right\}^{3/2}}.$$

این فرمول‌ها با فرمول‌های معروف زیر از حسابان مقدماتی برای خم ناپارامتری $y = f(x)$ متناظرند:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad k_1 = \frac{f''(x)}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}}$$

در مختصات قطبی که خم به صورت $r = r(\theta)$ بیان می‌شود، داریم:

$$s = \int_a^b \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta, \quad k_1 = \frac{[r(\theta)]^2 + 2[r'(\theta)]^2 - r(\theta)r''(\theta)}{\{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2\}^{3/2}}.$$

توجه داشته باشید که برای هر خم قطبی خمیدگی k_1 دارای علامت جبری است.

تمرین ۵-۱۲. (الف) مطلوب است شعاع خمیدگی خم $y = x^3$ در نقطه $(1, 1)$.

قسمت (الف) را برای خم $y = x^4$ در نقطه $(0, 0)$ تکرار کنید. (ب) نقطه‌ای با خمیدگی ماکزیمال از سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را تعیین کنید.

تمرین ۵-۱۳. فرض کنید همه مماس‌ها به یک خم هموار از یک نقطه می‌گذرد. نشان دهید که خم قسمتی از یک خط راست است.

تمرین ۵-۱۴. فرض کنید همه مماس‌ها به یک خم هموار موازی یک صفحه باشند. نشان دهید که خم در یک صفحه قرار دارد.

تمرین ۵-۱۵. فرض کنید بردارهای قائم اصلی یک خم هموار موازی یک صفحه باشند. آیا خم در یک صفحه واقع است؟ این مطلب را برای وقتی که قائم‌های دوم موازی یک صفحه باشند را بررسی کنید.

۵-۲ تاب یک خم

هنگامی که خمی در یک صفحه واقع باشد، بردار قائم دوم β بر این صفحه عمود است. علاوه بر این، β بر صفحه بوسان خم در یک نقطه عمود است، پس نرخ دوران این صفحه، که توسط نرخ چرخش قائم دوم اندازه‌گیری می‌شود، مشخص کننده "غیر مسطح" بودن خم است. به شیوه مشابه با خمیدگی خم، این مشخصه از "غیر مسطح بودن"، تاب یا خمیدگی دوم نامیده می‌شود و به صورت حد نسبت $\Delta\theta/\Delta s$ تعریف می‌شود که در اینجا $\Delta\theta$ زاویه چرخش بردار قائم β است. چون β یکجه است،

می‌توانیم دلایل مشابهی همانند آنچه در به‌دست آوردن عبارت خمیدگی برای خم (۵-۴) بکار رفت را استفاده کنیم. اکنون تاب را با k_2 نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$k_2 = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\nabla g}{\nabla s}.$$

این کمیت دارای یک علامت جبری است که در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.^۶

قضیه ۵-۱. فرض کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ تابعی سه با مشتق‌پذیر از s باشد. در هر نقطه که $k_1 \neq 0$ ، تاب خم برابر است با

$$k_2 = - \frac{(\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)) \cdot \mathbf{r}'''(s)}{k_1^2}.$$

اثبات. در نقطه s که $k_1 \neq 0$ قائم دوم به‌صورت یکتا به عنوان ν تعریف می‌شود. چون β بردار یکه است، می‌توانیم قدر مطلق چرخش بردار قائم دوم را هنگامی که در امتداد جزء متناظر ∇s حرکت می‌کند همانند آن چیزی که در مورد خمیدگی خم معرفی شد، تعریف می‌کنیم. اکنون $|\beta(s + \nabla s) - \beta(s)| = 2|\sin \Delta g/2|$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |k_2| &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\nabla g}{\nabla s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\nabla g}{2 \sin(\nabla g/2)} \right| \left| \frac{2 \sin(\nabla g/2)}{\nabla s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\beta(s + \nabla s) - \beta(s)}{\nabla s} \right| \\ &= |\beta'(s)|. \end{aligned}$$

حال موازی بودن ν و $\beta'(s)$ را تشریح می‌کنیم. مشتق هر بردار یکه $\mathbf{x}(s)$ بر خود بردار عمود است:

$$0 = \frac{d}{ds} (\mathbf{x}(s) \cdot \mathbf{x}(s)) = 2\mathbf{x}(s) \cdot \mathbf{x}'(s).$$

^۶ اصولاً، یک خم دارای تاب مثبت هنگام افزایش s مانند پیچ راستگرد عمل می‌کند.

بنابراین $\beta'(s)$ بر $\beta(s)$ عمود است و لذا موازی صفحه بوسان است. پس

$$\beta'(s) = (\tau(s) \times \nu(s))' = \tau'(s) \times \nu(s) + \tau(s) \times \nu'(s) = \tau(s) \times \nu'(s) \quad (۸-۵)$$

که در اینجا از این حقیقت که $\tau'(s)$ با $\nu(s)$ موازی است استفاده شده است. با توجه به (۸-۵) خواهیم داشت که $\beta'(s)$ بر $\tau(s)$ عمود است، بنابراین خاصیت

مطلوب ثابت می‌شود. چون $|\nu(s)| = 1$ داریم $|\beta'(s)| = |\nu(s)|$ و لذا

$$|k_2| = |\beta'(s) \cdot \nu(s)|.$$

با بکارگیری این حقیقت که $\nu = \mathbf{r}''/k_1$ ، داریم:

$$\nu' = \mathbf{r}'''/k_1 - \mathbf{r}''k_1'/k_1^2, \quad \beta = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')/k_1.$$

به دست می‌آوریم:

$$|k_2| = |(\tau \times \nu') \cdot \nu| = \frac{|(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{k_1^2}.$$

در اینجا از خاصیت ضرب مختلط استفاده کرده‌ایم. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$k_2 = -\frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{k_1^2}.$$

قاعده علامت به صورت زیر معرفی می‌شود: اگر بردار قائم دوم β از β به ν بچرخد، آنگاه علامت مثبت است، در غیر این صورت علامت منفی است. علامت k_2 به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که

$$\beta' = k_2 \nu. \quad (۹-۵)$$

این اثبات را کامل می‌کند.

متذکر می‌شویم که اگر پارامترسازی دیگری برای خم در نظر بگیریم، آنگاه محاسبه‌ی ساده‌ای از قاعده زنجیره‌ای ایجاب می‌کند:

$$k_2 = -\frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))^2}. \quad (۱۰-۵)$$

گفته شد که مقدار تاب دلالت کننده میزان تمایز خم با خم مسطح است. اکنون این مطلب را بیشتر شرح می‌دهیم. فرض کنیم $k_2 = 0$ برای هر s . نشان می‌دهیم که

خم در یک صفحه واقع است. در حقیقت $0 = |k_2| = |\beta'(s) \cdot \nu(s)|$. لذا $|\beta'(s)| = 0$ (چون ν بردار یکه است) و بنابراین $\beta^0 = \beta(s)$ ثابت. بردار مماس τ بر β^0 عمود است، لذا $\beta^0 = 0$. $(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)) \cdot \beta^0 = 0$ و بنابراین با انتگرال گیری به دست می آوریم $\beta^0 = \mathbf{r}'(s) \cdot \beta^0 = 0$. این بدین معنی است که خم در یک صفحه واقع است.

به کمک (۵-۹)، $k_2 = |d\beta/ds|$. بنابراین $k_2 = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\Delta\beta/\Delta s|$ و اما در حد کمیت های کوچک مرتبه دوم Δs ، تغییر $|\Delta e|$ از بردار یکه e برابر زاویه دوران e است هنگامی که در فاصله Δs حرکت می کند. بنابراین $|\Delta\beta|$ به طور تقریبی برابر زاویه دوران قائم دوم است هنگامی که نقطه در امتداد Δs جابجا می شود. میزان دوران قاوم دوم را اندازه گیری می کند هنگامی که نقطه در امتداد خم حرکت می کند.

تمرین ۵-۱۶. نشان دهید که یک خم هموار مسطح است اگر و تنها اگر $k_2 = 0$.

تمرین ۵-۱۷. نشان دهید که در مختصات دکارتی

$$k_1 = \frac{\left[(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 \right]^{1/2}}{\left[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right]^{3/2}}$$

9

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}$$

که در آن پرایم نشان دهنده d/dt است.

تمرین ۵-۱۸. اگر جهت تغییر پارامتر برعکس شود $(t \mapsto (-t))$ برای k_1 و k_2 (و

برای کنج متحرک خم) چه اتفاقی می افتد؟

تمرین ۵-۱۹. k_2 را برای مارپیچ تمرین ۵-۹ محاسبه کنید.

۵-۳ معادلات سره-فرنه

سه تایی τ, ν, β می‌تواند به عنوان محورهای مختصات در نظر گرفته شود، این مطلب در مطالعه موضعی خم‌ها استفاده می‌گردد. فرنه دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی تحت سه تایی در راستای خم را ابداع نمود. قبلاً دو تا از این سه معادله را به دست آورده ایم: (۵-۶) و (۵-۹). آخری را می‌توان به صورت $\tau' = k_1 \nu$ نوشت. اکنون فرمول سوم از دستگاه فرنه-سره را به دست می‌آوریم. داریم $\nu = \beta \times \tau$. از اینرو

$$\begin{aligned}\nu' &= (\beta \times \tau)' \\ &= \beta' \times \tau + \beta \times \tau' \\ &= k_2 \nu \times \tau + \beta \times (k_1 \nu) \\ &= k_1 \tau - k_2 \beta.\end{aligned}$$

اکنون معادلات فرنه - سره را جمع بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\tau' &= k_1 \nu, \\ \nu' &= -k_1 \tau - k_2 \beta, \\ \beta' &= k_2 \nu.\end{aligned}\tag{۵-۱۱}$$

یادآوری می‌کنیم که این معادلات هنگامی نوشته می‌شوند که خم دارای پارامترسازی طبیعی بوسیله پارامتر طول باشد. توجه داشته باشیم که اگر خم‌های $k_1(s)$ و $k_2(s)$ به عنوان تابعی از s داده شده باشد، دستگاه (۵-۱۱) یک دستگاه خطی از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌شود. در شکل مولفه ای، یک دستگاه با ۹ معادله و ۹ مجهول می‌شود. نقطه‌ای ثابت روی خم در فضا و سه تایی متعامد τ, ν, β در این نقطه را در نظر بگیرید. به کمک این دستگاه می‌توان $\tau(s)$ ، $\nu(s)$ و $\beta(s)$ را بطور یکتا تعریف کرد. همچنین به کمک معادله $\mathbf{r}'(s) = \tau(s)$ می‌توان خم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ را بطور یکتا تعریف کرد. بنابراین $k_1(s)$ و $k_2(s)$ خم را در حد حرکت در فضا تعریف می‌کنند. این دلیلی است که چرا معادلات دوتایی $k_1(s), k_2(s)$ مجموعه طبیعی معادلات خم نام دارند.

اکنون چگونگی استفاده از معادلات فرنه-سره برای رده‌بندی موضعی خم را شرح می‌دهیم. بسط تیلور شعاع برداری خم در نقطه s را بکار می‌بریم:

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \Delta s \mathbf{r}'(s) + \frac{(\Delta s)^2}{2} \mathbf{r}''(s) + \frac{(\Delta s)^3}{6} \mathbf{r}'''(s) + O(|\Delta s|^3).$$

به کمک تعریف $\nu = r''/k_1$ و معادله دوم از (۵-۱) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{r}''' = (k_1 \nu)' = k_1' \nu + k_1 \nu' = k_1' \nu + k_1 (-k_1 \tau - k_2 \beta).$$

با جایگذاری این‌ها داریم:

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \Delta s \tau + \frac{(\Delta s)^2}{2} k_1 \nu + \frac{(\Delta s)^3}{6} (k_1' \nu - k_1^2 \tau - k_1 k_2 \beta) + O(|\Delta s|^3).$$

این نشان می‌دهد که در حد مرتبه $(\Delta s)^2$ ، خم روی صفحه بوسان در نقطه s قرار می‌گیرد. در نقطه s سه‌تایی τ, ν, β مختصات دکارتی است. اکنون این چارچوب را ثابت در نظر گرفته و مبداء را در $\mathbf{r}(s) = 0$ قرار می‌دهیم. با تعریف x, y, z به‌عنوان مولفه‌های $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ در این دستگاه، نمایش تقریبی خم را به‌دست می‌آوریم:

$$x = \Delta s - \frac{k_1^2 (\Delta s)^3}{6} + O(|\Delta s|^3),$$

$$y = \frac{k_1 (\Delta s)^2}{2} + \frac{k_1' (\Delta s)^3}{6} + O(|\Delta s|^3),$$

$$z = -\frac{k_1 k_2 (\Delta s)^3}{6} + O(|\Delta s|^3).$$

به‌عنوان کاربرد دیگری از معادلات فرنه - سره می‌توانیم سرعت و شتاب یک نقطه متحرک در فضا را بیابیم. فرض کنیم s پارامتر طول مسیر یک نقطه باشد و فرض کنیم t دلالت‌کننده زمان باشد. از سه‌تایی (τ, ν, β) از مسیر $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ استفاده خواهیم کرد. موقعیت نقطه توسط معادله زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t)).$$

سرعت نقطه برابر است با

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(s(t)) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \tau.$$

با نمایش $v = ds/dt$ به عنوان ذره در امتداد مسیرش، می‌توانیم بنویسیم $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$.

اکنون شتاب نقطه را در همان دستگاه می‌یابیم، شتاب برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(s(t)) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(s(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau} \right) \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2} \boldsymbol{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = s''(t) \boldsymbol{\tau} + v^2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.\end{aligned}$$

با بکارگیری معادلات فرنه-سره داریم:

$$\mathbf{a} = s''(t) \boldsymbol{\tau} + k_1 v^3$$

که در آن k_1 خمیدگی اصلی مسیری در مکانیک عموماً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{a} = s''(t) \boldsymbol{\tau} + (v^2/\rho) \boldsymbol{\nu}$$

که در آن $\rho = 1/k_1$ شعاع خمیدگی خم است. بنابراین بردار شتاب در صفحه بوسان نقطه در امتداد مسیر واقع است. بر این اساس چندین روش برای یافتن شتاب وجود دارد.

تمرین ۵-۲۰. عبارت $d^3 \mathbf{r}/ds^3$ را بر حسب کنج متحرک بیان کنید.

تمرین ۵-۲۱. با تعریف بردار $\delta = k_1 \beta - k_2 \tau$ ، نشان دهید که معادلات فرنه-سره را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\tau' = \delta \times \tau, \quad \nu' = \delta \times \nu, \quad \beta' = \delta \times \beta.$$

بردار δ به عنوان بردار د/ریوکس شناخته می‌شود.

تمرین ۵-۲۲. ذره‌ای در فضا به گونه‌ای حرکت می‌کند که بردار مکانش به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}_1(1 - \cos t) + \mathbf{i}_2 t + \mathbf{i}_3 \sin t.$$

مولفه‌های مماس و قائم شتاب را بیابید.

۵-۴ عناصر نظریه سطوح

خواننده با بسیاری از سطوح استاندارد آشناست: کره، مخروط، استوانه، و این‌ها قابل روئیت بوده و در دستگاه دکارتی توسط معادلات ساده‌ای توصیف می‌شوند. برای مثال

معادله یک کره انعکاس دهنده تعریف یک کره است: تمام نقاط (x, y, z) از کره دارای فاصله‌ای برابر R از مرکز (x_0, y_0, z_0) هستند:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (۱۲-۵)$$

یک استوانه دایره‌ای با مولد موازی محور z توسط معادله زیر داده می‌شود:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

به گونه‌ای که متغیر z ظاهر نمی‌شود. می‌توانیم انواع دیگری از سطوح استوانه‌ای با در نظر گرفتن یک مجموعه فضایی نقاط صادق در معادله زیر را به دست آوریم:

$$f(x, y) = 0.$$

این معادله بستگی به z ندارد، با ترسیم مولدهای موازی محور z و گذرنده از نقطه $(x, y, 0)$ می‌توان به سطح استوانه‌ای کلی تری رسید. یک سهمی مثالی از یک سطح پیچیده تر است:

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad (۱۳-۵)$$

که a, b, c, d, e, f ضرایب عددی‌اند. بسته به مقادیر a, b, c ، سهمی می‌تواند بیضی‌گون یا سهمی‌گون باشد. این عبارت هندسه تحلیلی برای رده بندی شکل سطح در یک نقطه استفاده می‌شود. مساحت و حجم‌های وابسته به چنین سطح‌های استاندارد (یا قسمتی از آنها) را می‌توان به وسیله انتگرال‌گیری و یا بعضی وقت‌ها با استفاده از فرمول‌های مقدماتی محاسبه نمود.

از نقطه نظر طبیعی یک سطح چیزی است که به کل یا قسمتی از جسم فضایی محدود باشد. به هر حال تعریف دقیق عبارت "سطح" آسان نیست. یک کوشش می‌تواند بر اساس توصیف موضعی با در نظر گرفتن قسمت مقدماتی یک سطح به عنوان تصویر پیوسته در فضا از یک دیسک کوچک در صفحه استوار باشد. متأسفانه چنین تعریفی ساختار سطوح مورد نظر را بسیار پیچیده می‌کند. برای استفاده از ابزار معمولی حسابان بایستی ایده همواری سطح در نظر گرفته شود هرچند که تعریف دقیق از این عبارت نباشد (در علوم طبیعی مرسوم است که از نمادهایی استفاده شود و یا اشیایی مطالعه شود که به طور صریح معرفی نشده‌اند و درباره آنها مقدار کمی می‌دانیم)

به عنوان اولین قدم می توانیم یک سطح را به عنوان چیزی در فضا شبیه کرد. اشیاء ذکر شده اخیر در حالتی که ضخامت صفر داشته باشند را در نظر گرفت. برای استفاده از حسابان، بایستی مختصات نقاط سطح را توسط توابع نمایش داد. توجه داشته باشیم که سهمی گون (۵-۱۳) را می توان با بکاربردن یک تابع از دو متغیر x و y توصیف کرد، در صورتی که این مورد برای کره (۵-۱۲) غیر ممکن است. اما می توان کره را به دو نیم کره تقسیم نمود به طوری که هر یک از آنها را بتوان با یک تابع جداگانه از x و y توصیف کرد. این کار را می توان با سطوح کلی تر انجام داد، هر چند ممکن است نتوان z را به عنوان متغیر وابسته به تمام قسمت های سطح داشته باشیم. در حالت کلی، موقعیت هر نقطه از سطح توسط مقادیری از دوتایی (u, v) از پارامترهای مستقل که ممکن است دکارتی باشد، تعیین می شود. مرسوم است که از بردار موقعیت

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

جهت مشخص کردن این نقطه نسبت به مبدا مختصات استفاده می کنیم. برای یک دستگاه دکارتی این معادله برداری با سه معادله زیر معادل است:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

اما استفاده از سایر دستگاه های مختصات معمول است. دوتایی (u, v) را می توان به عنوان مختصات نقاط در صفحه uv در نظر گرفت و یک قسمت از سطح را می توان به عنوان تصویر از دامنه در این صفحه در نظر گرفت، در این حالت می توان گفت که سطح دو بعدی است. همانند بخش های قبل، تابع را بقدر کافی هموار فرض می کنیم. خواهیم دید که استفاده از نمادهای تانسور ساده کننده بسیاری از فرمول ها و واضح کننده آنهاست. بنابراین بجای نماد (u, v) از (u^1, u^2) برای نمایش مختصات اصلی صفحه استفاده می کنیم.^۷

^۷ این عبارت به منظور اشاره مختصات به سطح، روی سطح، و نه بر آن چیزی که سطح را احاطه کرده است در نظر گرفته می شوند.

یکی از اهداف این فصل جمع‌آوری نتایج مهم و توضیح چگونگی استفاده از آنها در کاربرد بسیاری از علوم است. بویژه، اکنون فرمول‌هایی که در مکانیک پوسته کشسان استفاده شده و نقش بزرگی در نظریه سطوح دارد را ارایه می‌دهیم. در ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه فاصله‌ها و زاویه‌ها روی یک سطح کلی را محاسبه کنیم. این کار با معرفی اولین فرم اساسی از سطح انجام می‌شود. در این روش یک فرم متری مشابه با فضای سه بعدی معرفی می‌کنیم. سایر خواص سطح با داشتن مفهوم سطح قائم توصیف می‌شود. ساختار یک سطح در یک نقطه باعث بررسی تغییرات در آن نقطه از جهات مختلف است. برای مطالعه این مورد "دومین فرم اساسی" را معرفی می‌کنیم. این دو فرم اساسی توصیف موضعی کاملی از سطح مهیا می‌کند. نمادهای دیگر را نیز مطالعه می‌کنیم، با تطبیق آنالیز تانسوری دو بعدی و بکارگیری ابزار منتج به مطالعه سطوح به بررسی‌ها پایان می‌دهیم.

اولین فرم اساسی

گفته شد که یک خط مختصات در فضا مجموعه‌ای از نقاط که با ثابت نگه داشتن دو مختصات q^1, q^2, q^3 و تغییر متغیر باقیمانده تولید می‌شود. یک سطح *تراز مختصاتی* با ثابت نگه داشتن یکی از مختصات q^1, q^2, q^3 و تغییر دوتای باقیمانده بوجود می‌آید. با یک ایده مشابه می‌توان سطح دلخواه در فضا را تعریف کرد. موقعیت یک نقطه روی صفحه توسط بردار شعاعی شروع شده از مبدا و با انتهای آن که در امتداد سطح تغییر می‌کند، مشخص می‌شود. یک نقطه روی سطح می‌تواند توسط دو پارامتر که آنها را با u^1, u^2 یا برخی اوقات برای راحتی با u, v نمایش می‌دهیم مشخص شود:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2). \quad (۱۴-۵)$$

بنابراین یک سطح به عنوان تصویر فضایی برخی دامنه در مختصات صفحه (u^1, u^2) در نظر گرفته می‌شود. برای راحتی خودمان را محدود به سطوحی می‌کنیم که همه جا هموار بوده مگر برای برخی خم‌های ساده و یا نقاطی که در آن واقع است. بنابراین حالتی را در نظر می‌گیریم که (۱۴-۵) بقدر دلخواه هموار باشد (این به طور نرمال برای (۱۴-۵) لازم است که همه مشتقات جزئی درجه دومش (برخی اوقات درجه سوم)

پیوسته باشد مگر برای برخی خطوط یا قطب‌ها، همانند حالتی در رأس مخروط). به طور مشابه با فضای سه بعدی، روی یک سطح خطوط مختصاتی وجود دارد که وقتی یکی از مختصات (۵-۱۴) ثابت فرض شود، به دست می‌آید. به شیوه‌ای مشابه می‌توان بردارهای مماس را معرفی کرد.

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i} \quad (i=1,2).$$

فرض می‌کنیم که به غیر از برخی خطوط تکین یا قطب‌ها در صفحه (u^1, u^2) ، این بردارها در مختصات دارای مشتق پیوسته هستند. همچنین فرض می‌کنیم که به غیر از همان نقاط، این دو بردار هم خط نباشند، بنابراین

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}.$$

به کمک این می‌توانیم بردار قائم یکه به سطح را معرفی کنیم:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|},$$

که همزمان بر صفحه بوسان بر نقطه (u^1, u^2) عمود است. اکنون این مطلب را تشریح می‌کنیم. فرض می‌کنیم صفحه گذرنده از نقطه (u^1, u^2) و بردار قائم $\mathbf{n}$ باشد. صفحه بوسان (شکل ۵-۲) صفحه‌ای که

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{h}{\Delta s} = 0$$

جایی که

$$\Delta s = \left| \mathbf{r}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2) \right|$$

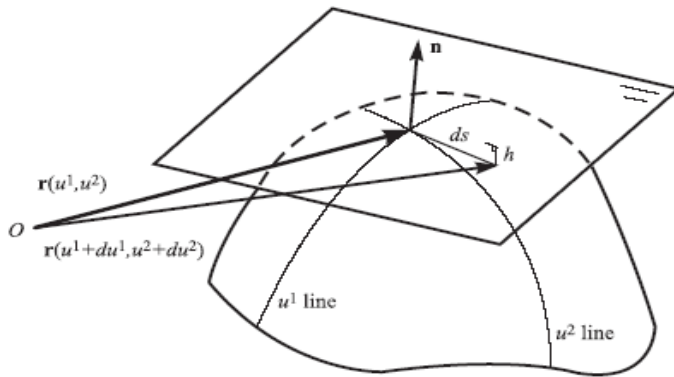
و h فاصله از نقطه با مختصات $(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2)$ در صفحه باشد. توجه داشته باشید که این مورد برای هر خم واقع در صفحه گذرنده از نقطه برقرار است. فرض کنیم صفحه بر بردار $\mathbf{n}$ عمود باشد. در این صورت

$$h = \left| \left(\mathbf{r}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2) \right) \cdot \mathbf{n} \right|.$$

با بکارگیری تعریف دیفرانسیل داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{h}{\Delta s} &= \frac{\left| \left(\mathbf{r}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2) \right) \cdot \mathbf{n} \right|}{\left| \mathbf{r}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2) \right|} \\
 &= \frac{\left| \left(\mathbf{r}_i \Delta u^i + o(|\Delta u^1| + |\Delta u^2|) \right) \cdot \mathbf{n} \right|}{\left| \mathbf{r}_i \Delta u^i + o(|\Delta u^1| + |\Delta u^2|) \right|} \\
 &= \frac{o(|\Delta u^1| + |\Delta u^2|)}{\left| \mathbf{r}_i \Delta u^i + o(|\Delta u^1| + |\Delta u^2|) \right|}.
 \end{aligned}$$

این بدین معنی است که صفحه انتخاب شده صفحه بوسان است.



شکل ۵-۲ صفحه بوسان سطح

واضح است که بیشتر آنچه که در مورد $\mathbf{r}_i$ در فصل ۴ بحث شد می‌تواند به طور ساده برای حالت کنونی که بردارهای $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}^3 = \mathbf{n}$ را به عنوان پایه $\mathbb{R}^3$ بکار می‌بریم دوباره فرمول‌بندی شود. ابتدا، پایه متقابل در فضا که سومین بردارش دوباره $\mathbf{n}$ است و دو بردار دیگر توسط معادلات زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \delta_j^i \quad (i=1,2), \quad \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{n} = 0.$$

بردارهای $\mathbf{r}_i$ ($i=1,2$) چارچوب متقابل به $\mathbf{r}^i$ ($i=1,2$) در صفحه بوسان به سطح (u^1, u^2) را می‌سازد.

اکنون دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i du^i. \quad (۱۵-۵)$$

در این بخش، هنگام جمع بندی، اندیس ها مقادیر ۱ و ۲ را به خود می‌گیرند.

دیفرانسیل قسمت خطی اصلی du^i از تفاضل زیر است:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1 + du^1, u^2 + du^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2).$$

قسمت اصلی فاصله بین نقاط $\mathbf{r}(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$ و $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ به صورت زیر است:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i du^i \cdot \mathbf{r}_j du^j = g_{ij} du^i du^j$$

که $g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$ تانسور متری از سطح است.

شکل $(ds)^2 = g_{ij} du^i du^j$ ، اولین شکل اساسی از سطح نامیده می‌شود. با ضرایب متریک گاوس که به صورت زیر نمایش داده می‌شوند شروع می‌کنیم:

$$E = g_{11}, \quad F = g_{12} = g_{21}, \quad G = g_{22},$$

بنابراین اولین شکل اساسی برابر است با:

$$(ds)^2 = E (du^1)^2 + 2F du^1 du^2 + G (du^2)^2.$$

تمرین ۵-۱۳. اولین شکل اساسی کره به شعاع a را بیابید.

علاوه بر طول خم مقدماتی روی سطح، فرمول (۱۵-۵) در یافتن زاویه بین خم‌های

مقدماتی $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i du^i$ و $d\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i d\tilde{u}^i$ کمک می‌کند. در حقیقت، به کمک تعریف ضرب

نقطه‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{d\mathbf{r} \cdot d\tilde{\mathbf{r}}}{|d\mathbf{r}| |d\tilde{\mathbf{r}}|} \\ &= \frac{E du^1 d\tilde{u}^1 + F (du^1 d\tilde{u}^2 + du^2 d\tilde{u}^1) + G du^2 d\tilde{u}^2}{\sqrt{E (du^1)^2 + 2F du^1 du^2 + G (du^2)^2} \sqrt{E (d\tilde{u}^1)^2 + 2F d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 + G (d\tilde{u}^2)^2}}. \end{aligned} \quad (۱۶-۵)$$

تمرین ۵-۲۴. (الف) عبارتی برای زاویه بین خطوط مختصاتی سطح بیابید. (ب) زاویه خم $\theta = \phi$ گذرنده از نصف النهار کره را محاسبه کنید.

مساحت متوازی الاضلاع بر پایه بردارهای مقدماتی $\mathbf{r}_1 du^1$ و $\mathbf{r}_2 du^2$ به طوریکه بر خطوط مختصاتی مماس هستند برابر است با:

$$dS = |\mathbf{r}_1 du^1 \times \mathbf{r}_2 du^2|.$$

این فرمول در حد جملات مرتبه بالا مساحت متناظر با مرز شکل منحنی الخط توسط خطوط مختصاتی را تقریب می‌کند:

$$u^1 = \text{const}, \quad u^2 = \text{const}, \quad u^1 + du^1 = \text{const}, \quad u^2 + du^2 = \text{const}.$$

اکنون dS را بر حسب اولین شکل اساسی می‌یابیم. به محاسبه $|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|$ نیاز داریم. اکنون نشان می‌دهیم که

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = \sqrt{EG - F^2}. \quad (۱۷-۵)$$

در حقیقت، با توجه به تعریف ضرب نقطه‌ای و خارجی داریم:

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 + (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = |\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_2|^2 \sin^2 \varphi + |\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_2|^2 \cos^2 \varphi = |\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_2|^2.$$

بنابراین

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 = |\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_2|^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = EG - F^2$$

و (۱۷-۵) به دست می‌آید.

با جمع‌بندی مساحت مقدماتی متناظر با دامنه A در صفحه (u^1, u^2) و گرفتن حد به مقدار زیر خواهیم رسید:

$$S = \int_A \sqrt{EG - F^2} du^1 du^2.$$

می‌توان نشان داد که برای هر سطح هموار حد S به پارامترسازی بستگی ندارد و لذا این مقدار برابر مساحت قسمت A از سطح است.

تمرین ۵-۲۵. یک مخروط توسط بردار موقعیت زیر توصیف می‌شود:

$$\mathbf{r}(u^1, u^2) = \mathbf{i}_1 u^1 \cos u^2 + \mathbf{i}_2 u^1 \sin u^2 + \mathbf{i}_3 u^1,$$

جایی که $0 \leq u^1 \leq a$ و $0 \leq u^2 < 2\pi$. مساحت مخروط را بیابید.

تمرین ۵-۲۶. فرمول بالا برای شکل حاصل از دوران به دست آمده توسط بردار موقعیت مختصات دکارتی

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}\rho \cos \phi + \hat{\mathbf{y}}\rho \sin \phi + \hat{\mathbf{z}}f(\rho)$$

جایی که $f(\rho)$ یک تابع مناسب برشی است، را بیابید.

تمرین ۵-۲۷. فرض کنید دو صفحه به گونه‌ای پارامتری شده باشند که ضرایب اولین شکل‌های اساسی آنها در هر نقطه با مختصات یکسان متناسب باشد (بنابراین تابعی از یک سطح به سطح دیگر داریم). نشان دهید که این تابع حافظ زاویه بین جهت‌های متناظر روی سطح است.

ژئودزی‌ها

مساله اساسی در نظریه سطوح یافتن خمی است با کمترین طول بین دو نقطه از سطح S . برای برخورد با چنین مساله‌ای ابتدا با اولین شکل اساسی شروع می‌کنیم:

$$(ds)^2 = g_{ij} du^i du^j.$$

می‌دانیم که معادلات پارامتری

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t),$$

در خم C روی S صدق می‌کنند. با نوشتن $(ds)^2$ به عنوان

$$(ds)^2 = g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} (dt)^2,$$

عبارت طول کمان در امتداد C از $t = a$ به $t = b$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$s = \int_a^b \left(g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{1/2} dt. \quad (5-18)$$

به دنبال خمی با کمترین طول بین جفت نقاط پایانی داده شده هستیم: یعنی به دنبال توابع $u^1(t)$ و $u^2(t)$ هستیم که S را مینیمم می‌کنند.

چون

$$g_{ij} = g_{ij}(u^1(t), u^2(t)),$$

می بینیم که ۵-۱۸ دارای شکل زیر است:

$$s(\mathbf{u}) = \int_a^b f(t, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) dt \quad (۱۹-۵)$$

جایی که $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u^1(t), u^2(t))$ و نقطه بالا دلالت بر دیفرانسیل نسبت به t دارد. به دلیل اینکه $s(\mathbf{u})$ تناظری است که به هر عدد حقیقی s تابع $\mathbf{u}$ از برخی کلاس توابع را نسبت می‌دهد، آنرا یک تابعگون در $\mathbf{u}$ می‌نامیم. در اینجا کلاس توابع شامل همه مسیرهای مجاز $\mathbf{u}$ بین نقاط پایانی روی سطح است.

بهینه سازی تابعگون ها در حساب تغییرات بررسی می‌شود و خوشبختانه ایده اصلی این موضوع توسعه یافته خود را در ابتدای بحث خلاصه اهداف، نشان می‌دهد. (پوشش اضافی در فصل ۶، هنگام بررسی اصول تغییرات کشسانی ظاهر می‌شود).

روش یافتن مینیمم کننده $\mathbf{u}(t)$ برای تابعگون (۵-۱۹) ارتباط به جایگذاری $\mathbf{u}(t)$ با یک تابع جدید $\mathbf{u}(t) + \varepsilon \varphi(t)$ دارد که در اینجا $\varphi(t)$ یک تغییر مجاز از تابع $\mathbf{u}(t)$ و ε یک پارامتر کوچک حقیقی است

در این بحث، $\varphi(t)$ را به عنوان یک تغییر مجاز در نظر می‌گیریم اگر $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ؛ یعنی هر خم به شکل $\mathbf{u}(t) + \varepsilon \varphi(t)$ نقاط پایانی مشابهی مانند خم $\mathbf{u}(t)$ را بهم وصل می‌کند. چنین جایگذاری به دست می‌دهد:

$$s(\mathbf{u} + \varepsilon \varphi) = \int_a^b f(t, \mathbf{u} + \varepsilon \varphi, \dot{\mathbf{u}} + \varepsilon \dot{\varphi}) dt \quad (۲۰-۵)$$

این تابع برای ثابت‌های $\mathbf{u}$ و φ تابعی از متغیر حقیقی ε بوده و برای هر φ مقدار مینیمم خود را در $\varepsilon = 0$ می‌گیرد. اگر φ را به صورت فضایی $\varphi_1(t) = (\varphi(t), 0)$ بگیریم، آنگاه (۲۰-۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$s(\mathbf{u} + \varepsilon \varphi_1) = \int_a^b f(t, u^1(t) + \varepsilon \varphi(t), u^2(t), \dot{u}^1(t) + \varepsilon \dot{\varphi}(t), \dot{u}^2(t)) dt$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$\left. \frac{ds(\mathbf{u} + \varepsilon \varphi_1)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (۲۱-۵)$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای در قسمت سمت چپ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, u^1 + \varepsilon \varphi, u^2, \dot{u}^1 + \varepsilon \dot{\varphi}, \dot{u}^2) dt \Big|_{\varepsilon=0} = \\ = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial u^1} f(t, u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) \varphi + \frac{\partial}{\partial \dot{u}^1} f(t, u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) \dot{\varphi} \right] dt \end{aligned}$$

این / اولین تغییرات تابعگون $S(\mathbf{u})$ نسبت به تغییرات شکل $\mathbf{u} + \varepsilon \varphi_1$ است؛ با مساوی صفر قرار دادن همانند (۵-۲۱) و بکارگیری انتگرال جزء به جزء در شکل درجه دوم از انتگرالده خواهیم داشت:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial u^1} f(t, u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}^1} f(t, u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) \right] \varphi dt = 0.$$

طبق لم/سای حساب تغییرات (به [لردف و کلود (۲۰۰۳)] رجوع شود؛ یک ویرایش از این لم در قضیه ۸-۶ معرفی شده است)، این معادله برای تمامی تغییرات مجاز φ برقرار است تنها اگر کمیت داخل براکت صفر شود:

$$\frac{\partial}{\partial u^1} f(t, u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}^1} f(t, u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0.$$

با تکرار این فرایند برای تغییرات شکل فضایی $(0, \varphi(t)) = \varphi_2(t)$ ، نتیجه مشابهی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial u^2} f(t, u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}^2} f(t, u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0.$$

این دستگاه از دو معادله، که می‌توان در نمادگذاری فشرده تری به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} f - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}^i} f = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (5-22)$$

به عنوان دستگاه معادلات /ویلر از تابعگون (۵-۱۹) شناخته می‌شود. درستی این دستگاه شرط لازمی که $\mathbf{u} = (u^1(t), u^2(t))$ مینیمال کننده S باشد، در حساب تغییرات یک جواب از معادله ویلر (یا در این حالت یک دستگاه از چنین معادلات) /اکسترمال نامیده می‌شوند. این مشابه نقاط پایا از تابع معمولی است: تست دیگر برای تشخیص اینکه اکسترمال منجر به مینیمم تابعگون می‌شود، لازم است (یا منجر به ماکزیمم شدن). جواب‌های دستگاه (۵-۲۲) به عنوان ژئودزیک‌های صفحه S ارجاع داده می‌شوند. اکنون برای محاسبه مشتق در (۵-۱۲) از حقیقت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f^2 = g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \quad (۲۳-۵)$$

در ابتدا خواهیم داشت:

$$2f \frac{\partial}{\partial \dot{u}^i} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i} \dot{u}^j \dot{u}^k$$

به طوری که

$$\frac{\partial}{\partial \dot{u}^i} = \frac{1}{2f} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i} \dot{u}^j \dot{u}^k. \quad (۲۴-۵)$$

با بسط نمادهای (۲۳-۵) خواهیم دید:

$$f^2 = g_{11} \dot{u}^1 \dot{u}^1 + g_{12} \dot{u}^1 \dot{u}^2 + g_{21} \dot{u}^2 \dot{u}^1 + g_{22} \dot{u}^2 \dot{u}^2,$$

در نتیجه

$$2f \frac{\partial f}{\partial \dot{u}^1} = 2g_{11} \dot{u}^1 + g_{12} \dot{u}^2 + g_{21} \dot{u}^2 = 2(g_{11} \dot{u}^1 + g_{12} \dot{u}^2) = 2g_{1j} \dot{u}^j$$

و $\partial/\partial \dot{u}^2$ به صورت مشابه خواهد بود. پس

$$f \frac{\partial}{\partial \dot{u}^i} = g_{ij} \dot{u}^j,$$

که ایجاب می کند:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{u}^i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{g_{ij} \dot{u}^j}{f} \right) \\ &= \frac{1}{f} \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{u}^j) + g_{ij} \dot{u}^j \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{f} \right) \\ &= \frac{1}{f} \left(g_{ij} \ddot{u}^j + \dot{u}^j \frac{d}{dt} g_{ij} \right) + g_{ij} \dot{u}^j \left(-\frac{1}{f^2} \frac{df}{dt} \right). \end{aligned}$$

در اینجا با توجه به قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{d}{dt} g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{u}^k} \dot{u}^k$$

بنابراین

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{u}^i} = \frac{1}{f} \left(g_{ij} \ddot{u}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{u}^k} \dot{u}^j \dot{u}^k \right) - \frac{g_{ij} \dot{u}^j}{f^2} \frac{df}{dt}.$$

اگر t را به عنوان پارامتر طول کمان بگیریم، آنگاه $f \equiv 1$ و $df/dt \equiv 0$ و این رابطه ساده شده به طوری که:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{u}^i} = g_{ij} \ddot{u}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^j \dot{u}^k. \quad (۲۵-۵)$$

با گذاشتن (۲۴-۵) و (۲۵-۵) در (۲۰-۵) داریم:

$$g_{ij} \ddot{u}^j + \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right] \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad (۲۶-۵)$$

دومین جمله در سمت چپ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right] \dot{u}^j \dot{u}^k &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right] \dot{u}^j \dot{u}^k \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} \right] \dot{u}^j \dot{u}^k \\ &= \Gamma_{jki} \dot{u}^j \dot{u}^k. \end{aligned}$$

در نهایت، با گذاشتن این رابطه در (۲۵-۵) و با بالا بردن اندیس i خواهیم داشت:

$$\ddot{u}^n + \Gamma_{jk}^n \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad (n=1,2). \quad (۲۷-۵)$$

این دستگاهی از دو معادله دیفرانسیل غیر خطی برای مجهول $u^n(t)$ است. دوباره، t پارامتر طبیعی طول کمان فرض شده است؛ این بدین معنی است که قید $g_{ij} \dot{u}^j \dot{u}^k = 1$ باید در هر مقدار از t در امتداد خم تحمیل شود.

به عنوان یک مثال ساده می توان استوانه $\rho = a$ را بررسی کرد. پرواضح است که اگر مخروطی را در امتداد یک مولدش برش داده و آنرا در یک صفحه "پهن" کنیم، آنگاه کوتاهترین مسیر بین پاره خط مستقیم واصل آنها خواهد بود. با جمع کردن این صفحه به یک مخروط به خمی به شکل زیر می رسمیم:

$$\phi(t) = c_1 t + c_2, \quad z(t) = c_3 t + c_4, \quad (۲۸-۵)$$

یعنی، یک مارپیچ. اکنون با بکارگیری (۲۷-۵) به نتیجه ی مشابهی دست خواهیم یافت:

برای این سطح بخصوص $(u^1, u^2) = (\phi, z)$ و

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} a \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} a \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} z.$$

از

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{x}}a \sin \phi + \hat{\mathbf{y}}a \cos \phi, \quad \frac{\partial r}{\partial \phi} = \hat{\mathbf{z}},$$

به دست می‌آیند. چون تمام ثابت‌های ضرایب $g_{11}=a^2$, $g_{12}=g_{21}=0$, $g_{22}=1$ کرتوفل صفر هستند و (۲۷-۵) به دستگاه

$$\ddot{\phi} = 0, \quad \dot{z} = 0.$$

تبدیل می‌شود. با انتگرال‌گیری نتیجه (۲۸-۵) جواب داده می‌شود.

تمرین ۵-۲۸. ژئودزیک یک کره را بیابید. نشان دهید که آنها دایره‌های عظیمه هستند.

این تمرین نشان می‌دهد که ژئودزیک همواره کوتاهترین مسیر نیست، زیرا هر دو قسمت از دایره عظیمه که دو نقطه را بهم وصل می‌کند می‌تواند ژئودزیک بین آنها باشد.

۵-۵ دومین شکل اساسی سطح

با بکارگیری بسط تیلور با تغییر $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ به تقریب درجه بالای زیر دست خواهیم یافت:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) &= \mathbf{r}(u^1, u^2) + \frac{\partial \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i} \Delta u^i + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i \partial u^j} \Delta u^i \Delta u^j + O\left((\Delta u^1)^2 + (\Delta u^2)^2\right). \end{aligned}$$

در اینجا نماد O برای کمیت‌های برداری دلالت بر مرتبه بالای شکل از نظر کوچکی دارد. به دست آوردن سطح از صفحه بوسان در یک همسایگی از نقطه (u^1, u^2) برایمان جالب است. این مقدار از طریق ضرب نقطه‌ای بوسیله بردار قائم $\mathbf{n}$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & \left(\mathbf{r}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) - \mathbf{r}(u^1, u^2) \right) \cdot \mathbf{n} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i} \cdot \mathbf{n} \Delta u^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \mathbf{n} \Delta u^i \Delta u^j + 0 \left((\Delta u^1)^2 + (\Delta u^2)^2 \right) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \mathbf{n} \Delta u^i \Delta u^j + 0 \left((\Delta u^1)^2 + (\Delta u^2)^2 \right).
 \end{aligned}$$

واقعیت $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i = 0$ را بکار برده‌ایم؛ جملات مرتبه دوم کوچکی در Δu^i دومین شکل اساسی را تشکیل می‌دهند. با نمایش

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u^1, u^2)}{(\partial u^1)^2} \cdot \mathbf{n} &= L(u^1, u^2) = L, \\
 \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2} \cdot \mathbf{n} &= M(u^1, u^2) = M, \\
 \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u^1, u^2)}{(\partial u^2)^2} \cdot \mathbf{n} &= N(u^1, u^2) = N,
 \end{aligned}$$

دومین شکل اساسی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$d^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = L (du^1)^2 + 2M du^1 du^2 + N (du^2)^2. \quad (۲۹-۵)$$

مشق سطح از صفحه بوسان در یک همسایگی کوچک از (u^1, u^2) توسط تقریب زیر به‌دست می‌آید:

$$z = \frac{1}{2} \left(L (du^1)^2 + 2M du^1 du^2 + N (du^2)^2 \right), \quad (۳۰-۵)$$

و بنابراین (۳۰-۵) رفتار طبیعی سطح در این همسایگی را مشخص می‌کند. این فرمول سهموی زیر را تعریف می‌کند:

$$z = \frac{1}{2} \left(L (v^1)^2 + 2M v^1 v^2 + N (v^2)^2 \right) \quad (۳۱-۵)$$

هنگامی مبداء نقطه‌ای از سطح با مختصات (u^1, u^2) باشد با سه‌تایی $(\mathbf{r}_1(u^1, u^2), \mathbf{r}_2(u^1, u^2), \mathbf{n}(u^1, u^2))$ نوشته می‌شود. این سهموی بستگی به ضرایب

L, M, N می‌تواند بیضی؛ هذلولی یا سهمی باشد. اگر $L = M = N = 0$ آنگاه نقطه متناظر یک نقطه مسطح نام دارد.

برای دومین شکل اساسی سطح نمایش از (۵-۲۳) موجود است. با دیفرانسیل‌گیری از اتحاد $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n} = 0$ داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^j} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^j}. \quad (۵-۳۲)$$

با ضرب نقطه‌ای $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}$ به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{r}_i du^i \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^j} du^j = - \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u^j} du^i du^j \right) \cdot \mathbf{n} = -d^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n},$$

یعنی

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} = L (du^1)^2 + 2M du^1 du^2 + N (du^2)^2.$$

تمرین ۵-۲۹. فرض کنید سطحی با مولفه‌های دکارتی به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}(u, v) \hat{\mathbf{x}} + y(u, v) \hat{\mathbf{y}} + z(u, v) \hat{\mathbf{z}}.$$

فرض کنید زیرنویس‌های u و v دلالت بر مشتقات جزئی متناظر با u و v باشد. نشان دهید که ضرایب اولین شکل اساسی عبارتند از:

$$E = \mathbf{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G = \mathbf{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

سپس نشان دهید که ضرایب دومین فرم اساسی برابرند با:

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

تمرین ۵-۳۰. مطلوب است L, M, N برای سطح حاصل از دوران.

خمیدگی قائم یک سطح

خمی واقع در سطح را در نظر می‌گیریم. این خم می‌تواند به‌طور یکتا توسط پارامتر t معین شود به‌گونه‌ای که $u^1 = u^1(s)$, $u^2 = u^2(s)$ ؛ برای سادگی فرض می‌کنیم که S پارامتر طول کمان باشد. در این صورت معادله خم برابر است با:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s)) = \mathbf{r}(s)$$

و بردار مماس به خم در (u^1, u^2) برابر $(\mathbf{r}_i du^i / ds) ds$ است. خمیدگی این خم که می‌تواند به کمک $\mathbf{r}''(s)$ پیدا شود را در نظر می‌گیریم: بردار قائم ν از خم دارای جهت یکسانی است و k_1 برابر $|\mathbf{r}''(s)|$ است. از اینرو

$$\mathbf{r}''(s) \cdot \mathbf{n} = k_1 \cos \vartheta \quad (۳۳-۵)$$

که در اینجا ϑ زاویه بین ν و $\mathbf{n}$ است. اکنون (۳۳-۵) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} k_1 \cos \vartheta &= \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{(\partial u^i)^2} \left(\frac{du^i}{ds}\right)^2 (ds)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^1 \partial u^2} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} (ds)^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{(\partial u^2)^2} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 (ds)^2}{(ds)^2} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{L (du^1(S))^2 + 2M du^1(S) du^2(S) + N (du^2(S))^2}{E (du^1(S))^2 + 2F du^1(S) du^2(S) + G (du^2(S))^2}. \quad (۳۴-۵) \end{aligned}$$

برای تمام خم‌هایی با جهت یکسان تعریف شده به وسیله نسبت ثابت $du^1(s):du^2(s)$ ، سمت راست (۳۴-۵) همانند نسبت دومین شکل اساسی به اولین شکل اساسی است. مقدار k_0 را به‌عنوان خمیدگی قائم سطح در جهت $du^1(s):du^2(s)$ تعریف می‌کنیم. از نظر هندسه، این با خمیدگی خم حاصل از اشتراک سطح با صفحه گذرنده از $(u^1(s), u^2(s))$ و موازی با $\mathbf{n}$ و $\mathbf{r}_i du^1(s)$ برابر است. این خمیدگی قائم در معادله زیر صدق می‌کند:

$$k_0 = k_1 \cos \vartheta$$

که قسمت اصلی قضیه موسینر است. از این فرمول مربوط به خمیدگی‌ها نتیجه می‌شود که خمیدگی قائم سطح در جهت $du^1:du^2$ در بین همه خمیدگی‌های خم سطح گذرنده از $(u^1(s), u^2(s))$ با جهت یکسان $du^1:du^2$ دارای مقدار مینیمم قدر مطلق است. اشاره می‌کنیم که خمیدگی سهموی بوسان توسط معادله‌ی مشابهی مشخص می‌شود. خمیدگی قائم تنها بستگی به جهت $du^1:du^2 = x:y$ دارد. اکنون معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$k_0 = \frac{Lx^2 + 2Mxy + Ny^2}{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}. \quad (35-5)$$

سمت راست (35-5) نسبت به x, y از درجه صفر همگن است؛ به آسانی دیده می‌شود که مینیمم و ماکزیمم k_0 را می‌توان به عنوان مینیمم و ماکزیمم شکل مربعی

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$$

هنگامی که

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = 1. \quad (36-5)$$

به دست آورد. این مساله را می‌توان به کمک ضرایب لاگرانژ حل کرد. روی خم (36-5) قرار می‌دهیم:

$$\min(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2) = k_{\min}, \quad \max(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2) = k_{\max}.$$

فرض می‌کنیم که مقادیر متناظر با x, y به ترتیب (x_1, y_1) و (x_2, y_2) باشند. اگر $k_{\min} \neq k_{\max}$ ، این مقادیر تنها دو جهت $x_j:y_j$ ($j=1,2$) را تعریف می‌کنند و می‌توان نشان داد که

$$Ex_1x_2 + F(x_1y_2 + x_2y_1) + Gy_1y_2 = 0,$$

که با توجه به (16-5)، بدین معنی است که جهت‌های متناظر با مقادیر اکسترمم خمیدگی قائم دو به دو متعامدند. در حالتی که $k_{\min} = k_{\max}$ ، خمیدگی قائم در تمام جهت‌ها یکسان است (سهموی بوسان با سهموی حاصل از دوران متناظر است). مقادیر $k_{\min}, k_{\max}$ خمیدگی‌های قائم اکسترمم سطح در یک نقطه هستند، آنها سطح در یک

نقطه را مشخص می‌کنند و بنابراین نسبت به تغییر مختصات پایا هستند. بنابراین در یک نقطه دو مشخصه دیگر از سطح وجود دارد: خمیدگی میانه:

$$H = \frac{1}{2}(k_{\min} + k_{\max}),$$

و خمیدگی گاوس یا خمیدگی کامل

$$K = k_{\min} k_{\max}.$$

معادلات را بر حسب شکل‌های اساسی سطح بدون اثبات ارایه می‌دهیم:

$$H = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

چون $EG - F^2 > 0$ ، علامت K برابر علامت $LN - M^2$ است. هنگامی که $K = 0$ ، هر نقطه از سطح توسعه پذیر است^۸. این مورد و بسیاری از واقعیت‌های دیگر در خصوص H و K را می‌توان در هر کتاب درسی هندسه دیفرانسیل یافت (به عنوان مثال آپوگورلف (۱۹۵۷)).

تمرین ۵-۳۱. مطلوب است خمیدگی میانی و گاوس یک کره به شعاع a .

تمرین ۵-۳۲. مطلوب است خمیدگی میانی و گاوس در $x = y = 0$ از سهموی‌های:

$$z = ax^2 + by^2 \text{ (پ)}; \quad z = a(x^2 + y^2) \text{ (ب)}; \quad z = axy \text{ (الف)}$$

تمرین ۵-۳۳. فرض کنید سطح زیر در مختصات دکارتی داه شده باشد:

$$\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}f = (x, y).$$

نشان دهید:

(الف)

$$E = \mathbf{r}_x^2 = 1 + f_x^2, \quad F = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y = f_x f_y, \quad G = \mathbf{r}_y^2 = 1 + f_y^2;$$

^۸ به طور نادقیق، سطح توسعه پذیر، سطحی است که آن را می‌توان روی قسمتی از یک صفحه بدون فشار یا کشش هر قسمتی از آن، گستراند. به عنوان مثال مخروط و استوانه، اما کره چنین نیست. یک سطح توسعه پذیر می‌تواند توسط یک خط مستقیم (مولد) در امتداد یک خم فضایی تولید شود. برای تعریف دقیق تر صفحه ۲۲۶ را ببینید.

(ب)

$$EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2;$$

(پ)

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}};$$

(ت) مساحت قسمتی از سطح برابر است با

$$S = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy;$$

(ت) خمیدگی گاوس برابر است با

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

۵-۶ فرمول‌های مشتق

در هر نقطه از سطح، کنج سه‌تایی زیر تعریف شده است:

$$\mathbf{r}_1(u^1, u^2), \quad \mathbf{r}_2(u^1, u^2), \quad \mathbf{n}(u^1, u^2).$$

در نظریه پوسته‌ها آنها مختصات‌های منحنی‌الخط در یک همسایگی از سطح را به‌گونه‌ای معرفی می‌کنند که سه‌تایی $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ حفظ شود. به دلیل یافتن مشخصه‌های اختلاف میدان‌های داده شده روی سطح و خارج از آن، بایستی مشتق‌های سه‌تایی نسبت به مختصات را بیابیم. هدف اصلی این بخش معرفی این‌ها برحسب جملاتی از سطح بوده که قبلاً معرفی شده است.

با نمایش مشتقات از طریق نمادگذاری کریستوفل شروع می‌کنیم. این مورد قانونی است زیرا با توجه به فرض $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n})$ یک پایه از فضای برداری است. بنابراین

$$\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^t \mathbf{r}_t + \lambda_{ij} \mathbf{n}. \quad (5-37)$$

یادآوری می‌کنیم که اندیس‌های i, j, t که مقادیری از مجموعه $\{1, 2\}$ که دلیلی برای معرفی نماد λ_{ij} از ضرایب $\mathbf{n}$ است را بکار برده‌ایم. به‌طور مشابه بسط مشتق‌های $\mathbf{n}$ را

معرفی می‌کنیم. برای به‌دست آوردن ضرایب λ_{ij} ، (۳۷-۵) را در $\mathbf{n}$ ضرب نقطه‌ای می‌کنیم. با بکارگیری عبارت دومین شکل اساسی به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_{11} = L, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} = M, \quad \lambda_{22} = N.$$

سپس، در ابتدا (۳۷-۵) را در $\mathbf{r}_1$ و بعد در $\mathbf{r}_2$ ضرب داخلی کرده، شش معادله بر حسب شش مجهول نمادگذاری‌های کریستوفل به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \\ \frac{\partial E}{\partial u^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\ \frac{\partial F}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G. \end{aligned}$$

این دستگاه به آسانی برای ضرایب کریستوفل قابل حل است زیرا دستگاه به جفت‌هایی از معادلات نسبت به جفت‌هایی از نشانه گذاری‌های کریستوفل تجزیه می‌شود. به‌عنوان مثال جفت اول ایجاب می‌کند که:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{EG - F^2} \left[\frac{G}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} - F \frac{\partial F}{\partial u^1} + \frac{F}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} \right],$$

و به طور مشابه عبارتی برای Γ_{11}^2 . بقیه کار را به خواننده واگذار می‌کنیم، متذکر می‌شویم که عبارت‌های نشانه‌های کریستوفل تنها از ضرایب اولین شکل اساسی سطح تشکیل شده‌اند. پس برای مشتق‌های قائم $\mathbf{n}$ در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{n}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i} = \mu_i^t \mathbf{r}_t + \mu_i^3 \mathbf{n}. \quad (۳۸-۵)$$

اکنون ضرایب این عبارات را از طریق ضرایب اولین شکل اساسی سطح می یابیم. به دلیل معادله

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} 1 = \frac{\partial}{\partial u^i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 2\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}$$

خواهیم داشت:

$$\mu_i^3 = 0.$$

اکنون برای $i = 1$ معادله (۳۸-۵) را در $\mathbf{r}_1$ و متعاقباً در $\mathbf{r}_2$ ضرب نقطه‌ای می‌کنیم. با بکارگیری تعاریف ضرایب دومین شکل اساسی، معادلات زیر را داریم:

$$-L = \mu_1^1 E + \mu_1^2 F, \quad -M = \mu_1^1 F + \mu_1^2 G,$$

که از آنها به‌دست می‌آوریم:

$$\mu_1^1 = \frac{-LG + MF}{EG - F^2}, \quad \mu_1^2 = \frac{LF - ME}{EG - F^2}.$$

بطور مشابه با تکرار این فرایند برای (۳۸-۵) وقتی که $i = 2$ است به‌دست می‌آوریم:

$$\mu_2^1 = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, \quad \mu_2^2 = \frac{-NE + MF}{EG - F^2}.$$

تمرین ۳۴-۵. نشانه‌های کریستوفل را در حالتی که اولین شکل اساسی $(du^1)^2 + G(du^1)^2$ است را به‌دست آورید.

تمرین ۳۵-۵. برای سطح حاصل از دوران که خطوط مختصاتی موازی و نصف النهار هستند تمام ضرایب بسط‌های (۳۷-۵) و (۳۸-۵) را به‌دست آورید.

برخی از فرمول‌های مفید

برخی اتحادها مرتباً استفاده می‌شوند، مشتق آنها نیز طولانی بوده و بنابراین در اینجا آنها را حذف می‌کنیم. اکنون ضرایب دومین فرم اساسی را با بکاربردن نمادگذاری اندیسی دوباره نامگذاری می‌کنیم:

$$b_{11} = L, \quad b_{12} = b_{21} = M, \quad b_{22} = N.$$

اینها مولفه‌های متناظر با تانسور مقارنت مرتبه دو هستند. اولین فرمول منسوب به گاوس است:

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} \right) + (\Gamma_{12}^i \Gamma_{12}^j - \Gamma_{11}^i \Gamma_{22}^j) g_{ij},$$

از اینجا (و با توجه به شکل K ، صفحه ۱۵۲ را ببینید) نتیجه می‌شود که خمیدگی گاوس سطح را می‌توان فقط بر حسب اولین شکل اساسی بیان کرد. فرمول بعدی منسوب به پترسون و کودازی است:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = \Gamma_{i2}^t b_{t1} - \Gamma_{i1}^t b_{t2} \quad (i=1,2).$$

با بکارگیری این پاراگراف، می‌توانیم فرمول‌های مشتق‌گیری بردار فضایی داده شده روی سطح را به‌دست آوریم:

$$\mathbf{f} = f^i \mathbf{r}_i + f_3 \mathbf{n} = f_i \mathbf{r}^i + f_3 \mathbf{n}$$

با قرار دادن $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}^3 = \mathbf{n}$ ، می‌توانیم فرمول‌های زیر را که تقلیدی از فرمول‌های فصل ۴ است را به‌دست آوریم:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u^i} = \nabla_i f^t \mathbf{r}_t = \nabla_i f_t \mathbf{r}^t.$$

در این‌ها، مشتق‌های پایا برابرند با:

$$\nabla_i f^j = \frac{\partial f^j}{\partial u^i} + \Gamma_{it}^j f^t - b_i^j f_3,$$

$$\nabla_i f_j = \frac{\partial f_j}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^t f_t - b_{ij} f_3,$$

$$\nabla_i f_3 = \frac{\partial f_3}{\partial u^i} + b_{it} f^t = \frac{\partial f_3}{\partial u^i} + b_i^t f_t.$$

که i, j مقادیر ۱ و ۲ و t مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را می‌پذیرد. جمع بندی روی i, j و t در دامنه‌ای متناظر تغییر می‌کند. هنگامی $\mathbf{f} = \mathbf{n}$ ، یعنی $f^1 = f^2 = 0$ و $f^3 = 1$ ، فرمول زیر را برای مشتقات $\mathbf{n}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i} = -b_i^t \mathbf{r}_t = -b_{it} \mathbf{r}^t. \quad (۳۹-۵)$$

گرادیان سطح یا عملگر نابالای سطح را به کمک فرمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\nabla} = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (i = 1, 2),$$

در می‌یابیم که

$$\tilde{\nabla} \mathbf{f} = \nabla_i f^t \mathbf{r}_t^i \mathbf{r}_t = \nabla_i f_t \mathbf{r}_t^i \mathbf{r}^t, \quad \tilde{\nabla} \mathbf{n} = -\mathbf{B},$$

که در اینجا $\mathbf{B}$ تانسور خمیدگی سطح بوده که به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{B} = b_i^j \mathbf{r}_t^i \mathbf{r}_j = b_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = b^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j.$$

می‌توان عملگرهای واگرایی و دوران سطح را معرفی کرد:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u^i}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{f} = \tilde{\nabla} \times \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u^i}.$$

کاربردهای حساب دیفرانسیل روی سطح در فصل ۷، جایی که نظریه پوسته بررسی می‌شود، معرفی شده است.

۵-۷ نمایش ضمنی خم، برخورد خم‌ها

کار ما در فصل ۵ مباحث مورد نیاز برای به دست آوردن معادلات توصیف شده توسط اشیاء طبیعی خاصی بود. اکنون به سوالات بسیار مهم اما کمتر فنی که می‌تواند درک ما از هندسه دیفرانسیل را بیشتر کند، بر می‌گردیم.

یک خم را توسط نمایش $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ توصیف کرده‌ایم. از این نقطه نظر، یک خم تصویری از یک دامنه یک بعدی از پارامتر t است. به طور مشابه یک سطح تصویر دامنه دو بعدی داده شده توسط فرمول زیر است:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2). \quad (۴۰-۵)$$

به هر حال، می‌دانیم که در مختصات دکارتی یک کره توسط معادله زیر توصیف می‌شود:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

و این را نمی‌توان برای همه نقاط بطور همزمان به شکل (۴۰-۵) نوشت. این مثال توصیف یک سطح به صورت فنی است. می‌توانیم هر قسمت کوچک از کره را به فرم صریح از نوع (۴۰-۳) توصیف کرد. این نکته‌ای است که هندسه منیفلد از آن ناشی می‌-

شود. یک سطح مانند کره را می‌توان به قسمت‌های کوچکی تقسیم کرد به‌طوری‌که هر قسمت را به طریق مورد نیاز توصیف کرد. به‌رحال، شکل ضمنی توصیف‌های سطوح و خم‌ها در عمل معمول هستند. فرض کنیم معادله سطح به‌صورت زیر باشد:

$$F(\mathbf{r})=0.$$

این معادله شبیه به معادله زیر در دستگاه دکارتی است:

$$F(x, y, z)=0.$$

قبلاً خم‌های مختصاتی را به‌عنوان یک مجموعه‌ی مفروض از معادلات $\mathbf{r}=\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ که دو پارامتر از سه پارامتر مختصاتی q^1, q^2, q^3 ثابت هستند، توصیف کردیم. چنین خمی را می‌توان در شق دیگر به عنوان اشتراک سطوح مختصاتی توصیف کرد. به‌عنوان مثال خم مختصاتی q^1 ، خم متناظر با $q^2=q_0^2, q^3=q_0^3$ اشتراک $\mathbf{r}=\mathbf{r}(q^1, q^2, q_0^3)$ و $r=r(q^1, q_0^2, q^3)$ است. به‌طور مشابه یک خم در فضا را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط توصیف کرد. توسط بردار $\mathbf{r}$ که به‌طور همزمان در معادلات زیر

$$F_1(\mathbf{r})=0, \quad F_2(\mathbf{r})=0,$$

و یا در شکل دکارتی

$$F_1(q^1, q^2, q_0^3)=0, \quad F_2(q^1, q^2, q^3)=0.$$

صدق می‌کند، نمایش داد.

مماس $\mathbf{t}$ به خم در یک نقطه بایستی بر دو صفحه‌ی قائم در نقطه عمود باشد، اگر $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ قائم‌ها باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{t}=\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$

برخورد خم‌ها

همچنین یک خم در صفحه را می‌توان به کمک یک معادله نشان داد:

$$F(q^1, q^2)=0. \quad \text{یا} \quad F_1(\mathbf{r})=0$$

مایل به مطالعه مساله تقریب یک خم مسطح داده شده در یک نقطه مفروض توسط خم دیگر گرفته شده از خانواده‌ی خم های پارامتری: اکنون با مساله زیر شروع می کنیم:

خم هموار A و نقطه C واقع بر آن داده شده است، از بین همه خطوط مستقیم واقع در صفحه یکی را که بهترین تقریب برای رفتار A در C است را انتخاب می کنیم.

البته یک جواب خط مماس A در C است. با در نظر گرفتن یک خط گذرنده از C که A را در نقطه D نزدیک به C قطع می کند و سپس گرفتن حد به طوری که این خط حول C دوران کند به گونه ای که D به C میل کند، این مطلب مشاهده می شود. خط حاصل از این حد، خط مماس است.

اکنون این ایده را به گونه ای توسعه داده و به دنبال تقریبی هستیم که بتوان جهت خم A در C و خمیدگی در آن نقطه را انعکاس دهد. به دلیل اینکه خطوط مستقیم منعکس کننده رفتار خمیدگی نیست، برخی دیگر از خانواده خم های تقریبی را به کار می بریم. خانواده همه دایره های واقع در صفحه را به کار می بریم، چون هر سه نقطه در صفحه یک دایره یکتا معین می کند. دو نقطه D_1 و D_2 نزدیک C در نظر گرفته و دایره ی گذرنده از این سه نقطه را ترسیم کنید و تحت میل D_1 و D_2 به C حد می گیریم. این منجر به دایره ای می شود که قابلیت انعکاس خواص خواسته شده را از A در C را دارد (مماس و خمیدگی). خانواده تمام دایره های واقع در صفحه در مختصات دکارتی با معادله زیر توصیف می شود:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad (41-5)$$

که در آن سه متغیر x_0, y_0 و R پارامترهای آزاد بوده که باید به طور مناسب برای تقریب خم داده شده در یک نقطه انتخاب شوند. بنابراین می بینیم که خانواده ی سه پارامتری از خم های مسطح برای رسیدن به تقریب بهتر مورد نیاز است. می توانیم یک سهمی از خانواده $ax^2 + bx + c$ بکار ببریم، اما این نوع تقریب کمی غیر معمول است.

در حالت کلی، به دنبال تقریب خم مسطح

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (42-5)$$

در نقطه $t = t_0$ با معرفی خانواده پارامتری Φ_n از خم های زیر هستیم:

$$F(\mathbf{r}, a_1, \dots, a_n) = 0,$$

که در آن $a_1, \dots, a_n$ پارامترهای آزاد هستند.^۹ تعداد n نقطه

$$\mathbf{r}(t_k) \quad (k=0, \dots, n-1)$$

از خم (۴۲-۵) که همه t_k به t_0 نزدیک هستند را در نظر می‌گیریم. با در اختیار داشتن n پارامتر آزاد قادر هستیم که خمی را از Φ_n بیابیم که از این نقاط می‌گذرد. این بدین معنی است که دستگاه

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}(t_0), a_1, \dots, a_n) &= 0, \\ F(\mathbf{r}(t_1), a_1, \dots, a_n) &= 0, \\ &\vdots \\ F(\mathbf{r}(t_{n-1}), a_1, \dots, a_n) &= 0, \end{aligned} \quad (۴۳-۵)$$

برای برخی از پارامترهای $a_1, \dots, a_n$ صادق است. فرض می‌کنیم که a_i بستگی به t_k داشته باشد به گونه‌ای که وقتی همه t_k به t_0 میل می‌کند، a_i به طور پیوسته به برخی مقادیر متناظر b_i میل می‌کند. بنابراین خم $F(\mathbf{r}, b_1, \dots, b_n) = 0$ را می‌یابیم که بهترین تقریب برای رفتار (۴۲-۵) در t_0 است و داریم:

$$F(\mathbf{r}(t_0), b_1, \dots, b_n) = 0. \quad (۴۴-۵)$$

به‌عنوان یک موضوع عملی، برای به‌دست آوردن خم مورد نیاز استفاده از چنین حد گیری مرسوم نیست. بهتر است شرایطی داشته باشیم که تنها مشخصات خم در t_0 درگیر باشند. به دلیل اینکه خوش تعریفی حدگیری فرض شده است، می‌توانیم مجموعه مرتب از نقاط t_k را در نظر بگیریم:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1}.$$

در این حالت فرض کنید $a_1, \dots, a_n$ جوابی برای (۴۳-۵) باشد و تابع تک متغیره زیر از متغیر t را در نظر می‌گیریم:

$$f(t) = F(\mathbf{r}(t), a_1, \dots, a_n)$$

^۹ فرض می‌کنیم که خم (۴۲-۵) به‌عنوان خم برگرفته از خانواده Φ_n در نقطه t_0 بقدر کافی هموار باشد.

این تابع در $t = t_k$ برای $k = 0, \dots, n-1$ صفر می‌شود. به کمک قضیه رل نقاط $t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, \dots, n-1$) وجود دارند به طوری که $f'(t'_k) = 0$. در حین حدگیری تمام t'_k به t میل می‌کنند، بنابراین داریم:

$$\left. \frac{d}{dt} F(\mathbf{r}(t), b_1, \dots, b_n) \right|_{t=t_0} = 0.$$

به طور مشابه تابع

$$f'(t) = F(\mathbf{r}(t), b_1, \dots, b_n)$$

$n-1$ صفر در نقاط $t'_1 < \dots < t'_{n-1}$ می‌گیرد. بنابراین طبق قضیه رل نقطه t''_k روی پاره خط $[t'_{k-1}, t'_k]$ وجود دارد به طوری که $f''(t''_k) = 0$. بعد از حدگیری اصلی خواهیم داشت:

$$\left. \frac{d}{dt^2} F(\mathbf{r}(t), b_1, \dots, b_n) \right|_{t=t_0} = 0.$$

با تکرار این فرایند برای مشتق تا مرتبه $n-1$ ، شرایط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} F(\mathbf{r}(t), b_1, \dots, b_n) \right|_{t=t_0} = 0 \quad (k \leq n-1).$$

این‌ها به همراه (۴۴-۵)، شرط که باید توسط خم مورد نظر از خانواده Φ_n اجرا شود را تشکیل می‌دهند. عدد $n-1$ را به عنوان مرتبه برخورد بین این خم و (۴۲-۵) تعریف می‌کنیم.

برخورد خم با دایره، گسترده‌ها

اکنون به مساله قبلی باز می‌گردیم و این شرایط را برای تقریب خم

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 x(t) + \mathbf{i}_2 y(t)$$

در نقطه $t = t_0$ توسط یک دایره از خانواده (۴۱-۵) بکار می‌بریم. سه متغیر آزاد x_0, y_0, R باید در دستگاه زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} (x(t_0) - x_0)^2 + (y(t_0) - y_0)^2 &= R^2, \\ 2(x(t_0) - x_0)x'(t_0) + 2(y(t_0) - y_0)y'(t_0) &= 0, \\ 2x'(t_0)^2 + 2(x(t_0) - x_0)x''(t_0) + 2y'(t_0)^2 + 2(y(t_0) - y_0)y''(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

بویژه جواب این‌ها ایجاب می‌کند:

$$R^2 = \frac{\{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2\}^3}{[x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)]^2}.$$

می‌بینیم که خمیدگی $1/R$ از دایره با خمیدگی k_1 از خم منطبق است. چون فرمول‌های x_0 و y_0 دشوار هستند، با ارزش است که مساله را با نمادهای برداری دوباره طرح کنیم.

فرض کنید $\mathbf{r}_0$ مرکز دایره برخورد زیر باشد.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = R^2.$$

فرض کنید خمی توسط پارامترسازی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ داده شده باشد. برای حل این مساله برخورد مرتبه دوم، تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0)^2 - R^2$$

و داریم:

$$F(s) = 0, \quad F(s_0) = 0, \quad F''(s_0) = 0,$$

یا

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0)^2 - R^2 &= 0, \\ 2(\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\tau}(s_0) &= 0, \\ 2 + 2(\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\nu}(s_0)k_1 &= 0. \end{aligned}$$

به کمک معادله دوم، بردار $\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0$ بر مماس $\boldsymbol{\tau}(s_0)$ عمود است، در نتیجه در جهت قائم $\boldsymbol{\nu}(s_0)$ است و داریم:

$$(\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\nu}(s_0) = -|\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0| = -R.$$

این معادله و معادله سوم ایجاب می کند که $1 - k_1 R = 0$ ، در نتیجه $R = 1/k_1$ همانند آنچه بالا بیان شد.

کانون مراکز دایره های برخورد خم گسترده خم نامیده می شود. معادله گسترده برابر است با

$$\rho(t) = r(t) + Rv(t), \quad R = 1/k_1$$

یا در شکل پارامتری دکارتی $(\rho = (\xi, \eta))$:

$$\xi = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y' - x''y'}, \quad \eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y' - x''y'}.$$

برخورد مرتبه n ام بین خم و سطح

به طریق مشابه می توانیم مساله برخورد مرتبه n ام بین خم فضایی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ در $t = t_0$ و یک صفحه از خانواده $n + 1$ پارامتری از صفحه ضمنی زیر حل کنیم:

$$F(\mathbf{r}, a_1, \dots, a_{n+1}) = 0.$$

هر چیز صفحه قبل باید کلمه به کلمه تکرار شود. ابتدا یک سطح از خانواده به گونه ای انتخاب می کنیم که بر خم در $n + 1$ نقطه نزدیک به t_0 منطبق باشد. این مطلب $n + 1$ معادله به دست می دهد:

$$F(\mathbf{r}(t_0), a_1, \dots, a_{n+1}) = 0,$$

$$F(\mathbf{r}(t_1), a_1, \dots, a_{n+1}) = 0,$$

⋮

$$F(\mathbf{r}(t_{n+1}), a_1, \dots, a_{n+1}) = 0.$$

با در نظر گرفتن نتایج قبل به عنوان معادلاتی که باید در نقاط برخورد مرتبه n برقرار است، به دست می آوریم:

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} F(\mathbf{r}(t), b_1, b_2, \dots, b_{n+1}) \right|_{t=t_0} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

صفحه بوسان بر خم در نقطه A به عنوان صفحه گذرنده از A که شامل τ و ν است را معرفی کرده ایم. توجه داشته باشید که این صفحه را نیز می توان به عنوان سطحی از برخورد مرتبه دو تعریف کرد.

خواننده باید در نظر داشته باشد که چگونه این ملاحظات را برای مساله برخورد مرتبه n بین سطح مفروض و سطحی از خانواده چند پارامتری از سطوح بکار برد.

تمرین ۵-۳۶. مساله برخورد مرتبه سوم بین یک خم فضایی و یک کره را بررسی کنید. با قرار دادن $R = 1/k_1$ و ρ شعاع کره، نشان دهید (در پارامتری سازی طبیعی):

$$\rho^2 = R^2 + R'^2/k_2^2.$$

همچنین نشان دهید که مرکز برخورد کره روی خط مستقیم گذرنده از مرکز خمیدگی اصلی است که موازی قائم دوم در نقطه ای روی خم است.

۵-۸ سهموی بوسان

هنگام بررسی ساختار سطح در یک نقطه، تقریب سطح به کمک سطحی که رفتار مشهود است مناسب خواهد بود. یک سطح کروی برای این منظور ناکافی است زیرا دارای خمیدگی یکسانی در تمام جهات است. بهر حال، می توانیم از سهموی بوسان معرفی شده در (۵-۳۱) استفاده کنیم. اکنون این سهموی را از نقطه نظر تقریب مورد بررسی مجدد قرار می دهیم.

فرض کنید O یک نقطه ثابت روی سطح و فرض کنیم که سطح بقدر کافی در O هموار باشد. در O صفحه بوسان را مشخص می کنیم و چارچوب $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{n})$ که $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ چارچوبی با مبدا O روی صفحه بوسان و $\mathbf{n}$ که بر سطح و صفحه بوسان عمود است را معرفی می کنیم. برای یک سطح هموار، مختصات دکارتی (x, y) نقش سطوح مختصاتی را ایفا می کند زیرا هر نقطه روی صفحه در O را بطور یکتا تعیین می کند. سطح در مجاورت O را می توان توسط معادله $z(x, y)$ توصیف کرد. فرض می کنیم $z(x, y)$ نزدیکی O دارای مشتق دوم پیوسته باشد. در همسایگی $(0, 0)$ می وائیم از بسط تیلور $z = z(x, y)$ استفاده کنیم:

$$z(x, y) = z(0, 0) + z_x(0, 0)x + z_y(0, 0)y \\ = \frac{1}{2}(z_{xx}x^2 + 2z_{xy}xy + z_{yy}y^2) + o(x^2, y^2),$$

که اندیس‌های x, y به ترتیب دلالت بر مشتق‌گیری جزئی نسبت به x, y دارند (و در این بخش، گسترده در نقطه $(0, 0)$ است). چون مختصات (x, y) در صفحه بوسان قرار دارد، مشتق‌های جزئی برابرند با:

$$z_x(0, 0) = 0, \quad z_y(0, 0) = 0.$$

با انتخاب مبدا، $z(0, 0) = 0$. بنابراین بسط تیلور برابر است با:

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(z_{xx}x^2 + 2z_{xy}xy + z_{yy}y^2) + o(x^2, y^2). \quad (۴۵-۵)$$

اکنون سهموی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(z_{xx}x^2 + 2z_{xy}xy + z_{yy}y^2). \quad (۴۶-۵)$$

اختلاف بین صفحه‌های توصیف شده توسط (۴۵-۵) و (۴۶-۵) کوچک است (همانطوری که جمله o نشان می‌دهد). این مطلب نشان دهنده سهموی بوسانی است که رفتار سطح در نقطه O را تقریب می‌کند. با تغییر مختصات چارچوب می‌توان نشان داد که سهموی (۴۶-۵) بر (۳۱-۵) منطبق است. L, M, N ضرایب آن در نقطه O هستند. اکنون توجه می‌کنیم که دومین شکل اساسی از سطح اولیه در نقطه بر سهموی هذلولوی منطبق است و موقعیت‌ها با خمیدگی قائم یکسان است. قرار می‌دهیم:

$$r = z_{xx}(0, 0), \quad s = z_{xy}(0, 0), \quad t = z_{yy}(0, 0),$$

بنابراین معادله سهموی بوسان برابر است با:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2).$$

اکنون تصویر بر صفحه مختصاتی xy از مقاطع برشی سهموی بوسان با دو صفحه‌ی $h > 0, z = \pm h$ را ترسیم می‌کنیم. این خم به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{1}{2}|rx^2 + 2sxy + ty^2| = h. \quad (۴۷-۵)$$

این خم یک بیضی است هرگاه سهمی گون یک بیضی گون باشد ($rt - s^2 > 0$) است و یا یک هذلولوی است هرگاه یک هذلولوی گون باشد ($rt - s^2 < 0$) و یا یک خانواده از خط‌های راست است هرگاه سهمی گون باشد ($rt - s^2 = 0$). می‌توان نشان داد که شعاع خمیدگی قائم سطح در جهت $x:y$ با مربع فاصله از مبدا به نقطه واقع در خم (۵-۴۷) گرفته شده در همان جهت متناسب است. این خم را نشانگر دوپیرین می‌نامیم. نشانگر دوپیرین خم از مرتبه دوم روی صفحه است و بنابراین دارای جهت‌های بخصوص (محورها) و مقادیر بخصوص برای مشخص کردن خم است. جهت‌های بخصوص به عنوان جهت‌های اصلی شناخته می‌شوند. در بخش بعدی این شکل را از نقطه نظر دیگری بررسی می‌کنیم.

۵-۹ خمیدگی‌های اصلی سطح

اکنون خواص سطح با دومین شکل اساسی آن را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم. با بکارگیری $u = u^1, v = u^2$ ، مختصات‌ها را بدون اندیس نشان می‌دهیم. همچنین از اندیس‌های u, v برای نشان دادن مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{n}_u = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}, \quad \mathbf{n}_v = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}.$$

دومین شکل اساسی برابر است با:

$$Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2 = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n},$$

که

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}.$$

اولین مشتق از $\mathbf{n}$ در نقطه P را در نظر بگیرید:

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv.$$

چون $\mathbf{n}$ یک بردار یکه است، مشتق آن بر $d\mathbf{n}$ عمود است و در صفحه بوسان سطح در نقطه $\mathbf{n}$ قرار دارد. همچنین می‌دانیم که مشتق $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ در صفحه بوسان در P قرار دارد. اکنون ارتباط بین مشتق‌های $d\mathbf{r}$ و $d\mathbf{n}$ نسبت به متغیرهای du, dv که اکنون متغیرهای مستقل هستند را بررسی می‌کنیم. واضح است که این ارتباط

به صورت تناظر خطی $d\mathbf{r} \mapsto d\mathbf{n}$ است. بنابراین تانسور دو بعدی فضایی $\mathbf{A}$ به گونه‌ای تعریف می‌شود که:

$$d\mathbf{n} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

این تانسور بطور کامل توسط مقادیر $\mathbf{n}_v = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_v$ و $\mathbf{n}_u = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_u$ مشخص می‌شود. **لم ۵-۱.** تانسور $\mathbf{A}$ متقارن است.

اثبات. کافی است که معادله زیر برای جفت بردارهای مستقل خطی $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ اثبات شود.

$$\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1)$$

برای نشان دادن تقارن $\mathbf{A}$ ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathbf{r}_u \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_v) = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v.$$

به طور مشابه

$$\mathbf{r}_v \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_u) = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u.$$

تقارن $\mathbf{A}$ از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u;$$

این اتحاد بوسیله مشتق از اتحاد $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_u = 0$ نسبت به u و سپس $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_v = 0$ نسبت به v و حذف جمله شامل $\mathbf{r}_{uv}$ به دست می‌آید.

می‌دانیم که تانسور متقارن دارای مقادیر ویژه حقیقی است؛ در این حالت بیش از دو مقدار ویژه λ_1 و λ_2 که به ترتیب متناظر با بردارهای ویژه دو به دو متعامد $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ وجود ندارد (اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

اکنون معادله مقادیر ویژه را می‌یابیم. یک بردار در صفحه بوسان می‌تواند به صورت $x\mathbf{r}_u + y\mathbf{r}_v$ نمایش داده شود زیرا $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ یک پایه برای آن است. به کمک تعریف $\mathbf{A}$ داریم:

$$\mathbf{A} \cdot (x\mathbf{r}_u + y\mathbf{r}_v) = x\mathbf{n}_u + y\mathbf{n}_v.$$

از طرف دیگر، $x\mathbf{r}_u + y\mathbf{r}_v \neq 0$ یک بردار ویژه است اگر λ وجود داشته باشد به طوری که

$$\mathbf{A} \cdot (x\mathbf{r}_u + y\mathbf{r}_v) = \lambda(x\mathbf{r}_u + y\mathbf{r}_v).$$

بنابراین برای بردارهای مشابه به دست می آوریم:

$$x \mathbf{n}_u + y \mathbf{n}_v = \lambda (x \mathbf{r}_u + y \mathbf{r}_v). \quad (48-5)$$

می بینیم که یک بردار ویژه توسط شرط مشابهی به عنوان جهت اصلی از بخش قبل تعریف شده است، چون این معادله بدین معنی است که در آن $d\mathbf{r}$ و $d\mathbf{n}$ موازی هستند را بیابیم.

اکنون معادلات اسکالر را از آخرین معادله برداری به دست می آوریم. برای این منظور (48-5) را ابتدا در $\mathbf{r}_u$ و سپس در $\mathbf{r}_v$ ضرب داخلی می کنیم. به کمک (5-32) داریم:

$$L = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad M = -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad N = -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{r}_v,$$

در نتیجه

$$-Lx - My = \lambda (Ex + Fy),$$

$$-Mx - Ny = \lambda (Fx + Gy).$$

با بازنویسی دستگاهی از معادلات خطی همگن خواهیم داشت:

$$(L + \lambda E)x + (M + \lambda F)y = 0, \quad (49-5)$$

$$(M + \lambda F)x + (N + \lambda G)y = 0,$$

این دستگاه دارای جواب های غیر بدیهی است هرگاه دترمینانش صفر شود:

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (2MF - EN - LG)\lambda + (LN - M^2) = 0. \quad (50-5)$$

در حالت کلی، دو ریشه λ_1 و λ_2 که با دو جهتی که قبلاً جهت های اصلی نامیده شد، متناظر هستند. آنها را می توان با حذف λ از (49-5) به دست آورد:

$$\begin{vmatrix} -x^2 & xy & -y^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

بدین وسیله دو جهت دو به دو متعامد $x:y$ تعریف می کنیم. اگر $\lambda_1 = \lambda_2$ آنگاه تمام جهت ها اصلی اند. بنابراین می توان دو جهت دو به دو متعامد انتخاب کرد و آنها را به عنوان اصلی در نظر گرفت.

اکنون به بررسی سوال دیگری که برایمان سوالات مشابهی به همراه دارد، می‌پردازیم. سوال یافتن خمیدگی‌های قائم اکستریم در یک نقطه از سطح است. قبلاً نشان دادیم که در جهت $x:y$ خمیدگی قائم سطح توسط فرمول زیر داده می‌شود:

$$k = \frac{Lx^2 + 2Mxy + Ny^2}{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}.$$

به دلیل همگنی مرتبه دوم از x, y از صورت و مخرج، می‌توانیم مساله یافته خمیدگی‌های اکستریم به‌عنوان مساله یافتن نقاط اکستریم تابع

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$$

تحت محدودیت

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = 1$$

را بازنویسی کنیم. با بکارگیری نظریه ضرایب لاگرانژ، نقاط اکستریم تابع زیر

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 - k(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2),$$

که به معادلات زیر منجر می‌شود را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} (L - kE)x + (M + kF)y &= 0, \\ (M - kF)x + (N + kG)y &= 0. \end{aligned} \quad (51-5)$$

اگر قرار دهیم $k = -\lambda$ بدین معنی که جهت‌های اصلی یافت شده برابر باشند، آنگاه دستگاه‌های (51-5) و (49-5) منطبق‌اند. علاوه بر این دیده می‌شود که λ_1 و λ_2 یافت شده به‌عنوان مقادیر ویژه تانسور A ، خمیدگی‌های اکستریم سطح در نقطه که $k_1 = -\lambda_1$ و $k_2 = -\lambda_2$ هستند را به‌دست می‌دهند. یادآور می‌شویم که آنها ریشه‌های چندجمله‌ای (50-5) هستند و با بکارگیری قضیه ویت به‌دست می‌آوریم:

$$k_2 + k_1 = \frac{EN + 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

با این عبارات در خمیدگی گاوس $K = k_1 k_2$ و خمیدگی میانگین $H = (k_1 + k_2)/2$ روبه‌رو بوده‌ایم.

می‌بینیم که هر دو بر حسب ضرایب اولین شکل اساسی بیان شده‌اند. قضیه معروفی از گاوس هست که K می‌تواند تنها بر حسب ضرایب اولین شکل اساسی بیان شود.

زمانی که خمیدگی‌های اصلی و جهت‌هایشان معلوم هستند، فرمول اوایلر خمیدگی قائم در هر جهت از خم که زاویه ϕ را با اولین جهت اصلی همان نقطه را ترکیب می‌کند، متناظر با k_1 :

$$k_\phi = k_1 \cos \phi + k_2 \sin \phi.$$

جهت‌های اصلی سطح خطوط خمیدگی سطح را تعریف می‌کنند. یک خط در سطح را یک خط خمیدگی گوییم اگر در هر نقطه مماسش در جهت یکی از جهت‌های اصلی در این نقطه از سطح باشد.

دو خط خمیدگی از یک نقطه می‌گذرند. با قرار دادن جهت‌هایشان با $du:dv$ و $\delta u:\delta v$ در معادله داریم، اولین معادله به معنی تعامد جهت‌ها و دومی مزدوج‌ها نشان است:

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0,$$

$$Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0.$$

مرسوم است که خانواده‌ی خطوط خمیدگی از سطح را به‌عنوان خطوط مختصاتی سطح در نظر بگیریم. برای این مختصات منحنی الخط $F = M = 0$.

دو صفحه/ایزومتريک نامیده می‌شوند اگر یک تناظر یک به یک بین نقاط سطوح باشد به‌گونه‌ای که خم‌های متناظر در سطوح دارای طول یکسانی باشند.

یک سطح مسطح و یک سطح استوانه‌ای مثالی از سطوح ایزومتريک هستند زیرا می‌توانیم سطح استوانه‌ای را روی یک صفحه بگسترانیم.

تناظر بین نقاط با تطابق نقاط در این گسترش معین می‌شود.

می‌توانیم به ایزومتري موضعی یک سطح در نقطه A_1 سطحی دیگر و نقطه‌ای دیگر B_2 اشاره کنیم، اگر همسایگی‌هایی از نقاط روی سطوح باشند که ایزومتر باشند.

دو سطح هموار بطور موضعی ایزومتريک هستند اگر و تنها اگر پارامتری‌سازی‌هایی از سطوح در نقاط متناظر باشند که ضرایب اولین شکل اساسی سطوح منطبق باشند:

$$E_1 = E_2, \quad F_1 = F_2, \quad G_1 = G_2.$$

یک سطح را گسترش پذیر نامیم اگر در هر نقطه به طور موضعی با صفحه ایزومتر باشد. به عبارت دیگر، یک سطح گسترش پذیر است اگر و تنها اگر خمیدگی گاوس در هر نقطه صفر باشد.

سطوح با خمیدگی گاوسی یکبار در مساله یافتن سطوح فضایی از سطح مینیمال با مرز مفروض پدیدار شدند. این مساله مورد علاقه فیزیکی، شکل مفروض با فیلم صابونی روی یک چارچوب سیمی را توصیف می کند. انرژی چنین فیلم صابونی با مساحتش متناسب است و بنابراین شکلی که چنین فیلمی می گیرد، در حقیقت سطحی با مینیمم مساحت است.

۵-۱۰ سطوح دوران

در عمل سطوح دوران بسیار زیادند. فرض کنید سطح از دوران خمی با مشخصه زیر

$$x = \phi(u), \quad z = \psi(u), \quad (52-5)$$

در صفحه xz حول محور z تشکیل شده باشد (شکل ۵-۳ را ببینید):

هنگامی که u ثابت فرض شود به دایره‌ای با مرکز واقع در محور z می‌رسیم؛ این را مدار یومیه می‌نامیم. برای تعریف یک نقطه روی مدار یومیه، زاویه دوران U از صفحه xz را معرفی می‌کنیم. هنگامی که U را ثابت می‌گیریم به نصف النهار خمی مزدوج با خم اولیه (۵۲-۵) می‌رسیم.

به آسانی دیده می‌شود که معادلات سطح دوران متناظر با (۵۲-۵) برابر است با:

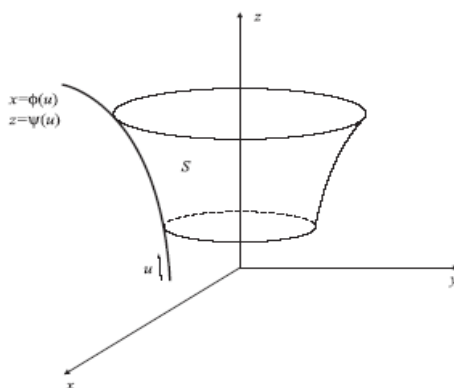
$$x = \phi(u) \cos v, \quad y = \phi(u) \sin v, \quad z = \psi(u).$$

اکنون ضرایب اولین شکل اساسی سطح را می‌یابیم:

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = (\phi' \cos v)^2 + (\phi' \sin v)^2 + \psi'^2 = \phi'^2 + \psi'^2,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = (\phi' \cos v)(-\phi \sin v) + (\phi' \sin v)(\phi \cos v) = 0,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = (-\phi' \sin v)^2 + (\phi \cos v)^2 = \phi^2.$$

شکل ۵-۳ سطح حاصل از دوران حول محور z

توجه کنید که $F = 0$ تعامد شبکه پارمتری سازی است. بنابراین دومین شکل اساسی برابر است با:

$$(ds)^2 = (\phi'^2 + \psi'^2) du^2 + \phi^2 dv^2.$$

برای مولفه های دومین شکل اساسی داریم:

$$L = \frac{\mathbf{r}_{uu} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\psi''\phi' - \phi''\psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}},$$

$$M = \frac{\mathbf{r}_{uv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = 0,$$

9

$$N = \frac{\mathbf{r}_{vv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\psi'\phi}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}}.$$

بنابراین دومین شکل اساسی برابر است با:

$$-d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\psi''\phi - \phi''\psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}} du^2 + \frac{\psi'\phi}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}} du^2.$$

خواهیم دید که $M=0$ ، که به معنی مزدوج بودن خطوط مختصاتی است.^{۱۰} بنابراین خطوط مختصاتی سطح دوران برابر خطوط خمیدگی هستند.

تمرین ۵-۳۷. خمیدگی اصلی سطح دوران را بیابید.

تمرین ۵-۳۸. مطلوب است اولین شکل اساسی (الف) صفحه و (ب) کره.

تمرین ۵-۳۹. مطلوب است اولین و دومین شکل اساسی برای هر یک از سهموی‌های

زیر: (الف) $z = x^2 + y^2$ ، (ب) $z = x^2 - y^2$ ، (پ) $z = x^2$.

برای هر یک از این حالات H و K بیابید.

۵-۱۱ معادلات طبیعی خم

فرض کنید توابع $k_1(s)$ و $k_2(s)$ از پارامتر طبیعی s که روی بازه $[s_0, s_1]$ پیوسته بوده و $k_1(s)$ تابعی مثبت است، وجود دارد. تمایل داریم بدانیم آیا یک خم فضایی وجود دارد که دارای خمیدگی اصلی $k_1(s)$ و تاب $-k_2(s)$ باشد؟ بررسی‌های هندسی نشان می‌دهد که اگر چنین خمی وجود داشته باشد آنگاه این خم در محدوده حرکات صلب به صورت یکتا تعیین می‌شود. این بدان معنا است که اگر دو خم این چنینی داشته باشیم، انتقال آنها در فضا و سپس جابه‌جایی و دوران یکی از آنها به گونه‌ای که نقاط ابتدایشان و کنج‌های آن نقاط برهم منطبق باشد، کلیه نقاط خم‌ها نیز برهم منطبق هستند.

^{۱۰} چیزی همانند ضرب داخلی برداری برای هر شکل مربعی متقارن و بنابراین چیزی وابسته به تعامد

وجود دارد. جهت‌های مزدوج در هر نقطه به عنوان جهت‌هایی روی سطح $du:dv$ و $\delta u:\delta v$ به گونه‌ای که $Ldu\delta u + M(duv + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0$ تعریف می‌شود. خطوط مختصاتی مزدوج آنهایی هستند که در هر نقطه مزدوج باشند.

اکنون نشان دهیم که چنین خمی وجود دارد. پس شکل خم‌ها به صورت $k_1(s)$ و $k_2(s)$ به صورت یکتا تعریف می‌شوند؛ این باعث برانگیختن ما می‌شود تا دو تابع $k_1 = k_1(s)$ و $k_2 = k_2(s)$ را معادلات طبیعی خم بنامیم. اکنون خم مورد نظر را از تفسیر مقادیر $k_1(s)$ و $k_2(s)$ به دست می‌آید. برای این منظور دستگاه معادلات دیفرانسیلی که جایگزین فرمول بردار مماسی و معادلات فرنه-سره است، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \mathbf{x}, \\ \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= k_1(s)\mathbf{y}, \\ \frac{d\mathbf{y}}{ds} &= -k_1(s)\mathbf{x} - k_2(s)\mathbf{z}, \\ \frac{d\mathbf{z}}{ds} &= k_2(s)\mathbf{y}.\end{aligned}\tag{۵۳-۵}$$

این معادلات بر حسب مولفه‌های دکارتی به صورت دستگاهی از ۱۲ معادله دیفرانسیل خطی معمولی نوشته می‌شود. نظریه ODE بیان می‌کند که اگر مقدار اولیه برای تمام متغیرها معلوم باشد (مساله کوشی)، در این صورت دستگاه دارای جوابی یکتا است. شرایط اولیه دلخواهی برای $\mathbf{r}(s_0)$ می‌توان انتخاب کرد. مقادیر اولیه $\mathbf{x}(s_0), \mathbf{y}(s_0), \mathbf{z}(s_0)$ باید کنج متعامد راستگرد $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ را بسازد. بنابراین روی $[s_0, s_1]$ جواب یکتای $(\mathbf{r}(s), \mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s), \mathbf{z}(s))$ از معادلات (۵۳-۵) که در برخی از شرایط اولیه ثابت صدق می‌کند، وجود دارد. به دلیل تقارن کج ماتریس سه معادله آخر (۵۳-5)،

$$\begin{vmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ -k_1(s) & 0 & -k_2(s) \\ 0 & k_2(s) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

می‌توان نشان داد که بردارهای $(\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s), \mathbf{z}(s))$ چارچوب متعامد یکه‌ای را تشکیل می‌دهند با جهتی شبیه به نقاط اولیه روی کل قطعه $[s_0, s_1]$.

عبارت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ را می توان به عنوان معادله خم مورد نظر با پارامتر سازی طبیعی بررسی کرد. در نتیجه اولین معادله (۵-۵۳) بیان می کند که $\mathbf{x}(s)$ مماس یکه آن است. با مقایسه معادله $dx/ds = k_1(s)\mathbf{y}$ با اولین معادله فرنه- سره برای خم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ می توان دید که $\mathbf{y}(s)$ بردار عمودی اصلی بوده و $k_1(s)$ خمیدگی اصلی آن است. به طور مشابه می توان به دست آورد که $\mathbf{z}(s)$ بردار عمودی دوم خم و $k_2(s)$ تاب آن است. پس دلایل مورد نیاز کامل گردید.

معادلات طبیعی برای هر خم مسطح به یک معادله تکین خمیدگی کاهش می یابد. در صفحه به خمیدگی علامتی جبری نسبت می دهیم. شرط مثبت بودن خمیدگی $k(s)$ الزامی نیست.

معادله طبیعی خم در صفحه

خم مسطح دارای تاب صفر است. اکنون چگونگی بازسازی خمی با خمیدگی $k(s)$ که تابعی بر حسب پارامتر s است را بررسی می کنیم. نقطه اولیه خم متناظر با $s = s_0$ را به کمک معادله زیر ثابت می گیریم:

$$\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{r}_0. \quad (۵-۵۴)$$

همچنین باید جهت خم در این نقطه را ثابت فرض کنیم. در اینجا معرفی زاویه $\phi = \phi(s)$ ، مابین یکه مماس به خم و بردار $\mathbf{i}$ که $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ پایه متعامد در صفحه است، مفید است. در این روش بردار یکه مماس توسط فرمول زیر داده می شود:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i} \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi.$$

بنابراین برای تعریف جهت اولیه خم، معرفی می کنیم:

$$\phi(s_0) = \phi_0. \quad (۵-۵۵)$$

معادله ارتباط τ و ν که برابر $d\tau/ds = k(s)\nu$ است به صورت زیر تبدیل می شود:

$$(-i \sin \phi + j \cos \phi) \frac{d\phi}{ds} = k(s)\nu.$$

بردار $-i \sin \phi + j \cos \phi$ دارای اندازه واحد بوده و به τ عمود است. بنابراین موازی ν است و نتیجه می گیریم:

$$|k(s)| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|.$$

با قرار دادن

$$k(s) = \frac{d\phi}{ds},$$

علامت $k(s)$ را به شیوه‌ای استاندارد تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $k(s)$ برای نقاطی که به سمت بالا تحذب دارند مثبت است.

می‌توانیم از معادله اخیر انتگرال گرفته و به‌دست آوریم:

$$\phi(s) - \phi_0 = \int_{s_0}^s k(t) dt.$$

با داشتن $\phi(s)$ ، می‌توانیم از معادله برای مماس یک انتگرال بگیریم. این انتگرال $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \tau$ بوده که به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{i} \cos \phi(s) + \mathbf{j} \sin \phi(s).$$

انتگرال نسبت به s به‌دست می‌دهد:

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0 = \int_{s_0}^s [\mathbf{i} \cos \phi(t) + \mathbf{j} \sin \phi(t)] dt. \quad (5-56)$$

به کمک (5-56)، تابع $k(s)$ و مقادیر اولیه (5-54) و (5-55) به‌طور یکتا خم مورد نظر $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ را تعریف می‌کنند. با تغییر مقادیر اولیه خم، خانواده‌ای از خم‌ها با $k(s)$ یکسان به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که خم‌ها دارای شکل یکسانی بوده اما نسبت به محورهای مختصات دارای موقعیت‌های متفاوتی هستند.

تمرین ۵-۴۰. خمیدگی $k(s) = (as)^{-1}$ از خم یک مسطح داده شده است، این خم را بیابید.

۵-۱۲ سخنی در باب دقت

هدف اصلی این کتاب معرفی ابزار و فرمول‌هایی از آنالیز تانسوری است که در عمل به آنها نیاز داریم. روش ما همانند کتاب‌های مهندسی است؛ به ندرت گزاره‌های واضحی از

فرضیات که ضامن اعتبار فرمول‌ها است را پیشنهاد داده اما به جای آن فرض می‌شود که در عمل تمام توابع، خم‌ها، سطوح، ... باید برای مقاصد مورد نظر هموار باشند. این روش شاید برای هر کاربری که می‌خواهد فرمول‌هایی ساده‌ای را در اختیار داشته باشد، بهتر است. اما در فیزیک سطوحی وجود دارد که الزاما برای جسم به‌عنوان مرزی واقعی شناخته نمی‌شود؛ سطوح ریاضیات محض از قبیل آنهایی که توصیف کننده انرژی دستگاه دو پارامتری هستند، می‌تواند وجود داشته باشد. چنین سطحی می‌تواند بسیار پیچیده بوده و نقاط تکین آن به علت اینکه آنها نشان دهنده تغییرات دستگاه و رفتار بحرانی هستند، برای فیزیکدان‌ها بسیار جذاب است. هر خواننده علاقمند به چنین کاربردهایی می‌تواند برای هر نتیجه اصلی که به‌عنوان قضیه‌ای با فرضیات ممکن ضعیف‌تر بیان می‌شود، فلسفه رفتاری آن را مطالعه کند. در بیشتر این قبیل روش‌ها از ابزارهای بی‌سار پیشرفته استفاده می‌شود (به عنوان مثال روش‌های توپولوژیکی).

به هر حال خواننده باید بداند که حتی در سطح مقدماتی این روش‌ها، سوالاتی وجود دارد که به توضیحات زیادی نیاز است. به‌عنوان مثال تعریف طول هم خم یا مساحت سطح را چگونه می‌توان بیان کرد؟

در آموزش‌های قبلی چگونگی اندازه‌گیری طول هر قطعه یا مجموعه پیچیده‌تر روی خط راست را یاد گرفتیم. همچنین نحوه پیدا کردن محیط دایره را آموختیم. برای این منظور یک مثلث متوازی الاضلاع بر دایره محاط کرده و محیط آن را به‌دست می‌آوریم. با دو برابر کردن تعداد اضلاع مثلث محاطی به چند ضلعی محاطی می‌رسیم که محیط آن تقریبی برای محیط دایره است. با دو برابر کردن تعداد اضلاع تا بی‌نهایت و محاسبه حد محیط آنها می‌توان طول مورد نظر را با مقدار این حد برابر دانست. البته چنین نوع حدگیری هنگام استفاده می‌شود که فرمول زیر را برای محاسبه طول خم در نظر بگیریم:

$$\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (5-57)$$

در اینجا پاره خط $[a, b]$ را با نقاط $t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b$ به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم کرده و بردار زیر را رسم می‌کنیم:

$$\Delta \mathbf{r}(t_i + 1) = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i).$$

در این روش، چند ضلعی را درون خم "محاط" می‌کنیم. برای تابع برداری مشتق پذیر $\mathbf{r}(t)$ ، طول اضلاع چند ضلعی را می‌توان به کمک قضیه مقدار میانگین به دست آورد:

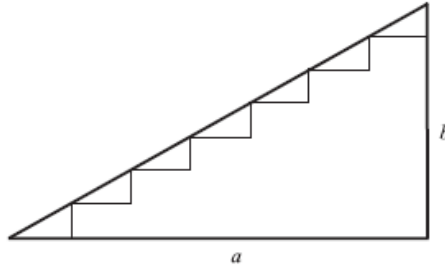
$$|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)| = |\mathbf{r}'(\xi_{i+1})|(t_{i+1} - t_i),$$

در اینجا ξ_{i+1} نقطه‌ای در $[t_i, t_{i+1}]$ است. بنابراین محیط چند ضلعی محاطی که تقریبی برای طول خم است با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n |\mathbf{r}'(\xi_{i+1})|(t_{i+1} - t_i).$$

وقتی که تعداد نقاط افراز به سمت بی‌نهایت میل کند، در حالی که بیشینه طول قطعات افراز به سمت صفر میل کند، معادله (۵-۵۷) از حدگیری به دست می‌آید.

هر چند به نظر خوب می‌رسد، در بطن این فرآیند مفهومی از تقریب یک قطعه کوچک از خم توسط چند ضلعی‌ها با اضلاع زیاد است. شهودمان می‌گویند که هر چه اضلاع کوچک شود، خم به چند ضلعی نزدیک‌تر می‌شود، از اینرو محیط آن تقریب بسیار نزدیکی برای طول خم است. اما در هندسه مقدماتی می‌توان نشان داد که جمع اضلاع مثلث قائم الزاویه برابر وتر است. ساختار این شرح به صورت زیر است. فرض کنید مثلث قائم الزاویه‌های با اضلاع زاویه قائمه a و b مفروض باشد. اکنون خمی شبیه به دندانه های اره در نظر می‌گیریم. وتر را با دنباله‌ای از مثلث‌های کوچک مشابه با مثلث داه شده جایگزین می‌کنیم. (در شکل ۵-۴). واضح است که جمع اضلاع قائمه دندانه‌های اره بستگی به تعداد دنده ها ندارد و برابر $a+b$ است. اما همانطوری که تعداد دندانه‌ها به بی‌نهایت میل می‌کند، اضلاع اره بر وتر مثلث اصلی منطبق می‌شود. بنابراین حد طول برابر طول وتر c است و خواهیم داشت $c = a+b$. بنابراین استنباط می‌شود که همیشه نمی‌توان خم را به وسیله چند ضلعی‌های دلخواه تقریب زد. تذکر مشابهی برای تقریب محاسبه یک سطح وجود دارد.



شکل ۴-۵ سفسطه تقریب طول یک خط

این تذکرات هشداري است که نشان می‌دهد کاربرد درست فرمول مستلزم شرایطی که تحت آنها این فرمول‌ها استخراج می‌شوند.

۵-۱۳ نتیجه‌گیری

هندسه دیفرانسیل بوسیله نتایج و فرمول‌ها موضوعی بسیار توسعه یافته است. فرمول‌های فنی اصلی مورد نیاز در کاربرها را معرفی می‌کنیم. خواننده علاقمند می‌تواند بخش‌های مختص به نظریه خم‌ها، سطوح و خمینه‌ها را مطالعه نماید. چنین مطالعه مفصلی خارج از حوصله این کتاب است.

۵-۱۴ مسایل

۵-۱ مطلوب است پارامتری‌سازی و نقاط تکین خم مسطح

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = |a|^{\frac{2}{3}},$$

که در اینجا a یک پارامتر است.

۵-۲ مطلوب است نقاط تکین خم مسطح داده شده توسط معادلات

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(t - \cos t),$$

که در اینجا a یک پارامتر است.

۵-۳ مطلوب است معادله خط مماس در نقطه $(0,1)$ بر خم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x$$

۴-۵ طول ستاره‌گون زیر را بیابید.

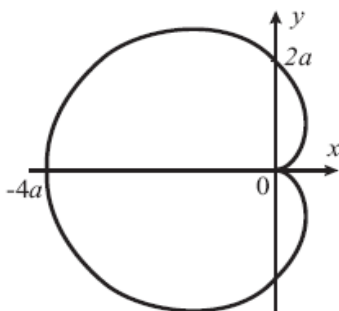
$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

۵-۵ طول یک قسمت از چرخ زاد زیر را بیابید.

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

۶-۵ طول دلگون داده شده زیر را در دستگاه مختصات قطبی بیابید.

$$\rho = 2a(t - \cos \phi).$$



شکل ۵-۵ دلگون

۷-۵ طول قسمتی از خم زیر که بین $t = 0$ و $t = T$ است را بیابید.

$$x = a \cosh t, \quad y = a \sinh t, \quad z = at$$

۸-۵ خمیدگی خم زیر را بیابید.

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4 \sin \frac{t}{2}.$$

۹-۵ خمیدگی و تاب خم زیر را در هر نقطه دلخواه بیابید.

$$x = a \cosh t, \quad y = a \sinh t, \quad z = at$$

۱۰-۵ تاب خم زیر را در هر نقطه دلخواه بیابید.

$$x = a \cosh t \cos t, \quad y = a \cosh t \sinh t, \quad z = at$$

۵-۱۱ فرض کنید سه تایی بردارهای متعامد $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)$ (یعنی بردارهای صادق در $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$) در امتداد خم داده شده باشند. نشان دهید:

$$\frac{d}{ds} \mathbf{e}_i(s) = \mathbf{d} \times \mathbf{e}_i(s)$$

که در اینجا

$$\mathbf{d} = -\frac{1}{2}(\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}_i).$$

توجه داشته باشید که این فرمول‌ها مشابه معادله فرنه-سره با بردار داربوکس δ هستند.

۵-۱۲ فرض کنید $\mathbf{Q}(s)$ تانسور متعامد در امتداد خم باشد. فرمول زیر را بررسی کنید:

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{d} \times \mathbf{Q}, \quad \mathbf{d} = -\frac{1}{2}(\mathbf{Q}' \times \mathbf{Q}^T)_\times.$$

۵-۱۳ دومین شکل مربعی سطح داده شده توسط معادلات زیر را بیابید:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sinh v, \quad z = v.$$

۵-۱۴ سطحی با معادله $z = (x, y)$ تعریف شده است. نشان دهید که ضرایب دومین شکل اساسی آن برابر است با:

$$b_{11} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad b_{22} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

۵-۱۵ سطحی با معادله $z = (x, y)$ تعریف شده است، به طوری که f در معادله لاپلاس $\nabla^2 f = 0$ صدق می‌کند. توضیح دهید که خمیدگی گaus آن در رابطه $K \leq 0$ صادق است.

۵-۱۶ نشان دهید که خمیدگی میانگین سطح $z = (x, y)$ توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$H = \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} f|^2}} \right),$$

جایی که

$$\text{grad} = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

۵-۱۷ نشان دهید که خمیدگی میانگین سطح توسط رابطه $H = -\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{n}/2$ داده می‌شود.

۵-۱۸ نشان دهید $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 2H \mathbf{n}$ ، که در اینجا $\mathbf{A} = \mathbf{E} - \mathbf{m}$.

۵-۱۹ فرض کنید $\mathbf{X}$ تانسور مرتبه دوم باشد. نشان دهید $\mathbf{n} \cdot (\tilde{\nabla} \times \mathbf{X}) = -\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{X})$.

۵-۲۰ خمیدگی گاوس سطح داده شده توسط رابطه زیر را بیابید.

$$z = f(x) + g(y).$$

۵-۲۱ اولین شکل اساسی سطحی برابر $A^2 du^2 + B^2 dv^2$ است. خمیدگی گاوس این سطح را بیابید.

۵-۲۲ فرض کنید $\mathbf{X}$ تانسور مرتبه دوم باشد. مشابه قضیه گاوس-استروگراسکی، ثابت کنید که در سطح S با مرز شمارنده Γ داریم:

$$\int_S (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{X} + 2H \mathbf{n} \cdot \mathbf{X}) dS = \oint_{\Gamma} \nu \cdot \mathbf{X} ds, \quad (58-5)$$

جایی که ν بردار قائم یک‌ه خارجی به Γ در صفحه مماس قرار دارد. یعنی $\nu \cdot \mathbf{n} = 0$. توجه کنید که وقتی S سطح بسته باشد آنگاه:

$$\int_S \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{X} dS = - \int_S 2H \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} dS.$$

۵-۲۳ ثابت کنید (۵۸-۵) برای میدان تانسور $\mathbf{X}$ با هر مرتبه‌ای برقرار است.

۵-۲۴ با بکارگیری جواب تمرین قبل ثابت کنید که

$$\begin{aligned} \int_S (\tilde{\nabla} \mathbf{X} + 2H \mathbf{n} \mathbf{X}) dS &= \oint_{\Gamma} \nu \mathbf{X} ds, \\ \int_S (\tilde{\nabla} \times \mathbf{X} + 2H \mathbf{n} \times \mathbf{X}) dS &= \oint_{\Gamma} \nu \times \mathbf{X} ds, \end{aligned}$$

9

$$\int_S \tilde{\nabla} \times (\mathbf{n} \mathbf{X}) dS = \oint_{\Gamma} \tau \mathbf{X} ds,$$

جایی که $\tau = \nu \times \mathbf{n}$ بردار یک‌ه مماس به Γ است.

فصل ۶: کشسانی خطی

در این فصل از آنالیز تانسوری برای کشسانی خطی استفاده می‌کنیم. کشسانی خطی یک ابزار قوی برای مهندسی است، که با استفاده از برنامه‌های کامپیوتری عام، مهندسين می‌توانند تنش و کشش درون جسمی با کشسانی پیچیده تحت بارگذاری را محاسبه کنند.

یادگیری اصولی که در پس این محاسبات وجود دارد، بسیار سودمند است. اساس کشسانی خطی بر مبنای مکانیک است، اما ابزارهای تکنیکی آن بر پایه آنالیز تانسوری است. تشریح تغییر شکل کوچکی از کشسانی اجسام توسط معادلات ساختاری خطی که وابسته به تنش‌ها و کشش‌ها است، انجام می‌گیرد که شکل بسط یافته‌ای از قانون مقدماتی هوک برای فنر می‌باشد.

کشسانی خطی گام اول (گامی مقدماتی، اما نه ساده) مکانیک غیر خطی است. در جامدات اثرهای دیگری، همانند انتشار گرما، تغییر شکل متناسب با اثرهای مغناطیسی یا پیزومغناطیسی و غیره در نظر گرفته می‌شود. بنابراین می‌طلبند که از ترمودینامیک و علوم دیگر فیزیک نیز کمک گرفت.

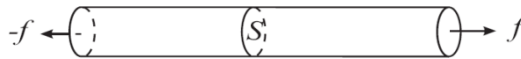
هدف این فصل معرفی ابزارهای اصلی و قوانین کشسانی خطی است، که بر مبنای آن برخی از خواص مقادیر مرزی مربوط به مسایل کشسانی فرمول بندی شده و همچنین برخی اصول تغییر پذیر در کشسانی کاربردی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بحث خود را با ایده تانسور تنش که توسط Augustin Louis Cauchy (۱۷۸۹-۱۸۵۷) معرفی گردید، آغاز می‌کنیم.

۶-۱ تانسور تنش

مفهوم تنش در مکانیک پیوسته بسیار مهم است. این یک تعمیمی از مفهوم فشار بوده و به عنوان نسبت نیروی توزیع شده بر روی جزء سطح مقدماتی به مساحت آن جزء تعریف می شود. برای مثال یک میله استوانه ای باریک و بلند با سطح مقطع S را در نظر گرفته و آن را تحت نیروی f که توزیع یکنواختی بر روی وجه های استوانه دارد، قرار دهید (شکل ۶-۱). این نیرو بر روی هر سطح مقطع میله به طور یکنواخت است. تنش σ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma = f / S.$$

در فیزیک مقدماتی فشار تنها مشخصه نیروی است که بر یک نقطه از مایع یا گاز وارد می شود. اما فشار برای توصیف عملکرد نیروهای درونی یک جسم جامد سه بعدی، کافی نمی باشد. برای یک نقطه خاص از این جسم، می بینیم که جهت نیروی تماسی نمی تواند بر سطح آن جزء عمود باشد. علاوه بر این، همانطوری که جهت سطح را تغییر دهیم، اندازه و جهت چگالی نیروی وارد در عرض آن جزء نیز می تواند تغییر کند.



شکل ۶-۱ تنش $\sigma = f / S$ در میله ای با سطح مقطع S و نیروی کشش f

نیروها

اکنون شرایط تعادل یک جسم تغییر شکل پذیر را مورد بحث قرار می دهیم. از مکانیک کلاسیک می دانیم که شرایط تعادل برای یک جسم صلب از معادلات برداری تشکیل شده است. اول، برابری نیروهای وارد (یعنی، جمع تمام نیروهای وارد) بر جسم، باید صفر باشد. دوم، برابری گشتاور (مجموع گشتاورهای تمام نیروهای وارد نسبت به برخی نقاط) بایستی صفر باشد. می نویسیم

$$\sum_k \mathbf{f}_k = \mathbf{0}, \quad \sum_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{f}_k = \mathbf{0}, \quad (1-6)$$

جایی که $\mathbf{f}_k$ بیان کننده نیروی وارد بر نقطه‌ای که با بردار مکان $\mathbf{r}_k$ نشان داده می‌شود. بردار مکان به‌طور دلخواه انتخاب می‌شود، اما گشتاور متناظر با ایت نقطه ثابت است. برای تعریف تعادل یک جسم تغییر پذیر، معادلات تعادل جسم صلب را برای هر قسمت از جسم تغییر شکل پذیر به‌کار می‌بریم. این مطلب را به‌عنوان یک اصل به‌صورت زیر می‌پذیریم:

اصل استحکام. در حالت تعادل، هر قسمت از جسم تغییر شکل پذیر از معادلات تعادل پیروی می‌کند، به‌طوری‌که بتوان آن‌را به‌صورت یک جسم صلب تحت (۱) کنش تمام نیروهای خارجی، (۲) نیروی واکنش وارده از قسمت‌های دیگر جسم مورد بررسی، در نظر گرفت.

این اصل به‌طور مستقیم از مکانیک کلاسیک استنتاج نمی‌شود. هرچند، این یک نوع اصل است که به ما اجازه می‌دهد تا نتایج مکانیک کلاسیک را برای اجسام تغییر شکل به‌کار ببریم (برای اجسام غیر تغییر شکل پذیر به‌دست آمده است). از اصطلاحات تخصصی زیر استفاده خواهیم کرد. هر جسم جامد حجم مشخصی را در فضای سه بعدی اشغال می‌کند. نگاهی که تمام نقاط مادی آن‌را به نقاط فضایی می‌برد، ترکیب بندی جسم نامیده می‌شود. به‌طور غیر دقیق، می‌توان گفت که این موضوع، هندسه جسم در فضا را تشریح می‌کند. اگر جسمی تحت فشار نباشد، ترکیب بندی به‌صورت ترکیب بندی اولیه یا مرجع بیان می‌شود. برای جسم در حال تعادل تغییر شکل یافته که تحت فشار است، ترکیب بندی به‌صورت ترکیب بندی واقعی بیان می‌شود.

حال اصل استحکام را برای ترکیب بندی واقعی یک جسم تغییر شکل پذیر که در حال تعادل است به‌کار می‌بریم. قسمت دلخواه $\mathcal{P}$ را همانند آنچه در شکل ۶-۲ نمایش داده شده در نظر می‌گیریم. دو نوع نیرو به $\mathcal{P}$ وارد می‌شود. اولین آن‌ها عبارت است از نیروی جسم. این نیروها به‌صورت درونی به $\mathcal{P}$ اثر کرده و به شرایط موجود بروی سطح مرزی $\mathcal{P}$ وابسته نیستند. نیروی گرانش مثالی از این نیروهاست. دومین نوع این نیروها، نیروهای تماسی هستند. این نوع نیروها به روی مرز $\mathcal{P}$ اثر و توسط نیروی عکس‌العمل از قسمت‌های دیگر جسم به $\mathcal{P}$ وارد می‌شود. این نیروها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند. تصور کنید سطح $\mathcal{P}$ را از جسم جدا و اثرهای باقیمانده از جسم را با برخی از نیروها

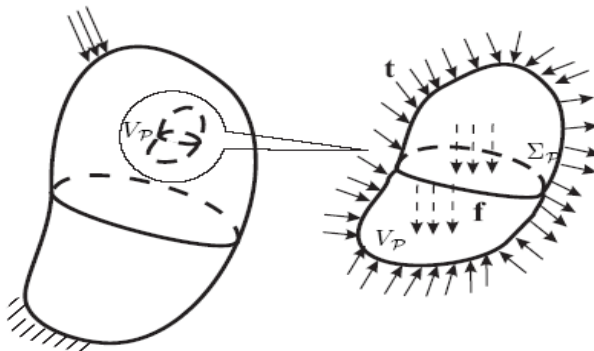
جایگزین کنیم. این عکس‌العمل‌ها به آن قسمت از مرز که در تماس با باقیمانده جسم هستند، به کار گرفته می‌شود (درنتیجه عبارت "نیروهای تماسی"). بعلاوه نیروهای سطح می‌تواند بر روی مرز خارج کل جسم اثر کند. این نیروها به همراه نیروهای جسم به عنوان نیروهای خارجی در نظر گرفت می‌شوند. طبق این اصل، وقتی P به صورت یک جسم در مکانیک کلاسیک در نظر گرفته شود، باید در اثر وارد شدن تمام نیروها به حالت تعادل قرار داشته باشد. (مکانیک پیوسته دیدگاه دیگری پیش روی ما قرار می‌دهد، به گونه‌ای که عکس‌العمل‌های ناشی از قسمت‌های دیگر به همان خوبی روی جسم به دست می‌آیند). اما این دیدگاه در مهندسی مدرن عملی به کار گرفته می‌شود. پس نیروی کل وارد بر P برابر است

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{f}_B(P) + \mathbf{f}_C(P),$$

که در آن زیرنویس‌های B و C به ترتیب دلالت بر نیروی جسم و تماس دارند. برای مشخص نمودن توزیع نیروها، چگالی نیرو را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{f}_B(P) = \int_{V_P} \mathbf{f} \rho dV, \quad \mathbf{f}_C(P) = \int_{\Sigma_P} \mathbf{t} d\Sigma,$$

که V_P حجم فضای P ، $\Sigma_P = \partial V_P$ مرز P و ρ چگالی (ویژه) مواد تشکیل دهنده جسم است. چگالی $\mathbf{t}$ بر حسب بعدهای نیرو بر واحد سطح و همچنین $\mathbf{f}$ بر حسب همان نیروها بر واحد جرم بیان می‌شود. تاکید می‌شود که این‌ها به صورت ترکیب‌بندی واقعی تعریف شده‌اند. کمیت $\mathbf{t}$ بردار تنش نامیده می‌شود.



شکل ۶-۲ نیروهای وارد بر قسمت V_P از جسم

معادلات تعادل از محیط پیوسته

با استفاده از اصل استحکام، معادله تعادل ۶-۱ برای جسم صلب، با دو شرط زیر برای جسم تغییر شکل پذیر تبدیل می‌شود.

۱. برآیند نیروهای وارد بر هر قسمت $\mathcal{P}$ برابر صفر است:

$$\int_{V_p} \mathbf{f} \rho dV + \int_{\Sigma_p} \mathbf{t} d\Sigma = 0 \quad (۲-۶)$$

۲. برآیند گشتاور تمام نیروهای وارد بر هر قسمت $\mathcal{P}$ برابر صفر است:

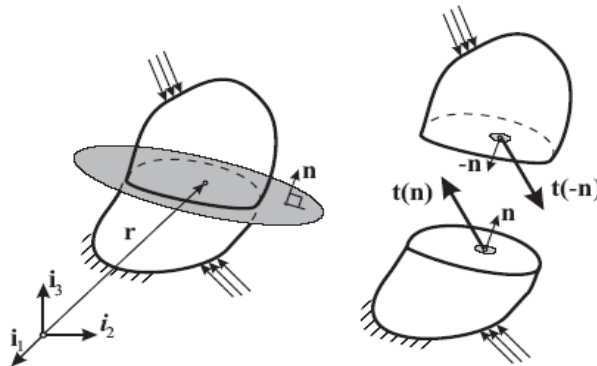
$$\int_{V_p} \{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \rho\} dV + \int_{\Sigma_p} \{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{t}\} d\Sigma = 0, \quad (۳-۶)$$

که $\mathbf{r}$ نمایشگر یک نقطه مادی و $\mathbf{r}_0$ یک نقطه مرجع ثابتی می‌باشند. خواننده می‌تواند با استفاده از ۶-۲ نشان دهد که ۶-۳ به انتخاب $\mathbf{r}_0$ بستگی ندارد.

توجه کنید که کاملاً دلخواه نبوده، اما این به‌گونه‌ای است که عمل انتگرال‌گیری روی $\mathcal{P}$ با معنی است.

تانسور تنش

به‌طور کلی بردار تنش به موقعیت $\mathbf{r}$ هر ذره و بردار $\mathbf{n}$ عمود بر جزء سطح جسم بستگی دارد. همواره بردار عمود بر هر قسمت از سطح مورد بررسی را به سمت خارج می‌گیریم.



شکل ۶-۳ برهم کنش دو قسمت از جسم

در مکانیک پیوسته، قانون سوم نیوتن به صورت جفت عمل-عکس العمل، بنام لم کوشی خوانده می شود و به صورت رابطه زیر بیان می شود.

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{r}, -\mathbf{n}). \quad (۴-۶)$$

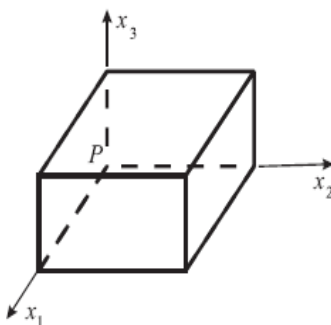
فرمول (۴-۶) بر هم کنش قسمت های تماسی جسم را که در شکل ۳-۶ نمایش داده شده، توصیف می کند. لم کوشی اجازه تعریف تانسور تنش را به صورت توصیفی از وابستگی $\mathbf{t}$ به $\mathbf{n}$ می دهد، که $\mathbf{n}$ بردار عمود بر جزء سطح در هر نقطه است. در ادامه قضیه کوشی را بیان می کنیم.

اما ابتدا با استفاده از (۲-۶) شرط تعادل را در حالت دیفرانسیلی آن به دست می آوریم. یک نقطه دلخواه P را در حجم V جسم ثابت در نظر گرفته و این نقطه را به عنوان راس متوازی السطوحی Π که وجه آن صفحات دستگاه مختصات دکارتی همانند شکل ۴-۶ قرار می دهیم. بنابراین بردارهای عمود بر این وجه ها در امتداد بردارهای یک متعامد $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ هستند.

اکنون بردار تنش $\mathbf{t}(\mathbf{i}_k)$ را می توان بر روی هر وجه بر حسب بردار عمود $\mathbf{n}$ به صورت زیر بسط داد:

$$\mathbf{t}(\mathbf{i}_k) = t_{ks} \mathbf{i}_s. \quad (۵-۶)$$

یعنی، t_{ks} مولفه های $\mathbf{t}(\mathbf{i}_k)$ بر حسب بردار پایه $\mathbf{i}_s$ است.



شکل ۴-۶ متوازی السطوح Π

قضیه ۶-۱. معادله دیفرانسیل

$$\rho \mathbf{f} + \frac{\partial t_{ks}}{\partial x_k} \mathbf{i}_s = 0, \quad (۶-۶)$$

که به عنوان معادله تعادل شناخته می شود، در حجم V برقرار است. اثبات. معادله (۶-۲) برای متوازی السطوح Π برابر است با

$$\int_{V_{\Pi}} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\Sigma_{\Pi}} \mathbf{t} d\Sigma = 0.$$

انتگرال سطح بر روی وجه های Π گرفته می شود که $\mathbf{i}_k$ بردار عمود بر هر کدام از آنها هست. برای وجهی با بردار عمود $\mathbf{n} = \mathbf{i}_k$ ، داریم $\mathbf{t}(\mathbf{i}_k) = n_k t_{1s} \mathbf{i}_s$ ، که n_k و دو مولفه دیگر $\mathbf{n}$ برابر صفر هستند. بردار عمودی وجه مقابل برابر $-\mathbf{i}_k$ است، بنابراین $n_k = -1$ و مولفه های دیگر صفر هستند. با استفاده از لم کوشی (۶-۴) داریم $\mathbf{t}(-\mathbf{i}_k) = -\mathbf{t}(\mathbf{i}_k)$ ، که در نتیجه $\mathbf{t}(-\mathbf{i}_k) = n_k t_{1s} \mathbf{i}_s$. بنابراین معادله بالا به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\int_{V_{\Pi}} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\Sigma_{\Pi}} n_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma = 0.$$

با بکار گیری (۴-۴۱) برای انتگرال سطح به دست می آوریم:

$$\int_{\Sigma_{\Pi}} n_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma = \int_{V_{\Pi}} \frac{\partial t_{ks}}{\partial x_k} \mathbf{i}_s dV \quad (۷-۶)$$

و در نتیجه

$$\int_{V_{\Pi}} \left(\rho \mathbf{f} + \frac{\partial t_{ks}}{\partial x_k} \mathbf{i}_s \right) dV = 0. \quad (۸-۶)$$

انتگرالده (۸-۶) به صورت تابع پیوسته فرض می شود. چون راس P از Π ثابت است و Π به طور کاملاً اختیاری کوچک فرض می شود. پس باید معادله دیفرانسیل (۶-۶) در P برقرار باشد. چون P اختیاری است پس (۶-۶) در حجم V برقرار است. تمرین ۶-۱. با انتگرال گیری مستقیم طرف راست رابطه (۷-۶) را ثابت کنید. اکنون فرمول بندی می کنیم.

قضیه ۶-۲ (کوشی). در هر نقطه از جسم، وابستگی $\mathbf{t}$ به $\mathbf{n}$ ، قائم به سطح جزیی در یک نقطه خطی است:

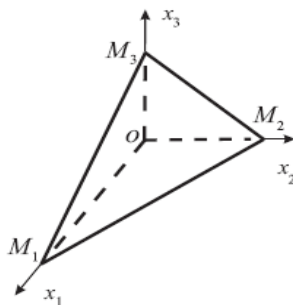
$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

در اینجا $\boldsymbol{\sigma}$ تانسور مرتبه دوم وابسته به نقطه است که آنرا تانسور تنش کوشی می‌نامند.

اثبات. چهار وجهی T با راس O در نقطه ثابت و اختیاری از V مانند شکل ۵-۶ را می‌سازیم. با به کارگیری (۶-۲) به T داریم:

$$\int_{V_T} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\Sigma_T} n_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma + \int_{M_1 M_2 M_3} \mathbf{t}(\mathbf{n}) d\Sigma = \mathbf{0}, \quad (9-6)$$

جایی که V_T حجم چهاروجهی است، Σ_T بخشی از مرز چهاروجهی است که از وجه‌های موازی محورهای مختصات تشکیل شده است و $M_1 M_2 M_3$ وجه داخلی است. روی وجهی که بر $\mathbf{i}_k$ عمود است، نمایش $\mathbf{t}(\mathbf{i}_k) = n_k t_{ks} \mathbf{i}_s$ برگرفته از اثبات قضیه قبل را به کار می‌بریم.



شکل ۵-۶ چهار وجهی T

با به کارگیری (۶-۶) می‌توان (۹-۶) را به تساوی زیر تبدیل کرد:

$$\int_{V_T} \frac{\partial t_{ks}}{\partial x_k} \mathbf{i}_s dV = \int_{\Sigma_T} n_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma + \int_{M_1 M_2 M_3} \mathbf{t}(\mathbf{n}) d\Sigma.$$

یک نتیجه از (۴-۴۱) برای $V = V_T$ برابر است با:

$$\int_{V_T} \frac{\partial t_{ks}}{\partial x_k} \mathbf{i}_s dV = \int_{\Sigma_T} n_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma + \int_{M_1 M_2 M_3} n_k t_{ks} \mathbf{i}_s d\Sigma.$$

با مقایسه نامساوی اخیر، خواهیم داشت:

$$\int_{M_1 M_2 M_3} (\mathbf{t}(\mathbf{n}) - n_k t_{ks} \mathbf{i}_s) d\Sigma = 0.$$

با توجه به اینکه چهار وجهی در نقطه اختیاری و کوچک O است، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) - n_k t_{ks} \mathbf{i}_s = 0.$$

باتوجه به اینکه $M_1 M_2 M_3$ می‌تواند دارای جهت‌دهی دلخواه باشد، این تساوی برای هر و همچنین برای هر نقطه از V برقرار است.

نشان داده‌ایم که بستگی $\mathbf{t}$ به $\mathbf{n}$ خطی است. همانطوری که می‌دانیم (۳-۲)، یک بستگی خطی بین دو بردار توسط یک تانسور مرتبه دوم خطی که با σ نمایش داده می‌شود ارایه می‌گردد:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \sigma. \quad (۱۰-۶)$$

اثبات کامل است.

با توجه به اثبات قضیه کوشی، خواهیم دید که مولفه‌های ماتریس (t_{sk}) برابر مولفه‌های ماتریس تانسور تنش در دستگاه دکارتی است:

$$\sigma = t_{sk} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s.$$

برای برقراری تناظر بین مفهوم‌های σ و مولفه‌هایش، t_{sk} را به σ_{sk} تغییر داده و می‌نویسیم:

$$\sigma = \sigma_{sk} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s.$$

هر اندیس پایین از σ_{sk} دارای معنی هندسی بخصوصی است. اولین زیرنویس به عنصر سطح با قائم $\mathbf{i}_k$ اختصاص دارد، درحالی که دوی به جهت تصویر بردار تنش روی $\mathbf{i}_s$ اختصاص دارد. برای مثال، σ_{31} تصویر $\mathbf{t}(\mathbf{i}_3)$ روی محور x_1 بوده و بردار تنش $\mathbf{t}(\mathbf{i}_3)$ که روی سطح جزیی عمل می‌کند دارای بردار قائم $\mathbf{i}_3$ است.

اکنون به معادله تعادل باز می‌گردیم. به آسانی دیده می‌شود که این معادله

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} = 0 \quad (۱۱-۶)$$

در دستگاه دکارتی به صورت زیر (۶-۶) است. این بدین معنی است که می توان مولفه آزاد یک جسم را از معادله تعادل یافت. توجه داشته باشید که این معادله به خواص ماده تشکیل شده جسم بستگی ندارد.

یادآور می شویم که (۶-۱۱) شکل دیفرانسیلی این شرط که برآیند نیروی وارده به هر قسمت اختیاری از جسم برابر صفر است.

تاکنون تنها معادله نیروی (۶-۲) را بررسی کردیم. اکنون به فرمول بندی نتایج معادله گشتاور (۶-۳) می پردازیم.

قضیه ۶-۳. فرض کنیم معادله (۶-۳) برای هر قسمت از جسم برقرار باشد. این ایجاب می کند که σ یک تانسور متقارن است: $\sigma = \sigma^T$.

اثبات: با استفاده (۴-۴۱) می توان انتگرال سطح (۶-۳) را به انتگرال روی V_P تغییر داد:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_P} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{t} d\Sigma &= \int_{\Sigma_P} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{n} \cdot \sigma) d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma_P} \mathbf{n} \cdot \sigma \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\Sigma \quad (۶-۱۲) \\ &= - \int_{V_P} \nabla \cdot [\sigma \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] dV. \end{aligned}$$

اکنون انتگرال ده انتگرال آخر را تبدیل می کنیم. به دلیل اینکه $\partial \mathbf{r} / \partial x_k = \mathbf{i}_k$ و $\partial \mathbf{r}_0 / \partial x_k = \mathbf{0}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\sigma \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] &= \nabla \cdot \sigma \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{i}_k \cdot \sigma \times \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla \cdot \sigma + \mathbf{i}_k \cdot \sigma \times \mathbf{i}_k \\ &= -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla \cdot \sigma - \sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s. \end{aligned}$$

بنابراین این شرط که برآیند همه نیروهای اعمال شده روی V_P برابر صفر است، رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$\int_{V_P} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma) dV = \int_{V_P} \sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s dV = \mathbf{0}. \quad (۶-۱۳)$$

با توجه به (۶-۱۱)، انتگرال اول در (۶-۱۳) برابر صفر است. بنابراین انتگرال دوم در (۶-۱۳) برای هر V_P دلخواه برابر صفر است و در نتیجه به دست می آوریم:

$$V \text{ در } \sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i} = 0$$

این برقرار است اگر و فقط اگر σ در هر نقطه متقارن باشد، یعنی $\sigma = \sigma^T$. علاوه براین، با در نظر گرفتن قسمت جمع $\sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i} = 0$ وقتی که k, s برابر ۱ یا ۲ است، داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{ks} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s &= \sigma_{11} \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 + \sigma_{22} \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 + \sigma_{12} \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 + \sigma_{21} \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 \\ &= (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \mathbf{i}_3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

که ایجاب می‌کند $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ و $\sigma_{13} = \sigma_{31}$. این اثبات را کامل می‌کند. □

این مطلب قابل اهمیت است که در مکانیک پیوسته می‌توان انواع تنش‌های دیگر از قبیل تنش‌های زوجی، در نظر گرفته شوند [کوسرات و کوسرات (۱۹۰۹)؛ ارینگن (۱۹۹۹)]. برای چنین مدل‌هایی، تانسور کوشی به‌طور کلی متقارن نیست.

اصل تنش‌ها و عنصرهای سطح

در یک پایه کلی $\mathbf{e}^k$ ($k = 1, 2, 3$)، تانسور تنس کوشی σ به‌شکل زیر است:

$$\sigma = \sigma_{sk} \mathbf{e}^s \mathbf{e}^k,$$

که در آن ماتریس σ_{sk} دارای تنها شش مولفه مستقل است.

به دلیل متقارن بودن σ ، بسط طیفی (۳-۲۱) به‌صورت زیر است:

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \sigma_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \sigma_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3. \quad (۶-۱۴)$$

در اینجا مقادیر ویژه از ماتریس (σ_{sk}) اصل تنش‌ها بوده و با بهنجار بردارهای ویژه $\mathbf{i}_k$ از σ محورهای اصلی σ هستند. در عنصر سطح اصلی با بردار قائم، تنش‌های مماسی وجود ندارد. هرگاه σ_k متمایز باشند، دستگاه $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ متعامد است. برای حالتی که σ_k تکراری باشند، دستگاه $\mathbf{i}_k$ یکتا نبوده، به‌رحال، حتی در این حالت نیز می‌توان مجموعه بردارهای متعامد $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ را انتخاب کرد.

۶-۲ تانسور کشش

یک جسم تحت عنوان بارگذاری تغییر شکل می‌دهد. چگونگی تغییر شکل را به کمک تانسور کشش بررسی می‌کنیم. بررسی خود را به تغییر شکل‌های بسیار کوچک محدود می‌کنیم.

اکنون به عنوان مثال مفهوم کشش را توسط یک بار کشیده شده، توضیح می‌دهیم. یک بار تغییر شکل نیافته دارای طول l_0 است، پس از بارگذاری طولش به l می‌رسد. کشش برابر است با:

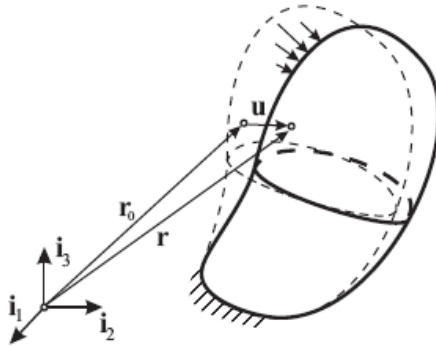
$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \equiv \frac{\Delta l}{l_0}.$$

تعمیم این مطلب به بعد سه سر راست نیست: بایستی تغییر شکل جسم در تمام جهات در نظر گرفته شود.

فرض کنیم که یک جسم در ابتدا حجم V در فضا را اشغال کند. قسمت بارگذاری این جسم حجم U را اشغال می‌کند. بردار مکان یک ذره در قبل و بعد از تغییر شکل را به ترتیب با $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{r}$ نمایش می‌دهیم. بردار جابجایی

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

جابجایی ذره متناسب با تغییر شکل را تشریح می‌کند (شکل ۶-۶). در این کتاب خود را به حالتی که $\|\mathbf{u}\| \ll 1$ محدود کرده و تمامی مشتقات اول $\mathbf{u}$ در مقایسه با ۱ را کوچک فرض می‌کنیم. بنابراین تمام جملات مرتبه دوم کوچک در هر عبارت که شامل جمله مرتبه اول است، حذف می‌شود. همچنین در حالتی که تغییر شکل کوچک است، تمایزی بین حالت‌های اولیه و واقعی از جسم قائل می‌شویم. این بدان معنی است که تمامی کمیت‌های مورد بررسی در حجم اولیه V قرار دارند.



شکل ۶-۶ تغییر شکل جسم سه بعدی

اکنون یک تغییر کوچک از قطعه برداری $d\mathbf{r}_0$ متناسب با تغییر شکل در نظر می‌گیریم. بعد از تغییر، شکل قطعه به صورت بردار $d\mathbf{r}$ می‌شود:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{F}, \quad (۱۵-۶)$$

که در اینجا $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \nabla \mathbf{u}$ گرادیان تغییر شکل است.^{۱۱}

تمرین ۶-۲. عبارت (۱۵-۶) را از رابطه $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}$ به دست آورید.

در ادامه، تغییرات طول قطعه را در چنین تغییر شکل در نظر می‌گیریم. مربع طولی قبل از تغییر شکل برابر است با:

$$dS^2 = d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0.$$

بعد از تغییر شکل، این مقدار برابر است با

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{r}_0.$$

داریم:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= d\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r}_0 \\ &= d\mathbf{r}_0 \cdot \left[(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}^T) \right] \cdot d\mathbf{r}_0. \end{aligned}$$

^{۱۱} برخی از کتابها از $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \nabla \mathbf{u}^T$ استفاده می‌کنند، که در این حالت (۱۵-۶) به شکل

$d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_0$ تبدیل می‌شود.

برای تغییر شکل‌های کوچک می‌توان تمام کمیت‌های مجذور را حذف کرده و می‌نویسیم:

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{r}_0 \cdot \left[(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] \cdot d\mathbf{r}_0 = 2d\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{r}_0,$$

جایی که

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (۱۶-۶)$$

تانسور کشش خطی است. آشکار است که $\boldsymbol{\varepsilon}$ یک تانسور متقارن است در دستگاه دکارتی، $\boldsymbol{\varepsilon}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{mn} \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n$$

جایی که

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

مولفه‌های قطری $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ تغییرات طول قطعه جزیی را به ترتیب در امتداد جهت‌های $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ شروع می‌کند. مولفه‌های دیگر $\varepsilon_{mn} (m \neq n)$ نشان دهنده چرخش جسم است، آنها مشخص کننده تغییر شکلی است که ناشی از تغییر زوایای بین قطعه‌های جزیی واقع در امتداد محورهای اولیه، می باشد

در دستگاههای خمیده خط q^1, q^2, q^3 با پایه $\mathbf{r}_k (k=1,2,3)$ و پایه دوگان $\mathbf{r}^k (k=1,2,3)$ تانسور $\boldsymbol{\varepsilon}$ به صورت زیر بیان می‌شود

در دستگاه‌های خمیده خط متعامد به صورت (۴-۳۹) نمایش داده شده است. پیوست الف برای $\boldsymbol{\varepsilon}$ در دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی را ملاحظه کنید.

معادله (۱۶-۶)، $\boldsymbol{\varepsilon}$ را به عنوان تابع تانسوری $\mathbf{u}$ تعریف می‌کند. مساله معکوس پیدا کردن $\mathbf{u}$ است وقتی که $\boldsymbol{\varepsilon}$ داده شده دارای جوابی است اگر و تنها اگر شرط تطابق

$$\nabla \times (\nabla \times \varepsilon)^T = 0 \quad (۱۷-۶)$$

برقرار باشد. در اینجا $\mathbf{u}$ با استفاده از فرمول‌های سزارو به دست می‌آید:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \omega_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int_{M_0}^M \left\{ \varepsilon(s) + [\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}] \times \nabla \times \varepsilon(s) \right\} d\mathbf{r}(s), \quad (۱۸-۶)$$

که $\mathbf{u}_0$ و ω_0 بردارهای دلخواه اما ثابتی هستند و مسیر انتگرال‌گیری M_0M که M_0 را به M متصل می‌کند که به ترتیب با بردارهای مکان $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{r}$ مربوط می‌شوند. در اینجا $\mathbf{r}(s)$ نشان دهنده هر نقطه دلخواه روی M_0M است. استخراج این فرمول را می‌توان در هر کتاب کشسانی به عنوان مثال آگرین و زرنا (۱۹۵۴) و لوری (۲۰۰۵) [۱].

۶-۳ معادله حرکت

با استفاده از معادله (۱۱-۶) مکان و اصل مکانیک دالامبرت، می‌توان سرعت معادلات حرکت یک جسم را به دست آورد. روش بدین صورت است که به نیروهای جسم نیروهای اینرسی به صورت ظاهری اضافه شود:

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

که t متغیر زمان و ρ چگالی ماده است. معادله حرکت برابر است با:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (۱۹-۶)$$

در دستگاه دکارتی شکل (۱۹-۶) ساده تر می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$\sigma = \sigma_{mn} \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n, \quad \mathbf{u} = u_m \mathbf{i}_m,$$

به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \rho f_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2, 3)$$

یا به طور صریح:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

معادله (۱۹-۶) در دستگاه مختصات منحنی الخط با در نظر گرفتن (۴-۳۳) به صورت زیر است:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} \sigma^{ij} \mathbf{r}_j) + \rho f = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (۶-۲۰)$$

این رابطه بر حسب مولفه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} \sigma^{ij}) + \Gamma_{mn}^j \sigma^{mn} + \rho \sqrt{g} f^i = \rho \sqrt{g} \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} \quad (j=1,2,3) \quad (۶-۲۱)$$

معادله حرکت را در دستگاه متعامد به شکل ساده‌تری نوشته می‌شود. عبارت‌های مربوط به مختصات استوانه‌ای و کروی را در پیوست الف نگاه کنید.

۶-۴ قانون هوک

معادلات (۶-۱۶) و (۶-۱۹) برای هر تغییر شکل کوچک محیط پیوسته به کار گرفته می‌شود. گرچه آنها به طور یکتا نمی‌توانند تغییر شکل و تنش جسم را تعریف کنند. با مطالعه جسم تحت بارگذاری، با استفاده از خواص مادی جسم به نسبت تنش به کشش پی‌می‌بریم. این روابط را معادلات ساختاری می‌نامند. از آنجایی که معادله ساختاری نشان دهنده وابستگی خطی بین σ و ε است، در این کتاب کشسانی مواد را خطی در نظر می‌گیریم. ساده ترین حالت، قانون هوک است:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (۶-۲۲)$$

که خواص کشسانی یک میله تحت تنش یا کشش را توصیف می‌کند. در اینجا E مدول کشسانی ماده‌ای است که میله از آن ساخته شده و آن را مدول یانگ می‌نامند.

رابرت هوک (۱۶۳۶-۱۷۰۳) برای اولین بار وابستگی خطی $f \sim \Delta l$ را بین نیروی به کار گرفته شده و امتداد یافتگی میله همانند آنچه در شکل 6-1 نشان داده شده، به چاپ رساند. توماس یانگ (۱۷۷۳-۱۸۲۹) مدول کشسانی E را به عنوان کمیتی که به سطح مقطع میله وابسته نیست، تعریف کرد به طوری که E به ندرت خود ماده را مشخص می کند. وابستگی خطی (6-22) تنها در محدوده $|\epsilon| < \epsilon_0$ برقرار است به گونه ای که ϵ_0 به ماده، دما و نیروهای دیگر وابسته است. گرچه اهمیت قانون هوک در مهندسی غیر قابل تحسین است.

در حالت کلی، وابستگی خطی بین تانسور مرتبه دوم σ و ϵ در معادله (۳-۳۱) نشان داده شده، به عنوان *قانون هوک* تعمیم یافته شناخته می شود:

$$\sigma = C \cdot \epsilon. \quad (6-23)$$

این رابطه در دستگاه دکارتی برابر است با:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \epsilon_{mn}.$$

تانسور مرتبه چهارم مدول های کشسانی

$$C = c_{ijmn} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n$$

دارای ۸۱ مولفه است، که تنها ۳۶ تا از آنها مستقل است، به هر حال، تقارن های σ و ϵ منجر به شرط های زیر می شود:

$$C_{ijmn} = C_{ijmn} = C_{ijmn}.$$

در کشسانی خطی [لوری (۲۰۰۵)] نشان داد که می توان *انرژی کششی* ذخیره شده در جسم کشسان توسط تغییر شکل مجازی را به صورت زیر معرفی کرد:

$$\frac{1}{2} \int_V w dV$$

انتگرالده $(\epsilon) W = W$ ، تابع *انرژی کشش* دارای شکل مربعی در ϵ است:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \cdot C \cdot \epsilon = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} C_{ijmn} \epsilon_{mn}.$$

این حقیقت که W برای هر تغییر شکل به طور یکتا تعریف می شود، به خاصیت تقارنی اضافی برای C نیاز دارد، که برحسب مولفه ها برای اندیس های i, j, m, n به صورت زیر است:

$$C_{ijmn} = C_{mnij}$$

همچنین می‌توان C را به صورت جمع دو تانسور نشان داد:

$$C = C' + C'',$$

که مولفه‌های C' در

$$C'_{ijmn} = C'_{mnij}$$

و مولفه‌های C'' در

$$C''_{ijmn} = -C''_{mnij}.$$

صدق می‌کنند.

(این با نمایش تانسور مرتبه دوم به صورت مجموع تانسورهای متقارن و پاد متقارن مشابه است.) برای هر تانسور متقارن ε_k داریم:

$$\varepsilon_1.. C''.. \varepsilon_2 = -\varepsilon_2.. C''.. \varepsilon_1,$$

در نتیجه برای هر تانسور کشش ε :

$$\varepsilon.. C''.. \varepsilon = -\varepsilon.. C''.. \varepsilon$$

و

$$\varepsilon.. C''.. \varepsilon = 0.$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$\varepsilon.. C.. \varepsilon = \varepsilon.. C'.. \varepsilon.$$

بنابراین C'' روی مقادیر W تاثیر نداشته و روابط ساختاری شامل حال آن نمی‌شود. با قرار دادن C'' برابر صفر، داریم $C = C'$. پس مولفه‌های C برای زیرنویس‌های i, j, m, n دارای خواص تقارنی زیر هستند:

$$C_{ijmn} = C_{ijmn} = C_{ijmn}, \quad C_{ijmn} = C_{mnij},$$

محاسبات مقدماتی نشان می‌دهد که ۶۰ کمیت هستند. بنابراین در قانون هوک از ۸۱ مولفه C تنها ۲۱=۶۰-۸۱ به صورت ثابت‌های مستقل کشسانی هستند.

تمرین ۳-۴۴ ایجاب می‌کند که W پتانسیل σ است، یعنی:

$$\sigma = W_{,\varepsilon}$$

در اینجا $W_{,\varepsilon}$ مشتق W نسبت به ε است.

رابطه دوگان زیر:

$$\varepsilon = W_{,\sigma}$$

هنگامی برقرار است که W را برحسب σ بسط دهیم، یعنی $W = W(\sigma)$ اصرار داریم که خواننده این مطلب را به عنوان تمرین به دست آورد.

نمادهای ماتریسی در آنالیز مهندسی معمولاً برای توصیف جسم کشسان به کار می‌رود. به دلیل خواص تقارنی تانسورها، تمام روابط برحسب "بردارهای" شش بعدی صوری با مولفه‌های σ و ε ماتریس‌های 6×6 برای C بیان می‌شود. چگونگی تبدیل نماد تانسوری به نماد ماتریس بردار با قاعده وویگ بیان می‌شود. قاعده تغییر $C_{ijmn} \rightarrow C_{pq}$ به صورت زیر است. جفت زیر نویس‌های ۱۱، ۲۲، ۳۳ به ۱، ۲، ۳ و جفت‌های ۲۳ به ۳۲ به ۴ و جفت‌های ۱۳ و ۳۱ به ۵ و جفت‌های ۱۲ و ۲۱ به ۶ تبدیل می‌شوند. برای مثال $C_{1122} \rightarrow C_{12}$ و $C_{1232} \rightarrow C_6$. خاصیت تقارنی $C_{pq} \rightarrow C_{qp}$ برقرار است. مولفه‌های تنش و کشش تانسورها با فرمول‌های زیر قابل تبدیل هستند:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (۲۴-۶)$$

قانون هوک در این نمادگذاری به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_{12}C_{22}C_{23}C_{24}C_{25}C_{26} \\ C_{13}C_{23}C_{33}C_{34}C_{35}C_{36} \\ C_{14}C_{24}C_{34}C_{44}C_{45}C_{46} \\ C_{15}C_{25}C_{35}C_{45}C_{55}C_{56} \\ C_{16}C_{26}C_{36}C_{46}C_{56}C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (۲۵-۶)$$

در حالت کلی که تمام ۲۱ ثابت کشسانی (۶-۲۵) مستقل هستند اما در عمل از آنها استفاده نمی‌شود. مواد معمولاً در عملیات مهندسی دارای تقارن‌هایی هستند که به تعداد ثابت‌های مستقل کاهش می‌یابد. مواد همسان‌گرد از رایج‌ترین آنها هستند؛ چنین موادی با تقارن کامل خواص خود در فضا به گونه‌ای که خواص ماده در هر نقطه از فضا با جهت تغییر نکند، نمایش داده می‌شوند. خاصیت تقارن از نظر ریاضی با زبان نظریه گروه‌ها قابل بیان است. فولاد، آلومینیوم و بسیاری از مواد پلیمری و غیره مثال‌هایی از مواد همسان‌گرد هستند.

روابط بین σ و ϵ برای مواد همسان‌گرد با تابع خطی همسانگرد بیان می‌شود. این تابع که در فصل ۳ مورد بررسی قرار گرفت به صورت زیر است:

$$\sigma = \lambda \text{Etr} \epsilon + 2\mu \epsilon, \quad (۶-۲۶)$$

در اینجا μ و λ مدول‌های لامه هستند. اغلب می‌توان μ را به عنوان مدول برشی در نظر گرفت. برای هر ماده همسان‌گرد زیر:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E} \mathbf{E} + \mu (\mathbf{e}_k \mathbf{E} \mathbf{e}^k + \mathbf{I}).$$

$\mathbf{C}$ در نمادگذاری ماتریسی با ماتریس قطری زیر متناظر است:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}.$$

از نظر تاریخی ثابت‌های کشسانی دیگر در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد و قانون هوک برحسب این ثابت‌ها به صورت دیگری تبدیل می‌شود. برخی از ثابت‌های مهندسی رایج عبارتند از: مدول یانگ E ، نسبت پواسون ν ، مدول حجمی k و مدول‌های برشی G . اینها برای مواد همسان‌گرد در جفت‌های E و ν ، k و G به کار می‌روند. مدول E در مسایل میله تحت کشش کاربرد دارد؛ این بستگی به تنش اعمال شده به میله با کشش نهایی دارد. مدول k برای توصیف تغییر شکل حجم یکنواخت

ماده به کار می‌رود، مثلاً گویی تحت فشار یکنواخت. مدول G مشخصات برشی ماده را توصیف می‌کند. در نهایت U کوتاه شدگی عرضی هر نوار کشیده شده را تشریح می‌کند. برخی روابط بین این ثابت‌ها را به دست می‌آوریم. اکنون σ را به تانسور گوی و انحراف دهنده تجزیه می‌کنیم:

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma \mathbf{E} + \text{dev} \sigma.$$

بنابراین (۶-۲۶) به صورت زیر می‌شود:

$$\sigma = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \text{tr} \varepsilon, \quad \text{dev} \sigma = 2\mu \text{dev} \varepsilon.$$

مدول حجمی k از طریق رابطه زیر به میانگین تنش σ با کشش حجمی $\text{tr} \varepsilon$ مربوط می‌شود:

$$\sigma = k \text{tr} \varepsilon,$$

و بنابراین:

$$k = \lambda + 2\mu/3.$$

تنش‌های برشی از طریق رابطه زیر به کشش‌های برشی مرتبط است:

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j).$$

معادله انحراف بالا بر حسب مولفه‌ها برابر است با:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j),$$

که ایجاب می‌کند $G = \mu$.

اکنون به معادله یانگ E برمی‌گردیم. برای میله تغییر شکل همگن تک محوری را در نظر بگیرید؛ این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که ماده به صورت یکنواخت کشیده یا متراکم گردد. بردار $\mathbf{i}_1$ را در امتداد محور میله در نظر بگیرید. در این صورت $\sigma = \sigma_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1$. رابطه (۶-۲۶) به سه معادله مولفه‌ای غیر بدیهی زیر کاهش می‌یابد:

$$\sigma_{11} = \lambda \text{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{11}, \quad 0 = \lambda \text{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{22}, \quad 0 = \lambda \text{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{33}.$$

با حذف ε_{22} و ε_{33} از این معادلات به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{که در آن } \sigma_{11} = E \varepsilon_{11},$$

وقتی میله دارای کشش ε بوده و با نیرویی یکنواخت کشیده شود، به طور تجربی می توان نشان داد که ابعاد اریب کاهش پیدا می کنند. کشش اریب مربوط به این تغییر شکل با کشش طولی $-\nu\varepsilon$ متناسب است، که ضریب تناسب برابر نسبت پواسون است. رابطه آن نسبت به ثابت های دیگر همانند زیر تعریف می شود:

تمرین ۳-۶. برای حالت کشش تک محور میله بالا $\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11} = -\nu$ را بیابید. نشان دهید که $\nu = \lambda / (2\lambda + 2\mu)$. توجه داشته باشید که در میله کشیده شده به صورت تک محور، ν وابستگی کشش عرضی ε_{22} روی کشش محوری ε_{11} را تعریف می کند.

در پیوست الف خلاصه ای از روابط بین جفت های مختلف مدول ها در مقالات آمده است. ملاحظات ترمودینامیکی نشان می دهد که انرژی کششی باید مثبت باشد:

$$W(\varepsilon) > 0 \quad \text{هرگاه} \quad \varepsilon \neq 0 \quad (۲۷-۶)$$

این روی مدول های کشسانی ماده همسان گرد، قیودی را اضافی می کند. داریم:

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \varepsilon)^2 + \mu \varepsilon \cdot \varepsilon \quad \text{..} \quad \varepsilon \geq 0.$$

اکنون ε را به صورت مجموع جملات گوی و انحراف در نظر می گیریم.

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \text{Etr} \varepsilon + \text{dev} \varepsilon.$$

به دلیل اینکه:

$$\varepsilon \cdot \varepsilon = \frac{1}{3} (\text{tr} \varepsilon)^2 + \text{dev} \varepsilon \cdot \text{dev} \varepsilon,$$

به دست می آوریم:

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{6} (3\lambda + 2\mu) (\text{tr} \varepsilon)^2 + \mu \text{dev} \varepsilon \cdot \text{dev} \varepsilon.$$

اما $\text{tr} \varepsilon$ و $\text{dev} \varepsilon$ کمیت های مستقلی بوده و از (۲۷-۶) به دست می آید:

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0. \quad (۲۸-۶)$$

بنابراین مدول حجمی $k = \lambda + 2/3\mu$ و مدول برشی $G = \mu$ مثبت هستند. در تمرین زیر نتیجه ای از (۲۸-۶) آمده است.

تمرین ۴-۶. نشان دهید که $E > 0$ و $-1 < \nu < 1/2$.

برای بیشتر مواد به کار رفته در مهندسی، $\nu > 0$ را داریم. مقادیر ν برای لاستیک نزدیک $1/2$ است؛ مواد همانند اسفنج های تزریق دوباره داری مقادیر ν منفی هستند. خواننده می تواند اطلاعات مرتبط با مواد گوناگون را در کتاب های مرجع فنی بیابد. مقادیر E برای فولاد منظم در حدود 2×10^{11} Pa است و ν در بازه $0.25-0.33$ قرار دارد.

تمرین ۵-۶. برای هر جسم همسان گرد، عبارتی برای ε و W بر حسب σ به دست آورید.

۵-۶ معادلات تعادل برای جابه جایی ها

معادله حرکت (۱۹-۶) و معادله تعادل (۱۱-۶) را به دست آورديم. معادله (۱۱-۶) بر حسب تنش نوشته شده است. در شکل مولفه ای، (۱۱-۶) شامل سه معادله با شش مجهول مستقل σ_{ij} است. با استفاده از تعریف تانسور کشش و قانون هوک می توان (۶-۱۹) و (۱۱-۶) به دستگاهی با سه معادله همزمان نسبت به مولفه های بردار جابه جایی $\mathbf{u}$ تبدیل کرد. پس دستگاه های (۱۹-۶) و (۱۱-۶) به دستگاهی با سه معادله دارای سه مجهول از مولفه های $\mathbf{u}$ کاهش می یابد. این موضوع با نقطه نظر کلی که هر مساله خوش رفتار باید دارای تعداد برابری معادله و مجهول باشد، متناظر است. برای سادگی، معادلات تعادل در مورد ماده همگن تعریف شده توسط (۶-۲۶) به دست می آید. فرض کنید λ و μ ثابت هستند. ابتدا $\nabla \cdot \sigma$ را بر حسب $\mathbf{u}$ به دست می آوریم:

$$\nabla \cdot \sigma = \nabla \cdot (\lambda \text{Etr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon) = \lambda \nabla \text{tr} \varepsilon + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T.$$

از آنجایی که:

$$\text{tr} \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

و

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u},$$

داریم:

$$\nabla \cdot \sigma = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

بنابراین معادله به شکل زیر می‌شود:

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = 0. \quad (29-6)$$

تمرین ۶-۶. نشان دهید $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}$.

در دستگاه مختصات دکارتی، معادله (۲۹-۶) برابر است:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial u_i}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i} + \rho f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (30-6)$$

یعنی:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \Delta u_1 + \rho f_1 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \Delta u_2 + \rho f_2 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \Delta u_3 + \rho f_3 &= 0, \end{aligned} \quad (31-6)$$

که در آن

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

نمایش مولفه‌ای (29-6) در دستگاه منحنی الخط برابر است با:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial q^k} \varepsilon + \mu g^{mn} \nabla_m \nabla_n u_k + \rho f_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (32-6)$$

که در آن

$$\varepsilon = \text{tr} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} g^{mn} u_n)}{\partial q^m}.$$

تمرین ۶-۷. عبارت (۳۲-۶) را به دست آورید.

روابط متناظر در مختصات کروی و استوانه‌ای در پیوست الف آمده است.

تمرین ۶-۸. معادلات حرکت در جابه‌جایی‌ها را بنویسید.

۶-۶ شرایط مرزی و مسایل مقدار مرزی

معادلات تعادل را به دست آوردیم. برای به دست آوردن یکتایی جواب‌ها باید معادلات را با شرایط واقعی بر روی مرز حوزه که معادلات در آن قرار دارند، تکمیل کنیم. اولین حالت مورد بررسی مسایل اصلی تعادل برای اجسام کشسان است. در این صورت به جواب سوال یکتایی دست خواهیم یافت.

بینش فیزیکی به ما می‌گوید که در هر نقطه مرزی باید هم بردار جابه‌جایی و هم بردار تنش بر اساس بار متصل تعیین شود. تعیین هر دو بردار در یک نقطه غیر ممکن است. این موضوع در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در کشسانی سه مساله مقدار مرزی اصلی وجود دارد. دو تا از این موارد به شرح زیر است: یکی با جابه‌جایی بیان می‌شود، دیگری با نیروهای تماسی. سومی به صورت یک مساله ترکیبی است که از جابه‌جایی و بارهای متصل بر روی مرز تشکیل شده است.

در اولین مساله مقدار مرزی کشسانی معادلات تعادل را با جابه‌جایی‌های (۶-۲۹) یا شکل‌های دیگری از معادلات (۶-۳۰) - (۶-۳۲) با توجه به میدان جابه‌جایی u^0 بر روی کل مرز Σ تکمیل می‌کنیم:

$$u|_{\Sigma} = u^0. \quad (۶-۳۳)$$

این رابطه به عنوان شرط مرزی جنبشی معروف است.

در دومین مساله مقدار مرزی، رابطه (۶-۲۹) را با در نظر گرفتن با متصل t^0 بر روی Σ تکمیل می‌کنیم.

$$u \cdot \sigma|_{\Sigma} = t^0. \quad (۶-۳۴)$$

این رابطه به عنوان شرط مرزی/ایستایی معروف است. از آنجایی که هیچ نقطه‌ای از جسم ثابت نیست، جسم می‌تواند آزادانه در فضا حرکت کند. با این شرط، مساله مقدار مرزی ایستایی خوش وضع است اگر عمل بارگذاری روی جسم خود تعادل باشد، بدین معنا که برآیند نیرو و برآیند اندازه حرکت از همه نیروهای خارجی وارد بر جسم باید صفر شود.

خواننده‌ای که با معادلات مشتقات جزیی آشنا است می‌تواند تشخیص دهد که این نوع از شرایط مرزی مشابه با شرایط دیرکله و نیومن برای معادله پواسن هستند. سومین مساله مقدار مرزی مستلزم تکمیل (۶-۲۹) با شرایط مرزی ترکیبی است. یعنی، باید شرایط جنبشی روی بخش Σ_1 از مرز و شرایط t^0 روی باقیمانده Σ_2 :

$$u|_{\Sigma_1} = u^0, \quad n \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = t^0. \quad (۶-۳۵)$$

را در نظر بگیریم.

"مسائل ترکیبی" کشسانی دیگری نیز وجود دارد که در آنها برای هر نقطه مرزی این سه شرط با جابه‌جایی و بارگذاری‌های مورد نظر ترکیب می‌شود. علاوه بر این، بر روی مرز می‌توان شرایط تماسی را با محیط یا اجسام کشسان یا غیر کشسان ترکیب کرد. به‌عنوان یک قاعده، چنین مسائلی لازم است که به‌صورت خوش رفتار بررسی شوند، اما به‌طور کلی بینش مهندسی اجازه می‌دهد که بررسی کنندگان شرایط معنی‌داری را برای هر حالت ارایه دهند. به‌عنوان مثال از مساله بی‌معنا می‌توان به جابه‌جایی‌ها و تنش‌های عمودی لحظه‌ای بر روی مرز اشاره کرد. این کمیات نمی‌توانند به‌طور مستقل تعیین گردند.

از این پس فرض می‌شود که V حجم با مرز Σ محدود می‌شود که به منظم بوده تا بتوان از روش‌های انتگرال‌گیری جزء به جزء بر روی آن استفاده کرد.

۶-۷ معادلات تعادل تنش

مساله مقدار مرزی برای جابه‌جایی، شامل پیدا کردن میدان جابه‌جایی صادق در معادلات تعادل (۶-۲۹) و یکی از مجموعه‌های شرایط مرزی (۶-۳۳) و (۶-۳۴) یا (۶-۳۵) است. فرض می‌شود که تانسور تنش (۶-۳۴) یا (۶-۳۵) بر حسب جملاتی از u با روابط (۶-۲۶) یا (۶-۱۶) بیان می‌شود. وقتی تنش بر روی کل مرز در نظر گرفته می‌شود، می‌توان کمیت مجهول σ را از (۶-۱۱) و (۶-۳۴) به‌دست آورد. البته جواب σ یکتا نیست. باید معادلات دیگری را که قانون هوک را شامل می‌شود، در نظر گرفت. این مطلب را به روش زیر انجام می‌دهیم. فرض می‌شود که جواب σ از معادلات (۶-۶)

(۱۱) توسط (۳۴-۶) تکمیل می‌شود. با قرار دادن σ در قانون هوک، ε را تعریف می‌کنیم. محاسبه رد معادله (۲۶-۶) ایجاب می‌کند:

$$\text{tr} \varepsilon = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \text{tr} \sigma.$$

با جایگذاری در معادله (۲۶-۶) به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma - \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \mathbf{E} \text{tr} \sigma \right] = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma - \frac{1}{1+\nu} \mathbf{E} \text{tr} \sigma \right]. \quad (۳۶-۶)$$

اما می‌دانیم که تانسور کشش با معنی است، یعنی توسط ε می‌توان میدان جابه‌جایی را اگر و فقط اگر معادله سازگاری (۱۷-۶) به صورت زیر برقرار باشد، به دست آورد:

$$\nabla \times (\nabla \times \varepsilon)^T = 0.$$

با جایگذاری (۳۶-۶) در معادله سازگاری، معادله‌ای بر حسب σ به دست می‌آید:

$$\nabla \times (\nabla \times \varepsilon)^T = \frac{1}{2\mu} \left[\nabla \times (\nabla \times \sigma)^T \right] - \frac{\nu}{1+\nu} \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{E} \text{tr} \sigma)^T) = 0.$$

با در نظر نگرفتن محاسبات طاقث فرسا، این معادله به معادلات بلترامی-میشل کاهش می‌یابد:

$$\nabla \cdot \nabla \sigma + \frac{\nu}{1+\nu} \nabla \nabla \text{tr} \sigma + \rho \nabla \mathbf{f} + \rho (\nabla \mathbf{f})^T + \mathbf{E} \frac{\nu}{1+\nu} \rho \nabla \cdot \mathbf{f} = 0. \quad (۳۷-۶)$$

این معادلات که با (۱۱-۶) و (۳۴-۶) تکمیل می‌شوند، چیدمان کاملی از مساله تعادل در تنش را نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که این مساله اگر و فقط اگر مجموعه نیروهای خارجی که شامل نیروهای جسم و عکس العمل آنها بر روی مرز به صورت خود متوازن باشند، دارای جواب است.

وقتی نیروهای جسم حذف شوند، (۳۷-۶) به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$\nabla \cdot \nabla \sigma + \frac{\nu}{1+\nu} \nabla \nabla \text{tr} \sigma = 0. \quad (۳۸-۶)$$

در دستگاه مختصات دکارتی (۳۸-۶) به معادلات زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \Delta\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} &= 0, & \Delta\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\
 \Delta\sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} &= 0, & \Delta\sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0, \\
 \Delta\sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} &= 0, & \Delta\sigma_{13} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0,
 \end{aligned} \quad (39-6)$$

که:

$$\sigma = \text{tr} \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

برای حل کامل مساله تعادل ابتدا σ را از رابطه (۶-۱۱)، (۶-۳۴) و معادلات بلترامی-میشل به دست می آوریم. سپس با استفاده از قانون هوک ε را می یابیم. در نهایت به کمک فرمول سزارو (۶-۱۸) میدان جابه جایی u را که به طور یکتا در حرکت جسم صلب تعریف می شود، پیدا می کنیم.

باید توجه داشت که ساختار مساله مقدار مرزی در تنش از نقطه نظر ریاضی فیزیک کلاسیک کمی نامانوس به نظر می رسد. شش مولفه σ مجهولاتی هستند که در نه معادله-سه تا از مرتبه یک و شش تا از مرتبه دو نسبت به مولفه های σ صدق می کنند. اینها با سه شرط مرزی کامل می شوند. مشتق این مساله مقدار مرزی با مساله مقدار مرزی جابه جایی ها معادل می شود. نظریه چنین مسایل مقدار مرزی "نامانوس" کامل نیست.

۶-۸ یکتایی جواب مسایل مقدار مرزی کشسانی

یکتایی جواب برای مساله مقدار مرزی، مشخصه مهمی از خوش رفتاری آن است. قضیه یکتایی مسایل کشسانی توسط گوستاف ار. کرشهف (۱۸۲۴-۱۸۸۷) پایه گذاری شد. یکتایی جواب معادلات (۶-۲۹) را با شرایط مرزی تکمیلی (۶-۳۵) که در حالت خاص دارای شرایط (۶-۳۳) است، اثبات می کنیم.

برهان خلف، فرض می‌شود که معادلات $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ که در (۶-۲۹) و (۶-۳۵) صادق است، وجود دارند. تانسورهای متناظر تنش به ترتیب با σ_1 و σ_2 نمایش داده می‌شوند. بنابراین دو دستگاه معادله زیر را برقرار است:

$$\nabla \cdot \sigma_1 + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ در } V, \quad \mathbf{u}_1|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma_1|_{\Sigma_2} = \mathbf{t}^0,$$

$$\nabla \cdot \sigma_2 + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ در } V, \quad \mathbf{u}_2|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma_2|_{\Sigma_3} = \mathbf{t}^0.$$

تفاضل $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ و میدان تنش متناظر با آن $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ را در نظر بگیرید. با کم کردن معادلات $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ از هم، می‌بینیم که $\mathbf{u}$ جوابی برای مساله تعادل زیر است:

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0} \text{ در } V, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = \mathbf{0}.$$

با ضرب نقطه‌ای معادله تعادل در $\mathbf{u}$ و انتگرال گیری روی V ، به دست می‌آوریم:

$$\int_V (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{u} dV = 0.$$

با استفاده از قضیه گاوس-استروگراسکی، این معادله به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$-\int_V \sigma_{..} (\nabla \mathbf{u})^T dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{u} = 0.$$

در هر نقطه از Σ یکی از معادلات $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ یا $\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{0}$ برقرار است. بنابراین انتگرال آخر برابر صفر می‌شود. تانسور σ متقارن است. پس:

$$\sigma_{..} (\nabla \mathbf{u})^T = \sigma_{..} (\nabla \mathbf{u}).$$

این امر ایجاب می‌کند که انتگرال حجمی را بتوان به صورت زیر نمایش داد:

$$-\int_V \sigma_{..} \varepsilon dV = -2 \int_V W(\varepsilon) dV = 0.$$

یادآور می‌شویم که $W(\varepsilon)$ معین مثبت است. در نتیجه، مساوی صفر بودن انتگرال باعث حذف شدن انتگرالده در تمام حجم $V: W(\varepsilon) = 0$ می‌شود: با توجه به مثبت بودن W داریم:

$$\varepsilon = \mathbf{0}. \quad (۶-۴۰)$$

هرگاه $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$ با استفاده از سزارو (۶-۱۸) بردار جابه‌جایی به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 + \omega_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (۶-۴۱)$$

که u_0, ω_0 و r_0 بردارهای ثابت هستند. اما این مقدار برابر با جابه‌جایی کوچکی از میدان در حجم صلب V است. به علت $u|_{\Sigma_1} = 0$ ، در حجم V داریم $u = 0$. بنابراین:

$$u_1 = u_2.$$

یکتایی جواب برای مسایل مقدار مرزی اول و سوم کشسانی اثبات شد. برای مساله دوم، گام‌های ابتدایی اثبات برقرار است. به دست می‌آوریم $\varepsilon = 0$ در حجم V ، در نتیجه دو جواب مساله برای جابه‌جایی هر جسم صلب متفاوت است:

$$u_1 = u_2 + u_0 + \omega_0 \times (r - r_0).$$

اما در وضعیت کنونی نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد که $u_1 = u_2$ این موضوع از دیدگاه فیزیکی روشن است. مساله دوم کشسانی توصیف کننده جسم آزاد با محدودیت‌های هندسی است، بنابراین جواب باید در حد جابه‌جایی جسم صلب تعریف شود. این موضوع چیزی است که در فرمول آخر دیده می‌شود.

۶-۹ قضیه تقابل بتی

جواب‌های مسایل تعادل برای هر جسم کشسان که تحت بارهای متفاوتی است از قضیه کار متقابل بتی پیروی می‌کند.

اکنون جسمی را که تحت کنش نیروهای تماسی t' و واکنشی جسم f' باشد و جسم مشابهی که تحت کنش جفت نیروهای خارجی دیگر t'' و f'' باشد، در نظر بگیرید. جابه‌جایی و دیگر کمیات متناسب با این مسایل به طور مشابه به ترتیب با علامت پریم و زگوند نمایش داده می‌شود. اکنون دو جواب برای مساله مقدار مرزی دوم متفاوت جسم کشسان داریم.

قضیه ۶-۴. جواب‌های u' و u'' مساله مقدار مرزی دوم کشسانی که با جفت بارهای t', f' و t'', f'' متناظر است، در روابط زیر صادق است:

$$\int_V \rho f' \cdot u'' dV + \int_{\Sigma} t' \cdot u'' d\Sigma = \int_V \rho f'' \cdot u' dV + \int_{\Sigma} t'' \cdot u' d\Sigma. \quad (۴۲-۶)$$

این تساوی، قضیه بتی است. اولین عبارت از نظریه پرتو و دومین عبارت از قسمت‌های دیگر فیزیک بسط داده شده که در به دست آوردن معادلات روش‌های عنصر محدود

مرزی، به کار گرفته می‌شود. هر کدام از عبارتهای سمت چپ و راست نشان دهنده کار هر بار در جابه‌جایی مورد نظر است. بنابراین می‌توان یک فرمول‌بندی مکانیکی از قضیه بتی داشت.

کار دستگاه اول ناشی از نیروهای وارد بر جابه‌جایی‌های جسم که با کنش دستگاه دوم نیروها متناسب است با کار دستگاه دوم ناشی از نیروهای وارد بر جابه‌جایی‌های جسم که با کنش دستگاه اول نیروها متناسب است، برابر است.

اثبات. بردارهای $\mathbf{u}'$ و $\mathbf{u}''$ به ترتیب در معادلات تعادل و شرایط مرزی زیر صادق است:

$$\nabla \cdot \sigma' + \rho \mathbf{f}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}' \cdot \sigma'|_{\Sigma} = \mathbf{t}';$$

$$\nabla \cdot \sigma'' + \rho \mathbf{f}'' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma''|_{\Sigma} = \mathbf{t}''.$$

اکنون قسمت سمت چپ رابطه (۶-۴۲) را در نظر بگیرید. با نوشتن نیروها برا حسب تنش، به دست می‌آوریم:

$$\int_V \rho \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u}'' dV + \int_{\Sigma} \mathbf{t}' \cdot \mathbf{u}'' d\Sigma = - \int_V (\nabla \cdot \sigma') \cdot \mathbf{u}'' dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \sigma' \cdot \mathbf{u}'' d\Sigma.$$

با به کارگیری قضیه گاوس-اوستروگراسکی برای انتگرال سطح خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & - \int_V (\nabla \cdot \sigma') \cdot \mathbf{u}'' dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \sigma' \cdot \mathbf{u}'' d\Sigma \\ &= \int_V [(\nabla \cdot \sigma') \cdot \mathbf{u}'' + \nabla \cdot (\sigma' \cdot \mathbf{u}'')] dV \\ &= \int_V \sigma' \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}'')^T dV \\ &= \int_V \sigma' \cdot \varepsilon'' dV. \end{aligned}$$

به طور مشابه:

$$\int_V \rho \mathbf{f}'' \cdot \mathbf{u}' dV + \int_{\Sigma} \mathbf{t}'' \cdot \mathbf{u}' d\Sigma = \int_V \sigma'' \cdot \varepsilon' dV.$$

بنابراین اثبات به بررسی تساوی زیر کاهش می‌یابد:

$$\int_V \sigma' \cdot \varepsilon'' dV = \int_V \sigma'' \cdot \varepsilon' dV.$$

با استفاده از قانون هوک و یا آوری خواص تقارنی $\mathbf{C}$ ، به دست می‌آوریم:

$$\sigma' \cdot \varepsilon'' = (\mathbf{C} \cdot \varepsilon') \cdot \varepsilon'' = \varepsilon'' \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon'' = \sigma'' \cdot \varepsilon'.$$

بدین ترتیب اثبات کامل است.

تمرین ۹-۶. قسمت Σ_1 مرز را به صورت ثابت در نظر بگیرید: $\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = 0$. فرض کنید دو مساله مقدار مرزی دارای این شرط باشد و همچنین جسم تحت کنش یکی از دو دستگاه نیروهای $\mathbf{f}', \mathbf{t}'$ یا $\mathbf{f}'', \mathbf{t}''$ با $\mathbf{t}', \mathbf{t}''$ روی $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$ باشد. ثابت کنید که تساوی بتی به شکل زیر می شود:

$$\int_V \rho \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u}'' dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}' \cdot \mathbf{u}'' d\Sigma = \int_V \rho \mathbf{f}'' \cdot \mathbf{u}' dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}'' \cdot \mathbf{u}' d\Sigma.$$

تمرین ۱۰-۶. دو مساله تعادل را برای جسمی تحت دو دستگاه نیروهای خارجی، همانند مساله قبل، در نظر بگیرید. در این حالت دو میدان جابه جایی متمایز بر روی Σ_1 قابل تشریح است:

$$\mathbf{u}'|_{\Sigma_1} = \mathbf{a}', \quad \mathbf{u}''|_{\Sigma_1} = \mathbf{a}''.$$
 (۴۳-۶)

مشابه بالا، جوابهای متناظر با مسایل تعادل را با $\mathbf{u}'$ و $\mathbf{u}''$ نمایش می دهیم. جوابهای مسایل تعادل برای جسمی فارغ از نیروهای خارجی که در شرایط متناظر (۴۳-۶) صدق می کند، به ترتیب با $\mathbf{u}_0'$ و $\mathbf{u}_0''$ نمایش داده می شود. در نهایت معرفی می کنیم:

$$\tilde{\mathbf{u}}' = \mathbf{u}' - \mathbf{u}_0', \quad \tilde{\mathbf{u}}'' = \mathbf{u}'' - \mathbf{u}_0''.$$

ثابت کنید که تساوی بتی به شکل زیر می شود:

$$\int_V \rho \mathbf{f}' \cdot \tilde{\mathbf{u}}'' dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}' \cdot \tilde{\mathbf{u}}'' d\Sigma = \int_V \rho \mathbf{f}'' \cdot \tilde{\mathbf{u}}' dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}'' \cdot \tilde{\mathbf{u}}' d\Sigma.$$

۱۰-۶ اصل کمینه انرژی کل

تعادل یک گوی که روی هر خم مسطح در پایین ترین وضعیت تعادلی است، پایا نامیده می شود. در فیزیک پایه گفته می شود که در هر نقطه تعادل، انرژی پتانسیل گوی دارای کمترین مقدار است. هر نقطه تعادل ثابت مربوط به انرژی پتانسیل مشابه با یک وضعیت تعادلی گوی است، اما چنین تعادلی می تواند ناپایا باشد. هر تعادلی که با نقطه غیر کمین متناظر است به طور معمول غیر پایا است. در مکانیک کلاسیک، لاگرانژ برای اولین بار نتایج پایداری انرژی پتانسیل ذره را مورد بررسی قرار داد. اصل کمینه انرژی پتانسیل یکی از مهمترین اصول علم فیزیک است که برای دستگاههای توزیع شده شبیه

جسم کشسان نیز برقرار است. اما آن را به آسانی نمی‌توان فرمول‌بندی کرد زیرا باید عبارتی را برای انرژی پتانسیل یافته و ثابت کرد که در حالت تعادل دارای کمترین مقدار است.

همانند عبارت انرژی جسم کشسان تحت بار، انرژی کل را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$E = \int_V W(\epsilon) dV - \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_V \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} d\Sigma.$$

جمله اول انرژی کششی وابسته به تغییر شکل را بیان می‌کند. اگر نیروهای خارجی وارد بر جسم را به آرامی به سمت صفر میل دهیم، انرژی کششی با کار بیشینه که توسط جسم تولید می‌شود، برابر است. جملات دیگر با علامت منفی نشان دهنده کار نیروهای خارجی مربوط به میدان جابه‌جایی جسم است. این جملات مشابه عبارتی برای کار نیروی گرانش وارد بر یک ذره متحرک بوده و در نتیجه مشابه با پتانسیل گرانشی می‌توان آنرا جملات انرژی پتانسیل نامید. در حقیقت دوباره باید ثابت کنیم که وقتی جسم در حال تعادل است، E دارای کمترین مقدار است. به طور آشکار، باید معنی "کمترین مقدار E را تشریح کرده و ابزار لازم را برای پایه گذاری اصل کمینه معرفی کرد.

خواننده با تعریف نقطه کمینه موضعی برای تابع n متغیره آشنا است: باید یک همسایگی از نقطه وجود دارد که تمام مقادیر تابع روی آن کمتر از مقدار تابع در آن نقطه نباشد. این مقدار برای نقطه کمینه مطلق باید بزرگتر از تمام مقادیر تابع در هر نقطه باشد. این تعاریف را می‌توان به کمیت‌هایی مانند E تعمیم داده به طوریکه آنها می‌توانند روی مجموعه اعداد حقیقی دارای مقادیری باشند. کمیت E تابع نامیده می‌شود اما به دلیل اینکه به تابع بردار $\mathbf{u}$ بستگی دارد، آن را تابع‌گون می‌نامیم. هر تابع‌گون تناظری است از آرگومانی که می‌تواند کل تابع را در بر گرفته تا حداکثر یک عدد حقیقی.

برای تعمیم ایده کمینه تابع‌گون‌ها باید مفاهیم متغیر مستقل، دامنه چنین متغیری و همسایگی نقطه (که در حال حاضر تابع برداری $\mathbf{u}$ در دامنه است) مورد بررسی قرار گیرد. برای سادگی می‌توان فرض کرد که دامنه E از توابع برداری که دارای تمام مشتقات پیوسته تا مرتبه دوم V تشکیل شده است. همچنین می‌توان فرض کرد که

شرایط مرزی جنبی برای u برقرار است. چنین توابع برداری را مجاز می‌نامند. برای تعریف همسایگی باید یک متر یا نرمی روی توابع برداری مجاز معرفی کرد. خواننده علاقمند به جزییات این موضوع می‌تواند به کتاب‌های معتبر حساب تغییرات مراجعه کند. دیدگاهی که در اینجا ارائه می‌شود، در اصل همان روشی است که پیشگامان این موضوع به آن پرداخته‌اند که همان به دست آوردن نتایج بدون اثبات فرمول‌ها است. در حقیقت می‌توان به طور کامل از سوال مربوط به همسایگی‌ها دوری جست زیرا برای مسایل مورد بررسی، حالت تعادل E دارای مقدار کمینه مطلق است.

اکنون با تشریح ابزار تکنیکی، قادر به جستجوی نقاط کمینه تابع g خواهیم بود. می‌خواهیم مشتق E را همانند قضیه فرما برای مشتق توابع یک متغیره بیابیم: مشتق اول در نقطه کمینه باید برابر صفر باشد. قضیه فرما به توابع چند متغیره تعمیم داده می‌شود: تمام مشتقات جزیی اول تابع باید برابر صفر باشد. اکنون چگونگی نحوه انجام این تعمیم را مرور می‌کنیم.

فرض کنید f یک تابع مقدار حقیقی معمولی از متغیره برداری باشد و f دارای مقدار کمینه در نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ باشد. اگر τ برداری دیگر و τ پارامتری حقیقی باشد، آنگاه $f(x + \tau a)$ می‌تواند به عنوان تابعی از τ در نظر گرفته شود که در $\tau = 0$ دارای مقدار کمینه است. بنابراین در $\tau = 0$ مشتقات نسبت به τ باید برابر صفر باشد:

$$\left. \frac{df(x + \tau a)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (۴۴-۶)$$

این رابطه برای هر x ، در نقطه کمینه a برقرار است. همان‌گونه که خواننده می‌داند، عبارت سمت چپ مشتق مستقیم f در x در امتداد جهت a است. همچنین اگر به صورت صوری قرار دهیم $a = dx$ آنگاه عبارت سمت چپ به شکل دیفرانسیل مرتبه اول df در نقطه x تبدیل می‌شود:

$$df = \left. \frac{df(x + \tau dx)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \nabla f|_x \cdot dx$$

با قرار دادن $a = i_k$ در (۴۴-۶)، قضیه فرما برای تابع n متغیره به دست می‌آید: مشتق جزیی f نسبت به x_k در x در صورتی که $\nabla f|_x$ موجود و x نقطه کمینه f باشد،

باید برابر صفر است. تاکید می شود که این صرفاً شرطی لازم است. اگر در نقطه x معادله (۴۴-۶) برقرار باشد، آنگاه x می تواند نقطه کمینه (یا بیشینه) نباشد. هر f صادق در (۴۴-۶) به صورت ثابت f نامیده می شود. این نقطه می تواند نقطه کمینه، نقطه بیشینه یا نقطه زین اسبی باشد.

این فرآیند به روش سراسستی تابع گون ها را تعمیم می دهد. فرض کنید u نقطه کمینه E باشد. اکنون با ثابت در نظر گرفتن δu به طوریکه $u + \tau \delta u$ جابه جایی مجاز برای تمام مقادیر کوچک τ باشد. این مقدار را در E جایگذاری می کنیم. در این صورت $E(u + \tau \delta u)$ تابعی از متغیر حقیقی τ است که در $\tau = 0$ به مقدار کمینه خود می رسد. اگر مشتق این تابع نسبت به τ وجود داشته باشد، آنگاه این مقدار در $\tau = 0$ برابر صفر می شود:

$$\delta E = \frac{d}{d\tau} E(u + \tau \delta u) \Big|_{\tau=0} = 0$$

برای هر δu به طوری که $u + \tau \delta u$ برای هر مقدار کوچک τ مجاز است.

δE اولین تغییرات تابع گون E نامیده می شود. صفرهای آن را نقاط پایدار E می نامند، که شبیه نقاط پایداری تابع معمولی f هستند. معادله به دست آمده شرط لازم برای u است که نقطه کمینه E باشد.

فرض کرده ایم که جابه جایی های $u + \delta u$ برای تمام مقادیر کوچک τ مجاز باشند. به طور آشکار اگر تمام مشتقات تا مرتبه دوم u و δu روی V پیوسته باشد، آنگاه این شرط برای $u + \tau \delta u$ نیز برقرار است. لازم است که u روی قیدهای جنبشی Σ_1 صادق باشد. بنابراین اگر δu در رابطه زیر صدق کند، در نتیجه

$$\delta u|_{\Sigma_1} = 0,$$

برای هر τ ، $u + \tau \delta u$ در قیدهای جنبشی صدق می کند. در این حالت τ جابه جایی مجازی نامیده می شود.

توجه داشته باشید که تعریف δE را می توان برای هر E تا حدودی ملایم، به کار گرفت. (این موضوع را بدون استدلال می پذیریم، زیرا برای تعریف دقیق نیاز به داشتن

زمینه‌ای درباره آنالیز تابعی داریم.) این را مشتق گاتیو تابعی نامیده می‌شود. در نماد δE علامت δ همانند فرمول مشابه با آن چیزی که در دیفرانسیل تابع دیده می‌شود روی E عمل می‌کند. جابه‌جایی مجازی را با δu نمایش می‌دهیم که پیشتر با v نمایش داده شده است، اما برای توضیح دقیق لازم است که آن را به صورت جابه‌جایی مجازی در نظر بگیریم. این بدان معنا است که علامت δ در این حالت صرفاً یک نماد بوده و نه به صورت یک عمل و تنها به دلایل تاریخی از آن به عنوان عمل استفاده می‌شود. وقتی عمل δ روی تابع معمولی به کار گرفته می‌شود، همانند عمل گرفتن دیفرانسیل مرتبه اول است. در این حالت، دیفرانسیل متغیرها با استفاده از علامت δ به جای d نوشته می‌شود، به عنوان مثال $\delta(x^2) = 2x \delta x$.

اکنون با استفاده از تعریف، مقدار δE را برای مساله خود به دست می‌آوریم:

$$\delta E = \int_V \delta W(\varepsilon) dV - \int_V \rho f \cdot \delta u dV - \int_{\Sigma_2} t^0 \cdot \delta u d\Sigma.$$

با محاسبه δW در انتگرالده و یادآوری اینکه در مراحل میانی می‌توان از فرمول‌های دیفرانسیل مرتبه اول استفاده کرد، به دست می‌آوریم:

$$\delta W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \delta(\varepsilon \cdot C \cdot \varepsilon) = \varepsilon \cdot C \cdot \delta \varepsilon = \sigma \cdot \delta \varepsilon,$$

که

$$\delta \varepsilon = \varepsilon(\delta u) = \frac{1}{2} \left(\nabla \delta u + (\nabla \delta u)^T \right).$$

این رابطه ایجاب می‌کند:

$$\delta E = \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon dV - \int_V \rho f \cdot \delta u dV - \int_{\Sigma_2} t^0 \cdot \delta u d\Sigma.$$

اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای بین جواب مساله تعادل جسم کشسان و مساله کمینه برای E پیدا کنیم. با قضیه زیر شروع می‌کنیم.

قضیه ۵-۶. نقطه پایداری u مربوط به E روی مجموعه‌ای از جابه‌جایی‌های مجاز در معادلات تعادل جسم کشسان روی حجم V و شرط مرزی $n \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = t^0$ صادق است و برعکس.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\mathbf{u}$ جواب مساله تعادل جسم کشسان تحت بارگذاری، یک نقطه پایداری از E است. یعنی:

$$\delta E = 0$$

که $\mathbf{u}$ جواب بوده و $\delta \mathbf{u}$ جابه‌جایی مجازی دلخواه است. فرض کنید که $\mathbf{u}$ در روابط زیر صادق است:

$$V \text{ در } \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = \mathbf{t}^0. \quad (۴۵-۶)$$

معادله تعادل را در $\delta \mathbf{u}$ مجاز ضرب داخلی کرده و روی V انتگرال‌گیری می‌کنیم. سپس با به‌کارگیری قضیه گاوس-استروگراسکی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V [(\nabla \cdot \sigma) \cdot \delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}] dV \\ &= \int_V [-\sigma \cdot (\nabla \cdot \delta \mathbf{u})^T + \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}] dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma \\ &= \int_V [-\sigma \cdot \delta \varepsilon + \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}] dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma \\ &= -\delta E. \end{aligned}$$

در اینجا از این حقیقت که $\delta \mathbf{u} = 0$ روی Σ_1 و $\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{t}^0$ روی Σ_2 استفاده شده است. بنابراین $\mathbf{u}$ یک نقطه پایداری از E است.

اکنون قسمت گزاره عکس را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{u}$ یک نقطه پایداری از E باشد به طوری که در معادله $\delta E = 0$ برای هر $\delta \mathbf{u}$ مجازی تا حدودی ملایم صادق است و $\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0$. نشان خواهیم داد که $\mathbf{u}$ در معادلات تعادلی V همانند شرط تماسی $\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{t}^0$ روی Σ_2 صادق است. در حقیقت با انجام محاسبات بالا در جهت معکوس، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\delta E &= \int_V \sigma_{..} \delta \varepsilon dV - \int_V \rho f \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Sigma_2} t^0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma \\
&= \int_V \sigma_{..} (\nabla \cdot \delta \mathbf{u})^T dV - \int_V \rho f \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Sigma_2} t^0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma \\
&= - \int_V [(\nabla \cdot \sigma) \cdot \delta \mathbf{u} + \rho f \cdot \delta \mathbf{u}] dV + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma - \int_{\Sigma_2} t^0 \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma \\
&= - \int_V [\nabla \cdot \sigma + \rho f] \cdot \delta \mathbf{u} dV \\
&\quad + \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma - \int_{\Sigma_2} [\mathbf{n} \cdot \sigma - t^0] \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma.
\end{aligned}$$

به دلیل اینکه $\delta \mathbf{u} = 0$ روی Σ_1 ، در نهایت به دست می آوریم:

$$\delta E = - \int_V [\nabla \cdot \sigma + \rho f] \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Sigma_2} [\mathbf{n} \cdot \sigma - t^0] \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma = 0. \quad (۴۶-۶)$$

فرض شد که $\mathbf{u}$ به حد کافی ملایم است تا انتگرالدهای بالا پیوسته باشند. از آنجایی که $\delta \mathbf{u}$ مجاز دلخواه بود، از تساوی بالا داریم:

$$\text{در } V \quad \nabla \cdot \sigma + \rho f = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = t^0. \quad (۴۷-۶)$$

برای بررسی آخرین مرحله به موضوعات معتبر موجود در حساب تغییرات نیاز است. این بحث را تا پایان بخش حاضر به تعویق می اندازیم.

اکنون می خواهیم ثابت کنیم که:

قضیه ۶-۶. فرض کنید که $\mathbf{u}$ یک جوابی از مساله مرزی (۴۵-۶) باشد. در این صورت E نقطه کمینه مطلق است.

اثبات. مطلب بالا نتیجه ای از این حقیقت است که W به شکل مربعی مثبت نسبت به ε است. در حقیقت فرض می شود که $\mathbf{v}$ یک جابه جایی مجاز اختیاری است که به قدر کافی ملایم بوده و در شرط جنبشی $\mathbf{v}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0$ صادق است. با در نظر گرفتن تفاضل زیر:

$$\Delta E = E(\mathbf{v}) - E(\mathbf{u}).$$

به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \int_v W(\varepsilon(\mathbf{v})) dV - \int_v \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{v} d\Sigma \\
 &\quad - \int_v W(\varepsilon(\mathbf{u})) dV + \int_v \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} d\Sigma \\
 &= \int_v [W(\varepsilon(\mathbf{v})) - W(\varepsilon(\mathbf{u}))] dV \\
 &\quad - \int_v \rho \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Sigma.
 \end{aligned}$$

فرض کنید $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. به دلیل انطباق $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ روی Σ_1 ، به دست می‌آوریم $\mathbf{w}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}$. سپس:

$$\begin{aligned}
 2[W(\varepsilon(\mathbf{v})) - W(\varepsilon(\mathbf{u}))] &= \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \\
 &= \varepsilon(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{w}) + 2\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{w}).
 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \frac{1}{2} \int_v \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{w}) dV \\
 &\quad + \int_v \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{w}) dV - \int_v \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{w} d\Sigma.
 \end{aligned}$$

مجموع جملات خط دوم بیان کننده δE در $\mathbf{u}$ است که $\delta \mathbf{u} = \mathbf{w}$ جابه‌جایی مجازی بوده، در نتیجه برابر صفر است. بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon(\mathbf{w}) dV = \int_v W(\varepsilon(\mathbf{w})) dV. \quad (۴۸-۶)$$

از آنجایی که W دارای شکل معین مثبت است، برای هر $\mathbf{v}$ مجاز داریم $\Delta E \geq 0$. در نتیجه $\mathbf{u}$ یک کمینه کننده مطلق E است.

دو قضیه قبل توسط اصل وردشی لاگرانژ قابل خلاصه شده است.

قضیه ۶-۷. جواب مساله تعادل برای جسم کشسان معادل است با مساله کمینه سازی

انرژی مطلق تابع گون E روی مجموعه تمام میدان‌های جابه‌جایی ملایم جنبشی.

برای تکمیل اثبات قضیه (۵-۶) باید چگونگی به دست آوردن (۴۷-۶) از (۴۶-۶) را نشان داد. کافی این موضوع را برای یکی از معادلات مولفه‌ای به دست آوریم. k -امین مولفه عبارت‌های درون براکت‌های (۴۶-۶) را به ترتیب با F و f ، k -امین مولفه از $\delta \mathbf{u}$ را با

δu نمایش داده و با در نظر گرفتن مولفه‌های باقیمانده δu برابر صفر، معادله (۶-۴۶) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_V F \delta u \, dV + \int_{\Sigma_2} f \delta u \, d\Sigma = 0. \quad (۶-۴۹)$$

معادله (۶-۴۷) از قضیه زیر به دست می‌آید.

قضیه ۶-۸. فرض کنید F روی V پیوسته f و روی Σ_2 پیوسته باشد. فرض کنید (۶-۴۹) برای تمام توابع δu که روی Σ_1 برابر صفر است، به قدر کافی ملایم باشد. بنابراین:

$$f = 0 \text{ روی } \Sigma_2, \quad F = 0 \text{ در } V$$

اثبات. اثبات را در دو مرحله انجام می‌دهیم. ابتدا با محدود کردن مجموعه تمام δu مجاز که روی کل مرز Σ صفر هستند، شروع می‌کنیم. پس (۶-۴۹) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\int_V F \delta u \, dV = 0.$$

فرض کنید که قضیه برقرار نباشد، یعنی $F(x_*) = a \neq 0$ در نقطه x_* . بدون کاستن از کلیت می‌توان x_* را یک نقطه درونی از V و $a > 0$ در نظر گرفت. به دلیل پیوستگی F گوی باز B_r با مرکز x_* و شعاع $r > 0$ وجود دارد که درون V قرار داشته به طوری که $F(x) > a/2 > 0$ روی B_r . اکنون با در نظر گرفتن تابع ملایم δu_0 که روی B_r مثبت بوده و در خارج آن صفر است، به دست می‌آوریم:

$$\int_V F \delta u_0 \, dV > 0,$$

این رابطه با تساوی بالا که باید برای تمام δu که بر روی مرز V صفر باشد، در تناقض است. آشکار است که چنین δu_0 موجود است، خواننده می‌تواند مثال‌هایی از "توابع گویی شکل" را در کتاب‌های درسی حساب تغییرات پیدا کند، رجوع شود به [الدوف و کلود (۲۰۰۳)]. بنابراین روی V به دست می‌آوریم $F = 0$.

مرحله دوم اثبات $f = 0$ روی Σ_2 است. برای انجام این عمل به (۶-۴۹) رجوع می‌کنیم. به دلیل اینکه $F = 0$ اولین انتگرال برای هر δu مجاز صفر است. بنابراین به دست می‌آوریم که:

$$\int_{\Sigma_2} f \delta u_0 d\Sigma = 0$$

برای تمام δu مجاز که مقادیر دلخواهی روی Σ_2 می‌گیرند، برقرار است. اما اکنون در وضعیتی مشابه با اثبات F هستیم. اثبات را می‌توان تکرار کرد اما روی دامنه دو بعدی Σ_2 ، در نتیجه روی Σ_2 به دست می‌آوریم $f = 0$. خواننده آشنا با حساب وردشی می‌تواند فرآیند بالا را که منجر به ویرایش از "لم اصلی" در آن مبحث است، تشخیص دهد.

قابل توجه است که چندین اصل وردشی در نظریه کشسانی وجود دارد. برخی از نوع کمینه بیشینه بوده و بقیه از نوع پایداری هستند. متذکر می‌شویم که این اصول نام‌های کاستیگلیانو، ریسنر، تونتی، هامیلتون و غیره را با خود یدک می‌کشد.

۶-۱۱ روش ریتز

اصل انرژی کمینه کل دارای اهمیت فیزیکی زیادی است. این موضوع همچنین به عنوان اساس معرفی تعمیم ساختار مساله تعادل نیز به کار می‌رود، که منجر به تعریف جواب‌های ضعیف در کشسانی می‌شود. این جواب‌ها دارای انرژی‌های کششی متناهی هستند. معادله وردشی $\delta E = 0$ اساس روش‌های عددی گوناگونی است همانند روش‌های ریتز و گالرکین، روش‌های وردشی تفاضل محدود و روش‌های عنصر محدود. کمینه بودن انرژی کل جواب تضمینی برای پایداری الگوریتم این روش‌ها است. خواننده برای جزییات بیشتر می‌تواند به مقالات تخصصی مراجعه کند. در اینجا روش ریتز را که هسته بقیه روش‌های بالا است، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اصل انرژی کمینه کل بیان می‌کند که جواب مساله تعادل بر حسب جملاتی از $\mathbf{u}$:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = \mathbf{t}^0,$$

دارای یک نقطه کمینه مطلق از انرژی کل تابعی روی مجموعه جابه‌جایی‌های مجاز است:

$$E = \int_V W(\varepsilon) dV - \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} d\Sigma$$

عکس این موضوع نیز برقرار است، بنابراین با توجه به قضیه یکتایی این نقطه هم کمینه است. والتر ریتز (۱۸۷۸-۱۹۰۹) نشان داد که با به دست آوردن نقطه کمینه زیر مجموعه های جابه جایی های مجاز، می توان به تقریبی برای جواب دست یافت. ایده قطعی عبارت است از چگونگی انتخاب این زیر مجموعه به گونه ای که حل مساله تقریبی کمینه به شکل ساده ای تبدیل شود. ریتز کمینه سازی E روی مجموعه ای از جابه جایی ها را به شکل زیر پیشنهاد داد:

$$\mathbf{u}_N = \sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k + \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{u}^*|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0, \quad \varphi_n|_{\Sigma_1} = 0 \quad (50-6)$$

در اینجا φ_k ثابت بوده و $\mathbf{u}^*$ توسط ضرایب عددی u_k تعیین می شود. اولین مرحله یافتن تابع برداری نسبتاً ملایم $\mathbf{u}^*$ است که در شرط $\mathbf{u}^*|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0$ صدق می کند. سپس مجموعه هایی از عناصر پایه φ_k که روی Σ_1 صفر هستند را انتخاب می کنیم. آشکار است که هر $\mathbf{u}_N$ در شرط جنبشی $\mathbf{u}_N|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}^0$ صادق است.

در زمان ریتز که محاسبات به صورت دستی انجام می گرفت، انتخاب پایه دارای اهمیت فراوانی بود زیرا یک مهندس نیاز به یافتن تعدادی ضرایب u_k در زمان مشخصی بود. اکنون با رایانه های قدرتمند، تعداد عناصر پایه می تواند افزایش یابد. اولین درباریست برای عناصر پایه این است که آنها مجموعه مستقل خطی را تشکیل دهند. درباریست دیگر این است که با استفاده از پایه بتوان جوابی تقریباً دقیقی به دست آورد. این موضوع را دنبال نکرده زیرا به مطالعات جدی ریاضی نیاز دارد.

اکنون مساله کمینه سازی ریتز را برای N -امین تقریب به صورت فرمولی بیان می کنیم:

E را روی مجموعه تمام $\mathbf{u}_N$ صادق در (۵۰-۶) کمینه می کنیم. یعنی عبارت زیر را به دست می آوریم:

$$\tilde{\mathbf{u}}_N = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k + \mathbf{u}^*$$

به طوری که:

$$E(\tilde{\mathbf{u}}_N) \leq E(\mathbf{u}_N) \quad \text{برای هر } \mathbf{u}_N \text{ از مجموعه (۵۰-۶)}$$

که:

$$E(\mathbf{u}_N) = \int_V W(\varepsilon(\mathbf{u}_N)) dV - \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_N dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u}_N d\Sigma.$$

به دلیل ثابت بودن $\mathbf{u}^*$ باید $E(\mathbf{u}_N)$ را روی فضای خطی N بعدی تولید شده توسط $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ کمینه کنیم. بنابراین باید مقادیر ضرایب حقیقی $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N$ را پیدا کنیم. با توجه به قضیه کمینه روی کل مجموعه جابه‌جایی‌های مجاز خواهیم داشت که $E(\mathbf{u}_N)$ دارای یک نقطه کمینه در فضای تولید شده است.

اکنون به روشی عملی برای یافتن ضرایب کمینه کننده E نیاز داریم. فرض کنید عبارت $E(\mathbf{u}_N)$ را با جزییات بیشتری بنویسیم. نماد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\langle u, v \rangle = \int_V \varepsilon(u) \cdot C \cdot \varepsilon(v) dV. \quad (۵۱-۶)$$

توجه داشته باشید که $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ و اینکه $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ دو برابر انرژی کششی میدان جابه‌جایی $\mathbf{u}$ است. این شکل $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ می‌تواند به‌عنوان ضرب داخلی در فضای خطی $\mathbf{u}$ به قدر کافی ملایم که $\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}$ به طوریکه عبارت $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ معنادار باشد، در نظر گرفت. سپس عبارت‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$f_m = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \varphi_m dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot \varphi_m d\Sigma - \langle \mathbf{u}^*, \varphi_m \rangle$$

و

$$F = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u}^* d\Sigma - \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^* \rangle.$$

دراین نمادگذاری داریم:

$$E(\mathbf{u}_N) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N v_m v_n \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle - \sum_{n=1}^N f_n v_n - F.$$

بنابراین $E(\mathbf{u}_N)$ تابع مربعی با N متغیر u_n بوده و می‌توان ابزار استاندارد حسابگان را به کار برد. معادلات لحظه‌ای زیر در نقطه کمینه $E(\mathbf{u}_N)$ باید برقرار باشند:

$$\frac{\partial E(\mathbf{u}_N)}{\partial u_m} = 0 \quad (m = 1, \dots, N)$$

با نوشتن این معادلات به صورت زیر، دستگاهی از معادلات جبر خطی به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^N u_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = f_m \quad (m = 1, \dots, N), \quad (52-6)$$

ماتریس این دستگاه به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_3, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_N, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_3, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_N, \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle & \langle \varphi_3, \varphi_3 \rangle & \cdots & \langle \varphi_N, \varphi_3 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1, \varphi_N \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_N \rangle & \langle \varphi_3, \varphi_N \rangle & \cdots & \langle \varphi_N, \varphi_N \rangle \end{pmatrix}.$$

دترمینان $\det(A)$ ، دترمینان گرام است. در جبر خطی نشان داده می‌شود که هر دستگاه مستقل خطی از عناصر دترمینان گرام غیر صفر بوده و برعکس. اما عناصر $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ با توجه به فرض مستقل خطی بوده، بنابراین (۵۲-۶) دارای جوابی یکتا است.

اکنون می‌خواهیم سوال مربوط به همگرایی تقریب‌های ریتز را مورد بررسی قرار دهیم. استفاده از عبارت "تقریب‌ها" به خودی خود نمی‌تواند جواب این سوال باشد که آیا $\mathbf{u}_N$ به‌طور واقعی به جواب مورد نظر نزدیک است یا خیر.

مساله را دوباره فرمول‌بندی می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbf{u}$ جوابی برای مساله تعادل تحت بررسی باشد. در این صورت N امین تقریب روش ریتز، تابعی $E(\mathbf{u}_N) - E(\mathbf{u})$ را نیز کمینه می‌کند. اما طبق فرمول (۴۸-۶) در اثبات قضیه ۶-۶ داریم:

$$E(\mathbf{u}_N) - E(\mathbf{u}) = \int_V W(\varepsilon(\mathbf{u}_N - \mathbf{u})) dV. \quad (53-6)$$

به دلیل اینکه W دارای شکل معین مثبت است، اگر بتوان هر جابه‌جایی مجاز $\mathbf{u}$ را با $\mathbf{u}_N$ تقریب زد آنگاه فرآیند کمینه‌سازی همگرا به نظر می‌رسد. معنای این موضوع این است که باید جابه‌جایی‌های مورد نظر را با حد بالایی $E(\mathbf{u}_N) - E(\mathbf{u}) \rightarrow 0$ وقتی $N \rightarrow \infty$ تقریب زد. بنابراین برای رسیدن به یک تقریب کافی است که مجموعه φ_m کامل باشد یعنی برای هر $\mathbf{v}$ مجازی که $\mathbf{v}|_{\Sigma_1} = 0$ و $\varepsilon > 0$ ، بتوان $\tilde{\mathbf{u}}_n$ پیدا کنیم که:

$$\int_V W(\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v})) dV < \varepsilon.$$

در عمل دستگاه‌های کاملی را می‌توان پیدا کرد اما اثبات کامل بودن آسان نیست. با داشتن مجموعه کامل پایه‌ای از φ_m به نظر می‌رسد مطالب زیر قابل بیان است. به دلیل اینکه N امین تقریب ریتز بهترین تقریب جواب از تمام تقریب‌های ممکن است، با توجه به کامل بودن φ_m بلافاصله همگرایی تقریب‌های ریتز $\mathbf{u}_N$ با $\mathbf{u}$ به دست می‌آید، یعنی:

$$\int_V W(\varepsilon(\mathbf{u}_N - \mathbf{u})) dV \rightarrow 0 \quad \text{وقتی که } N \rightarrow \infty \quad (۵۴-۶)$$

متأسفانه این آرگومان فقط ظاهر قشنگی دارد!

برای تقریب‌های ریتز می‌توان نشان داد که رابطه زیر برقرار است:

$$\int_V W(\varepsilon(\mathbf{u}_N) - \varepsilon(\mathbf{u}_M)) dV \rightarrow 0 \quad \text{وقتی که } N, M \rightarrow \infty$$

بنابراین به نظر می‌رسد که $\{\mathbf{u}_N\}$ به صورت دنباله کوشی در انرژی انتگرال است. متأسفانه تنها با به کارگیری حسابان کلاسیک نمی‌توان نتیجه گرفت که عنصر حدی وجود دارد و دارای خواص معینی است. این موضوعات در نظریه فضاهای سوبولف مورد بحث قرار گرفته است. مهندس‌هایی که از روش ریتز استفاده می‌کنند باید بدانند که با تقریب‌های ملایمی که توابع معمولی نیستند کار می‌کنند اما توابع حدی و سوالات همگرایی در موضوعات تحلیلی تابعی قرار دارد، به عنوان مثال [لبدف و کلود (۲۰۰۳)] را نگاه کنید.

اغلب مهندسين تلاش می‌کنند که کمبود بررسی‌های نظری را به وسیله آزمایش اصلاح کنند. به هر حال آزمایش‌ها بسیار محدود بوده و نمی‌توانند بررسی واقعی در تمام حالت‌های عملی را داشته باشند. آنها تنها از عقیده‌ای حمایت می‌کنند که نگرش کاربردی بودن روش در آن لحاظ شده باشد.

نامساوی کورن

نامساوی کورن برای سوالات کیفی مختلف در مورد جواب‌های مسایل کشسانی، نقش مهمی را ایفا می‌کند. این نامساوی بیان می‌کند که هر جابه‌جایی با انرژی محدود به

فضای $W^{1,2}(V)$ تعلق دارد، یعنی مشتقات مرتبه اول تمام مولفه‌های دیکارتی آن دارای انتگرال مضاعف است. اغلب این موضوع می‌تواند تخمینی برای میدان جابه‌جایی از طریق عبارت انرژی کششی به‌دست دهد.

یک شکل نامساوی کورن به‌صورت زیر است:

$$\int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) dV \leq c \int_V W(\varepsilon(\mathbf{u})) dV \quad (55-6)$$

که برای $\mathbf{u}$ به قدر کافی ملایم با ثابت c که تنها روی V وابسته هستند و Σ_1 قسمت مرزی است که $\mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}$ از آنجایی که $W(\varepsilon(\mathbf{u}))$ دارای شکل مربعی معین مثبت بر حسب ε است و به مقدار دقیق c علاقه‌ای نداریم، می‌توان $W(\varepsilon(\mathbf{u}))$ را به $A \cdot \text{tr}(\varepsilon \cdot \varepsilon)$ تغییر داد. اثبات کلی $\Sigma_1 \neq \Sigma$ مشکل است [سیارلت (۱۹۸۸)]، بنابراین نامساوی برای حالت $\mathbf{u}|_{\Sigma} = \mathbf{0}$ به‌دست می‌آوریم. اثبات خواهیم کرد که رابطه زیر از (۵۶-۶) به‌دست می‌آید:

$$\int_V (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) dV \leq 2 \int_V \text{tr}(\varepsilon \cdot \varepsilon) dV, \quad (56-6)$$

رابطه بالا در دستگاه مختصات دیکارتی به صورت زیر است:

$$\int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} \right)^2 dV \leq 2 \int_V \left(\sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}^2 \right) dV.$$

قسمت دیگر نامساوی برای u_i از نامساوی فردریک به‌دست می‌آید:

$$\int_V \sum_{i=1}^3 |u_i|^2 dV \leq c_1 \int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} \right)^2 dV,$$

در اینجا برای هر تابع ملایم c_1 که روی مرز صفر باشد، ثابت u_i مستقل از u_i است. برای اثبات این مطلب [لبدف و کلود (۲۰۰۳)] را نگاه کنید. بنابراین (۵۶-۶) را اثبات کردیم. بر روی مرز $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_V \text{tr}(\varepsilon \cdot \varepsilon) dV &= \frac{1}{2} \int_V \left[\text{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T) + \text{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \int_V \text{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dV. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه گاوس-استروگراسکی می‌توان انتگرال آخر را به شکل دیگری نوشت:

$$\begin{aligned}\int_V \text{tr}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) dV &= \int_V \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = - \int_V u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} dV \\ &= \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 dV.\end{aligned}$$

پس

$$2\|\varepsilon\|^2 = \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 dV.$$

نامساوی (۵۶-۶) از مثبت بودن جمله دوم به دست می آید.

۶-۱۲ اصل وردشی ریلی

اصل انرژی کمینه کل که اغلب با اصل لاگرانژ شناخته می شود، برای مسایل تعادل فرمول بندی می شود اما برای مسایل دینامیکی مورد استفاده قرار نمی گیرد. اما یک مساله دینامیکی مهمی وجود دارد که برای آن اصل وردشی بر اساس ایده مشابه کمینه سازی در نظر گرفته می شود. این موضوع مساله ویژه نوسان برای جسم کشسان است. در این مساله خواهان یافتن جواب هایی برای مساله همگن دینامیکی در جابه جایی ها به شکل زیر هستیم:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (57-6)$$

معادلات مساله دینامیکی عبارتند از:

$$V \text{ در } \nabla \cdot \sigma = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = \mathbf{0}. \quad (58-6)$$

این روابط با جایگذاری (۵۷-۶) در (۵۸-۶) بر حسب جابه جایی ها بیان می شود و با حذف عامل $e^{i\omega t}$ به دست می آوریم:

$$V \text{ در } \nabla \cdot \sigma = -\rho \omega^2 \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = \mathbf{0}. \quad (59-6)$$

در اینجا σ به صورت است:

$$\sigma = \mathbf{C} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T \right).$$

با معادلات (۵۹-۶) مساله مقدار ویژه ساخته می‌شود: باید مقدار مثبت ω را که به عنوان ویژه بسامد جسم کشسان شناخته می‌شود، پیدا کرده به‌طوری‌که (۵۹-۶) دارای جواب غیر بدیهی w به نام ویژه نوسان است.

این موضوع را می‌توان نشان داد که مساله دارای تنها ویژه بسامدهای نامنفی است که w تنها دارای مولفه حقیقی بوده و مجموعه ویژه بسامدها شمارش پذیر باشد. برای تشریح شمارش پذیر بودن مجموعه ویژه بسامدها و نشان دادن نحوه تشکیل پایه در فضای مدی با انرژی محدود برای هر مجموعه کامل از ویژه مدهای مستقل خطی، نیاز به تکنیک‌هایی است که از حوصله این کتاب خارج است. توجه داشته باشید که در این اثبات‌ها به V با حجمی فشرده که مرزی به قدر ملایم دارد، نیاز است. عبارت "به قدر کافی ملایم" نیاز عملی مهندسی را پوشش می‌دهد: مرز نمی‌تواند دارای گوشه باشد در حالی که V می‌تواند به‌صورت هرم یا مخروط باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که هر ویژه بسامد ω حقیقی بود و همچنین نامنفی است. فرض کنید بر خلاف موضوع، ω عدد مختلطی است به‌طوری‌که مد متناظر آن $\bar{w}$ نیز مقدار مختلطی داشته باشد. با ضرب نقطه‌ای معادله اول از (۵۹-۶) در $\bar{w}$ و انتگرال‌گیری روی V به‌دست می‌آوریم:

$$\int_V (\nabla \cdot \sigma) \cdot \bar{w} dV = -\omega^2 \int_V p w \cdot \bar{w} dV.$$

با به کارگیری قضیه گاوس-استروگراسکی در سمت چپ، به‌دست می‌آوریم:

$$\int_V \sigma \cdot \bar{\varepsilon} dV = \omega^2 \int_V p w \cdot \bar{w} dV. \quad (۶۰-۶)$$

از آنجایی که $\sigma \cdot \bar{\varepsilon} \geq 0$ و $p w \cdot \bar{w} \geq 0$ ، رابطه (۶۰-۶) ایجاب می‌کند که ω^2 عدد حقیقی نامنفی است، پس ω نیز چنین است. به‌دلیل اینکه معادله ویژه بسامد بر حسب ضرایب مقدار حقیقی، خطی هستند، در نتیجه قسمت‌های حقیقی و موهومی هر ویژه جواب نیز خود ویژه جواب است.

مهندسی‌ن علاقه زیادی به برخی محدوده‌های ویژه بسامدها دارند، مثلاً کمترین یا آنهایی که دارای دامنه محدودی هستند.

توجه داشته باشید که مسایل مقدار مرزی اول و سوم دارای ویژه بسامدهای کمینه مثبت است. همچنین $\omega = 0$ در مساله (۵۹-۶) توسط معادلات تعادل تشریه شده و با

توجه به یکتایی تنها یک جواب صفر $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ داریم. در صورتی که $\Sigma_2 = \Sigma$ به مقدار $\omega = 0$ متناظر با جوابی غیر بدیهی است، جابه‌جایی جسم کاملاً صلب برای مساله مقدار مرزی دوم به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \omega_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

با مقادیر ثابت اما اختیاری $\mathbf{w}_0, \omega_0$ و $\mathbf{r}_0$ در اینجا خود را به حالت مثبت ω محدود می‌کنیم.

با توجه به خطی بودن مساله، اگر $\mathbf{w}$ یک ویژه جواب باشد آنگاه $a\mathbf{w}$ نیز برای هر اسکالر a چنین است. به‌طور خاص a را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $a\mathbf{w}$ در نرم L^2 یکه باشد. چنین ویژه جوابی را مد نوسانی می‌نامند. قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۶-۹. برای هر ویژه مدهای نوسانی $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}^2$ به ترتیب متناظر با ویژه بسامدهای ω_1 و ω_2 رابطه زیر برقرار است

$$\int_V \rho \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \, dV = 0 \quad (۶-۶۱)$$

همچنین:

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0. \quad (۶-۶۲)$$

تساوی (۶-۶۱) رابطه متعامدی و رابطه (۶-۶۲) رابطه تعمیم یافته متعامدی بین $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ است.

اثبات. این اثبات همانند قضیه (۳-۲) است. فرض کنید $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ در روابط زیر صادق است:

$$\nabla \cdot \sigma_1 = -\rho \omega_1^2 \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{w}_1|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma_1|_{\Sigma_2} = \mathbf{0},$$

و

$$\nabla \cdot \sigma_2 = -\rho \omega_2^2 \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{w}_2|_{\Sigma_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma_2|_{\Sigma_2} = \mathbf{0},$$

در اینجا $\sigma_k = \mathbf{C} \cdot \varepsilon_k$ و $\varepsilon_k = \varepsilon(\mathbf{w}_k)$. معادله اول مربوط به V در $\mathbf{w}_2$ را ضرب نقطه‌ای کرده و بر روی V انتگرال‌گیری می‌کنیم. با به‌کارگیری قضیه گاوس-استروگراسکی داریم:

$$-\int_V \sigma_1 \dots \varepsilon_2 dV + \omega_1^2 \int_V \rho w_1 \cdot w_2 dV = 0 \quad (۶۳-۶)$$

به طور مشابه:

$$-\int_V \sigma_2 \dots \varepsilon_1 dV + \omega_2^2 \int_V \rho w_2 \cdot w_1 dV = 0$$

با کم کردن این دو معادله انتگرال از هم و با به کارگیری $\sigma_1 \dots \varepsilon_2 = \sigma_2 \dots \varepsilon_1$ به دست می آوریم:

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) \int_V \rho w_1 \cdot w_2 dV = 0$$

رابطه (۶۱-۶) از این واقعیت که $\omega_1 \neq \omega_2$ به دست می آید. با جایگذاری این مقدار در تساوی بالا، (۶۲-۶) به دست می آید. □

از نظر ریاضی قضیه ۹-۶ بیان می کند که ویژه مدهای نوسانی متناظر با ویژه بسامدهای جدا از هم در فضای $L_2(V)$ با وزن ρ متعامد هستند. از رابطه (۶۳-۶) نتیجه می شود که همچنین آنها نسبت به ضرب داخلی انرژی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ متعامد هستند. اگر برخی از ω با تعداد کمی از ویژه مدهای مستقل خطی متناظر باشند، با به کارگیری فرآیند گرام-اشمیت همیشه می توان مجموعه متعامدی از ویژه مدهای متناظر را ایجاد کرد. [یوشیدا (۱۹۸۰)] را نگاه کنید.

این تعامد اساس کاربرد عملی برای اصل وردشی ریلی که در زیر می آید، است.

قضیه ۱۰-۶. ویژه مدها برابر با نقاط پایداری از تابعی انرژی

$$E_0(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_V W(\varepsilon(\mathbf{w})) dV$$

روی مجموعه جابه جایی های صادق در شرایط مرزی $\mathbf{w}|_{\Sigma_1} = 0$ و قیدهای مورد نظر است:

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV = 1. \quad (۶۴-۶)$$

برعکس، تمام نقاط پایداری $E_0(\mathbf{w})$ روی مجموعه بالایی جابه جایی ها برابر با ویژه مدهای جسم متناظر با ویژه بسامدها است.

اثبات. اکنون شرط پایداری $E_0(\mathbf{w})$ را می نویسیم. با استفاده از دلیل مشابه با اثبات قضیه ۳-۶ به دست می آوریم:

$$\delta E_0 = - \int_V (\nabla \cdot \sigma) \cdot \delta \mathbf{w} dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \delta \mathbf{w} d\Sigma = 0 \quad (۶۵-۶)$$

این رابطه باید روی مجموعه جابه‌جایی‌ها با محدودیت‌های توصیف شده در صورت قضیه در نظر گرفته شود. بنابراین $\delta \mathbf{w}$ همانند آنچه در قضیه ۶-۳ آمد، مستقل نبوده اما در شرط زیر صادق است:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV - 1 \right) = \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \delta \mathbf{w} dV = 0. \quad (۶۶-۶)$$

در حسابگان با استفاده از ضرایب لاگرانژ، کمینه تابع را به همراه قیود آن به دست می‌آوریم. این روش را با مساله تابعی خود تطبیق می‌دهیم. اکنون برای $E_0(\mathbf{w})$ مقدار زیر را اضافه می‌کنیم:

$$-\lambda \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV - 1 \right)$$

در اینجا λ ضریب نامعین است (این مقدار را ضریب لاگرانژ می‌نامیم). اکنون تابعی $\tilde{E}_0(\mathbf{w}, \lambda)$ وابسته به متغیرهای $\mathbf{w}$ و λ را تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{E}_0(\mathbf{w}, \lambda) = E_0(\mathbf{w}) - \lambda \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV - 1 \right).$$

در اینجا $\mathbf{w}$ به عنوان قید در نظر گرفته نمی‌شود. می‌توان نشان داد که $\mathbf{w}$ از نقطه پایداری $(\mathbf{w}, \lambda)$ مربوط به $\tilde{E}_0$ ، یک نقطه پایداری $E_0(\mathbf{w})$ تحت قید (۶۴-۶) است. در حقیقت $\delta \tilde{E}_0 = 0$ برابر است با:

$$\delta \tilde{E}_0 = \delta E_0 - \lambda \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \delta \mathbf{w} dV - (\delta \lambda) \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV - 1 \right) = 0,$$

که δE_0 با رابطه (۶۵-۶) داده می‌شود. به دلیل اینکه $\mathbf{w}$ و λ مستقل هستند، $\delta \tilde{E}_0 = 0$ دو معادله هم‌زمان زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\delta E_0 - \lambda \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \delta \mathbf{w} dV = 0, \quad \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV - 1 = 0. \quad (۶۷-۶)$$

این موضوع نشان می‌دهد که خواص لازم به نقاط پایداری $\tilde{E}_0$ تعلق دارند. بنابراین هر نقطه پایداری $\tilde{E}_0(\mathbf{w}, \lambda)$ را بدون قیود روی $\mathbf{w}$ در نظر می‌گیریم. از معادله اول (۶۷-۶) به دست می‌آوریم:

$$-\int_V [(\nabla \cdot \sigma) \cdot \delta \mathbf{w} + \lambda \rho \mathbf{w} \cdot \delta \mathbf{w}] dV - \int_{\Sigma_2} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \delta \mathbf{w} d\Sigma = 0. \quad (6-68)$$

همانند مشتق مربوط به اصل انرژی کمینه کل، از تساوی انتگرالی برای هر $\delta \mathbf{w}$ دلخواه به دست می آوریم:

$$\nabla \cdot \sigma = -\rho \lambda \mathbf{w}, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma|_{\Sigma_2} = 0.$$

اگر λ را به ω^2 تغییر دهیم، این معادله با (6-59) برابر می شود. این موضوع بیان کننده ضریب لاگرانژ است: این با ویژه مقدار مربعی ω که نامنفی بودن آن در بالا اثبات شد، برابر است. بنابراین شرط پایداری $E_0(\mathbf{w})$ برای ویژه جواب های مساله (6-59) برقرار است.

اکنون قسمت برعکس را ثابت می کنیم. فرض کنید $\mathbf{w}$ جواب معادله زیر در V برای برخی ω است:

$$\omega \nabla \cdot \sigma = -\rho \omega^2 \mathbf{w}$$

با ضرب نقطه ای در $\mathbf{v}$ ، انتگرال گیری روی V و به کارگیری قضیه گاوس -استرگادوسکی به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V [(\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{v} + \omega^2 \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}] dV \\ &= \int_V [-\sigma_{..} \varepsilon(\mathbf{v}) + \omega^2 \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}] dV + \int_{\Sigma_2} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{v} d\Sigma, \end{aligned} \quad (6-69)$$

که:

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T).$$

اکنون $\mathbf{v}$ را به گونه ای انتخاب می کنیم که:

$$\int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dV = 0.$$

با در نظر گرفتن $\mathbf{v} = \delta \mathbf{w}$ خط دوم (6-69) را به δE_0 از رابطه (6-65) تبدیل می کنیم. بنابراین δE_0 که در ویژه مدها محاسبه شد، برابر صفر است. این اثبات را کامل می کند.

اصل ریلی را برای کاربردهای ساده مجدداً فرمول بندی می کنیم. در فرمول بندی جدید نیازی به شرط گذاشتن برای محدودیت های انتگرالی مجزا روی مجموعه $\mathbf{w}$ نیست.

قضیه ۶-۱۱. روی مجموعه‌ای از بردار-تابع‌های مجاز صادق در شرط $\mathbf{w}|_{\Sigma_1} = 0$ ، ویژه مدهای نوسانی با نقاط پایداری تابعی زیر برابر هستند:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV \quad \text{که} \quad R(\mathbf{w}) = \frac{E_0}{K},$$

$R(\mathbf{w})$ خارج‌قسمت‌ریلی نامیده می‌شود. به‌طور معکوس، نقطه پایداری بهنجار $R(\mathbf{w})$ ویژه مدی است که با برخی ویژه بسامدها است، مقدار $R(\mathbf{w})$ روی هر ویژه مد به صورت ویژه بسامد مربعی است.

اثبات. اثبات قسمت اول از اثبات قبلی نتیجه می‌شود. در حقیقت، اگر R در عامل ثابتی ضرب شود آنگاه $\mathbf{w}$ تغییر نمی‌کند. عاملی انتخاب می‌کنیم که:

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV = 1,$$

در این حال به‌دست می‌آوریم $R = E_0$.

اکنون نشان داده می‌شود که برای ویژه مد $\mathbf{w}$ متناظر با ویژه بسامد ω داریم:

$$R(\mathbf{w}) = \omega^2. \quad (۷۰-۶)$$

رابطه (۶-۵۹) را در $\mathbf{w}$ ضرب نقطه ای کرده، روی V انتگرال‌گیری می‌کنیم و قضیه گاوس-استروگراسکی را به‌کار می‌بریم. به‌دست می‌آوریم:

$$\int_V \sigma \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \omega^2 \int_V \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} dV,$$

که از آن (۶-۷۰) نتیجه می‌شود.

معادله (۶-۷۰) در علم مکانیک برای یافتن تقریبی مقادیر ویژه بسامدها بسیار زیاد استفاده می‌شود. پس از به‌کارگیری ویژه مد متعامد برای تقریب زدن ویژه مد مربوط به $\tilde{\mathbf{w}}$ می‌توان با استفاده از معادله زیر ویژه بسامد را تقریب زد:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{R(\tilde{\mathbf{w}})}.$$

خارج قسمت ریلی با بعد-متناهی، یک رده از روش‌های عددی برای دستگاه‌های بسیار تنک معادلات جبری خطی را به‌وجود می‌آورد. خواننده علاقمند می‌تواند به مقالات تخصصی رجوع کند.

۶-۱۳ امواج تخت

به دست آوردن جواب دقیقی برای مساله دینامیکی سخت تر از مساله تعادل است. گرچه مساله دینامیکی مهمی وجود دارد که به صورت تحلیلی قابل حل است. این، مساله امواج تخت در فضای نامحدود همگن نا همسان گرد است که از نیروهای بین جسمی آزاد است.

چنین جواب هایی که توصیف کننده انتشار صوتی از منبع بسیار است، مثلاً انفجار یا زمین لرزه های دور، اهمیت زیادی در کاربردها دارند. از طرف دیگر، نظریه مربوط به آنها نسبتاً ساده است و این بررسی به مساله مقدار ویژه جبری تبدیل می شود. جوابی به شکل زیر، موج تخت نامیده می شود:

$$\mathbf{u} = U(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{a}$$

در اینجا $\mathbf{k}$ بردار ثابتی که بردار موج نامیده می شود، ω بسامد، $\mathbf{a}$ بردار ثابت و $U = U(x)$ تابع مجهولی با متغیر $x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ است. معادله زیر نشان دهنده انتشار تخت در فضای $\mathbb{R}^3$ است:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const}$$

در هر لحظه بردار عمود بر صفحه با $\mathbf{k}$ موازی است. سرعت انتشار تخت $c = \omega/|\mathbf{k}|$ سرعت موج نامیده می شود. جواب این شکل برای هر انتشار تخت، ثابت است. بردار $\mathbf{k}$ جهت انتشار موج را تعریف می کند، به طوری که $\mathbf{a}$ جهت جابه جایی است. برای $\mathbf{u}$ می توان نوشت:

$$\nabla \mathbf{u} = U'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{k} \mathbf{a}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} U'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) (\mathbf{k} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{k}), \quad \ddot{\mathbf{u}} = \omega^2 U''(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{a},$$

در اینجا علامت پریم نشان دهنده مشتق نسبت به x که $x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ و نقاط بالای نشان دهنده مشتق نسبت به t است.

با استفاده از خواص تقارنی $\mathbf{C}$ قانون هوک را برای میدان جابه جایی بازنویسی می کنیم:

$$\sigma = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \mathbf{a}) U'.$$

با جایگذاری $\ddot{\mathbf{u}}$ و σ در معادله حرکت، به دست می آوریم:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \mathbf{a}) U'' = \rho \omega^2 U'' \mathbf{a}.$$

این معادله دارای جواب غیر منطقی نامناسب $U'' = 0$ است. به جواب‌های منطقی که توسط مساله جبری زیر تعریف می‌شود، نیاز داریم:

جواب منطقی معادله زیر را بیابید:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a} = \rho \omega^2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}. \quad (۷۱-۶)$$

$\mathbf{A}$ تانسور صوتی نامیده می‌شود.

یاد آور می‌شویم که $\mathbf{C}$ دارای برخی خواص تقارنی است و $\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ برای هر $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ مثبت است. به آسانی می‌توان بررسی نمود که $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ یک تانسور متقارن معین مثبت است. با در نظر گرفتن $\rho \omega^2$ به عنوان ویژه بردار $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ ، مساله ویژه مقدار (۷۱-۶) داریم که دارای سه ویژه مقدار مثبت است. به عبارت دیگر، از (۷۱-۶) می‌توان به دست آورد که برای هر $\mathbf{k}$ سه مقدار $\omega \cdot \mathbf{A}$ وجود دارد. هر موج تخت با هر کدام از این مقادیر متناظر است.

اکنون مساله موج تخت را برای محیط همسان گرد با جزییات بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهیم. پس:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E} \mathbf{E} + \mu (\mathbf{e}_k \mathbf{E} \mathbf{e}^k + \mathbf{I}),$$

در اینجا $\mathbf{E} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}^k$ تانسور یکه بوده و $\mathbf{I} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m$. تانسور صوتی به شکل زیر است:

$$\mathbf{A} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} = (\lambda + \mu) \mathbf{k} \mathbf{k} + \mu (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}. \quad (۷۲-۶)$$

اکنون یک دستگاه دکارتی با بردارهای پایه $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ به طوری که $|\mathbf{i}_1| = |\mathbf{i}_2| = |\tilde{\mathbf{k}}| = 1$ و $\mathbf{i}_1 \cdot \tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{i}_2 \cdot \tilde{\mathbf{k}} = 0$ است، در نظر می‌گیریم. برحسب این پایه، ماتریس $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ قطری است:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \mu |\mathbf{k}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu |\mathbf{k}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & (2\mu + \lambda) |\mathbf{k}|^2 \end{pmatrix}.$$

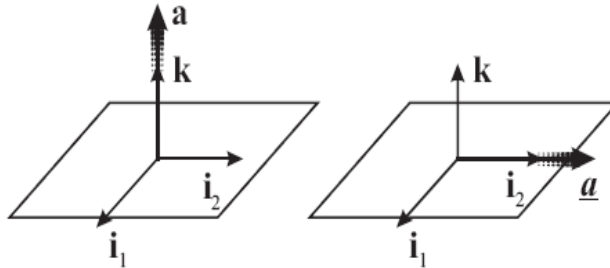
ویژه مقادیر و ویژه بردارهای (۷۱-۶) به شکل زیر است:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} |\mathbf{k}| \quad \mathbf{a} = \mathbf{i}_1,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} |\mathbf{k}| \quad \mathbf{a} = \mathbf{i}_2,$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} |\mathbf{k}| \quad \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{k}}.$$

دو جواب اول نشان دهنده/مواج عرضی بوده که جهت جابه‌جایی آنها $\mathbf{a}$ بوده که بر $\mathbf{k}$ یعنی جهت انتشار موج، عمود است. این نوع موج را اغلب/انتقاضی یا موج S می‌نامند. معادله سوم توصیف کننده موج طولی بوده که جهت جابه‌جایی آن در امتداد انتشار است (۶-۷). این نوع موج را اغلب/انبساطی، فشاری یا موج P می‌نامند. چنین جواب‌هایی در صوت و زلزله شناسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۶-۷. امواج تخت در محیط همسان‌گرد. سمت چپ، موج طولی است و سمت راست، موج عرضی است.

توجه داشته باشید که برای هر محیط ناهمسان‌گرد دلخواه، مساله بینایی توصیف کننده امواجی است که نه طولی بوده و نه عرضی.

تمرین ۶-۱۱. رابطه (۶-۷۲) را تحقیق کنید.

تمرین ۶-۱۲. ثابت کنید که $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ تانسوری متقارن است.

تمرین ۶-۱۳. نشان دهید که $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ معین مثبت است.

۶-۱۴ مسایل کشسانی تخت

دو بخش مهم از تغییر شکل مربوط به مسایل کشسانی را می‌توان به صورت ساده تغییر شکل کشش خطی و تنش خطی در نظر گرفت. مسایل مربوط به این دو تغییر شکل، مسایل کشسانی تخت نامیده می‌شود.

ابتدا مساله تغییر شکل تخت را بررسی می‌کنیم. A تغییر شکلی تخت نامیده می‌شود که تمام جابه‌جایی‌های نقاط جسم با یک صفحه موازی بوده و تنها به مختصات این صفحه بستگی دارد. با دقت قابل قبولی، این حالت همانند قسمت مرکزی جسمی به صورت استوانه درازی یا هرمی شکل است که توسط نیروهای محوری کشیده شده. بردار جابه‌جایی برای تغییر شکل تخت به شکل زیر است:

$$\mathbf{u} = u_1(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 + u_2(x_1, x_2)\mathbf{i}_2.$$

نیروهای تماسی و جسمی دارای شکل‌های مشابهی هستند:

$$\mathbf{f} = f_1(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 + f_2(x_1, x_2)\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{t}^0 = t_1(x_1, x_2)\mathbf{i}_1 + t_2(x_1, x_2)\mathbf{i}_2.$$

در دستگاه دکارتی، مولفه‌های تانسور کشش با اندیس‌های ۳ مربوط به $\mathbf{u}$ برابر صفر است: $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ بنابراین:

$$\varepsilon = \varepsilon_{11}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \varepsilon_{12}(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1) + \varepsilon_{22}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2.$$

با استفاده از قانون هوک، مولفه‌های تانسور تنشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{11} = \lambda \text{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda \text{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{22}, \quad \sigma_{33} = \lambda \text{tr} \varepsilon,$$

$$\sigma_{12} = \mu \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 0 \quad \sigma_{13} = 0,$$

در اینجا $\text{tr} \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$. از آنجایی که $\sigma_{33} = 0$ ، می‌توان σ_{33} را بر حسب σ_{11} و σ_{22} بیان کرد:

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

تمام مولفه‌های σ به x_3 بستگی ندارد که منجر به سادگی معادلات تعادل می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \rho f_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho f_2 = 0.$$

اکنون حالت خاصی را که نیروهای جسم برابر صفر هستند، بررسی می‌کنیم. با معرفی تابع تنش/یری Φ توسط روابط زیر:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (۷۳-۶)$$

به‌طور یکنواختی معادلات تعادل را برآورد می‌کند. از دستگاه معادلات بلترامی-میشل در سه مساله تخت، تنها سه معادله منطقی باقی می‌ماند:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} &= 0, \\ \Delta \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} &= 0, \\ \Delta \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \end{aligned} \quad (۷۴-۶)$$

که:

$$\sigma = \text{tr} \sigma = (1+\nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

(۷۳-۶) در (۷۴-۶) جایگذاری کنید. از آنجایی که:

$$\sigma = (1+\nu)\Delta\Phi,$$

معادله اول (۷۴-۶) معادله دو هارمونیک Φ تبدیل می‌شود:

$$0 = \Delta \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} = \Delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta \Phi = \Delta^2 \Phi.$$

معادله دوم (۷۴-۶) به معادله دو هارمونیک مشابهی تبدیل می‌شود، در حالی که معادله سوم (۷۴-۶) همواره برقرار است. بنابراین Φ در رابطه زیر صادق است:

$$\Delta^2 \Phi = 0. \quad (۷۵-۶)$$

این رابطه در مساله تخت، نقش معادله سازگاری را ایفا می‌کند که قصد حل کردن آن را داریم.

برای مساله کشش تخت می‌توان ساده سازی‌های مشابهی را انجام داد. این نوع تغییر شکل بر روی یک ورقه نازک که روی وجوه آن باری وجود ندارد، اتفاق می‌افتد. جهت x_3 را در امتداد بردار عمود بر وجوه ورقه در نظر می‌گیریم. اکنون با کوچک بودن

مولفه‌های کشش σ_{33} و σ_{13} می‌توان آنها را برابر صفر در نظر گرفت: $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. تساوی $\sigma_{33} = 0$ نشان می‌دهد که تغییر شکل کششی تخت از تغییر شکل تخت مربوط به مساله بالا $\sigma_{33} \neq 0$ متمایز است. تحلیل معادلات تعادل برای تغییر شکل تنشی تخت را می‌توان همانند بالا انجام داد.

تمرین ۶-۱۴. مولفه‌های ϵ برای تغییر شکل تنشی تخت را بیابید.

تمرین ۶-۱۵. مولفه‌های تانسور کششی را برای حالت تنشی تخت بیابید.

نتایج تمرین‌های ۶-۱۴ و ۶-۱۵ نشان می‌دهد که معادلات مساله تنشی تخت و کششی تخت تنها در مقادیر متناظر با مدول کشسانی λ متفاوت هستند.

روش‌های ویژه‌ای برای استفاده در نظریه کشسانی تخت توسعه داده شده است. برخی از این روش‌ها بر اساس نظریه توابع مختلط چند متغیره [موسخلیشویلی (۱۹۶۶)] استوار است. با به‌کارگیری روش‌های پتانسیل مرکب، می‌توانیم جواب‌های دقیق مسایل نسبتاً پیچیده را بیابیم. به‌رحال، تکنیک‌های کامپیوتری و روش‌های جزء متناهی در این مورد از اهمیت کمتری برخوردار هستند.

۶-۱۵ مسایل

۶-۱ شرایط مرزی برای مساله کشسانی مسطح روی مربع $ABCD$ نشان داده شده در شکل ۶-۸ را بیابید.

۶-۲ شرایط مرزی برای مساله کشسانی مسطح روی مثلث ABC نشان داده شده در شکل ۶-۹ را بیابید.

۶-۳ شرایط مرزی برای مساله کشسانی مسطح روی مثلث نشان داده شده در شکل ۶-۱۰ را بیابید. نیروها عمود بر وجه‌ها و به‌ترتیب برابر ρ_1, ρ_2, ρ_3 فرض می‌شود.

۶-۴ شرایط مرزی برای مساله کشسانی مسطح روی قسمتی از حلقه‌ی ترسیم شده در شکل ۶-۱۱ را بیابید.

۶-۵ شرایط مرزی برای مساله کشسانی مسطح روی قسمت‌های قابل دید مکعب نشان داده شده در شکل ۶-۱۲ را بیابید.

۶-۶ در نقطه‌ای از یک جسم کشسان تنش‌های اصلی برابر $\sigma_1 = 50 \text{ MPa}$ ، $\sigma_2 = -50 \text{ MPa}$ و $\sigma_3 = 75 \text{ MPa}$ هستند. با مراجعه به شکل ۶-۱۳ بردارهای تنش روی ABC که هم‌شیب با محورهای اصلی هستند را بیابید.

۶-۷ با مراجعه به شکل ۶-۱۴، شرایط مرزی برای مساله کشسان روی قسمت‌های قابل دید اجسام استوانه‌ای را بنویسید.

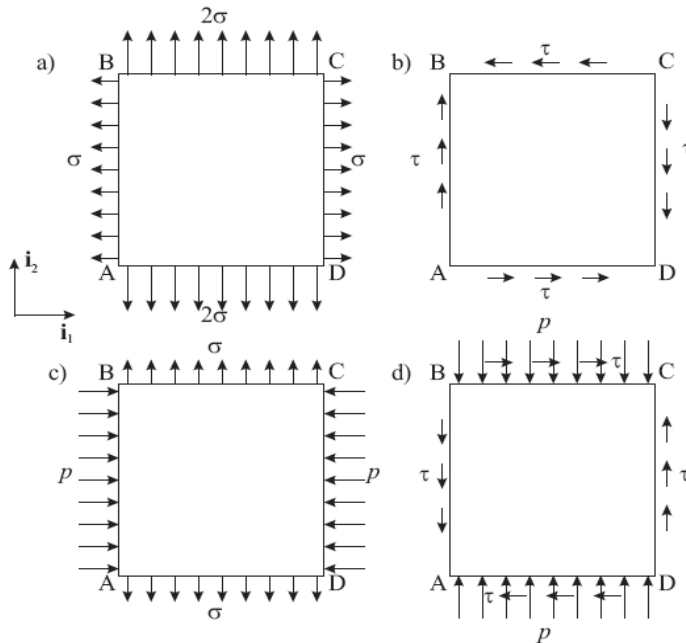
۶-۸ فرض کنید پارامترهای γ, λ, k داده شده باشند. برای بردارهای جابه‌جایی زیر عبارات تانسورهای کشش را بیابید.

(الف) $\mathbf{u} = \gamma x_2 \mathbf{i}_1$ ؛

(ب) $\mathbf{u} = \lambda x_1 \mathbf{i}_1$ ؛

(پ) $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{r}$ ؛

(ت) $\mathbf{u} = u(\gamma) \mathbf{e}_r + kz \mathbf{e}_z$ (مختصات استوانه‌ای را به کار ببرید)؛



شکل ۶-۸ تمرین ۶-۱

(ث) $\mathbf{u} = u(\gamma) \mathbf{e}_\phi + kz \mathbf{e}_z$ (مختصات استوانه‌ای را به کار ببرید)؛

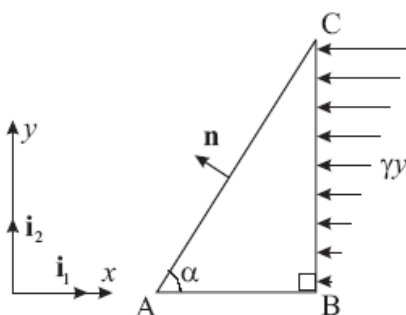
(ج) $\mathbf{u} = (u(\gamma) + kz) \mathbf{e}_z$ (مختصات استوانه‌ای را به کار ببرید)؛

(چ) $\mathbf{u} = u(\gamma) \mathbf{e}_r$ (مختصات کروی را به کار ببرید)؛.

۹-۶ فرض کنید φ تابع دوهارمونیک دلخواهی باشد. نشان دهید که عبارت

$$2\mu \mathbf{u} = 2(1-\nu) \nabla^2 \varphi - \nabla \nabla \cdot \varphi$$

جوابی برای معادلات لامه (۲۹-۶) در $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ است. این عبارت جواب بوسینس-گارلرکین برای مساله تعادل است.



شکل ۹-۶ تمرین ۲-۶

۱۰-۶ فرض کنید φ یک تابع برداری دلخواه و φ_0 تابع هارمونیک دلخواهی باشد. نشان دهید که عبارت

$$2\mu \mathbf{u} = 4(1-\nu) \varphi - \nabla (\mathbf{r} \cdot \varphi + \varphi_0)$$

جوابی برای معادلات تعادل (۲۹-۶) در $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ است. این عبارت جواب پاپکوویچ-نیونر است.

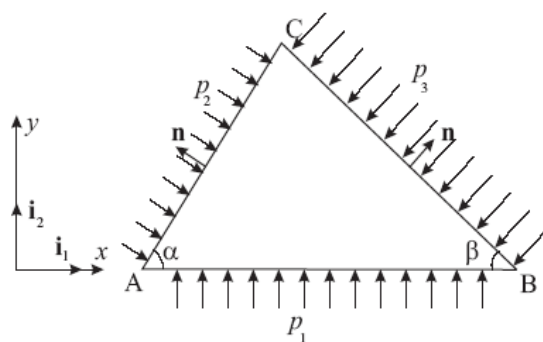
۱۱-۶ فرض کنید φ یک تابع هارمونیک برداری دلخواه بوده و تابع η در معادله زیر صدق کند.

$$\nabla^2 \eta = 2 \nabla \cdot \varphi.$$

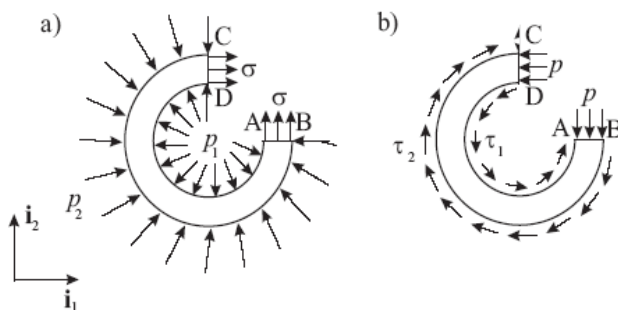
نشان دهید که عبارت

$$2\mu \mathbf{u} = 4(1-\nu) \varphi - \nabla \eta$$

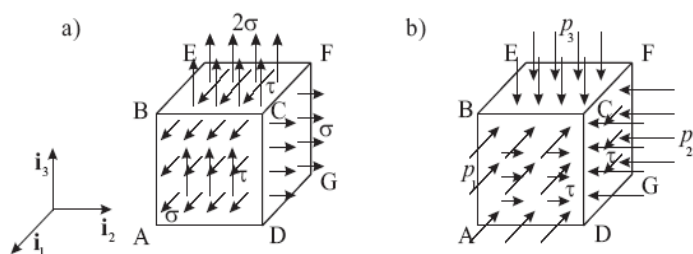
جوابی برای (۲۹-۶) در $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ است.



شکل ۱۰-۶ تمرین ۱۰-۶



شکل ۱۱-۶ تمرین ۴-۶



شکل ۱۲-۶ تمرین ۵-۶

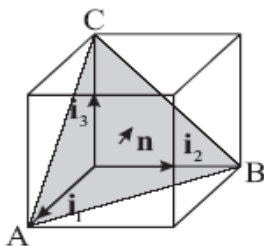
۱۲-۶ فرض کنید φ یک تابع هارمونیک برداری دلخواه بوده و تابع ξ در معادله زیر صدق کند.

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{4\nu - 3} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}.$$

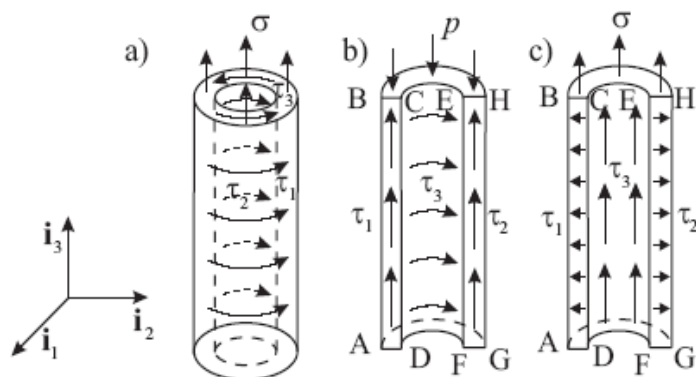
نشان دهید که عبارت

$$2\mu \mathbf{u} = \nabla \varphi + z \nabla \xi$$

نمایشی برای جواب معادلات (۶-۲۹) در $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ است.



شکل ۶-۱۳ تمرین ۶-۶



شکل ۶-۱۴ تمرین ۶-۷

فصل ۷: پوسته‌هایی با کشسانی خطی

ساختارهای با دیواره نازک در عملیات مهندسی بسیار متداول هستند. مثال‌هایی همانند بدنه کشتی، پایه‌های تانکر، اسکلت هواپیما و موشک و ساختارهای لوله‌ای متغیر همانند شریان، غشا و آوندها نمونه‌هایی از آن است. پوسته به صورت سطحی که دارای ضخامت است، در نظر گرفته می‌شود. مدل‌های ریاضی چنین موضوعاتی بر اساس نظریه کشسانی سه بعدی بررسی می‌شود. گرچه نظریه پوسته هنوز در حال گسترش است، اما می‌تواند تقریبی برای توصیف رفتار سه بعدی موضوعات مورد بحث با استفاده از مدل‌های دو بعدی سطح باشد. آشکار است که نظریه پوسته تنها وقتی دقیق است که برای محدود مشخصی از آن استفاده شود. تعداد کمی از مدل‌های پوسته‌ای معروف وجود دارد. در ادامه به معرفی برخی از مدل‌های خطی که در کاربردها استفاده می‌شوند، می‌پردازیم.

از نظر تاریخی اولین مدل پوسته‌ای بر اساس فرضیات کرشهف-لاو بیان شد. همچنین تیموشنکو، ریسنر، کوسرات، نقدی و دیگران در ارایه این قبیل مدل‌ها نقش داشته‌اند. در نظریه پوسته به نام‌هایی همانند اوپلر، لاگرانژ، پواسون، کلونین و دیگران برخورد می‌کنیم. نظریه صفحه حالت خاصی از نظریه پوسته است که جسم مورد بررسی شبیه بالای میز است. در این فصل برخی از چگونگی‌های نظریه پوسته تنها برای مدل‌های صفحه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد: هدف عبارت است از معرفی نظریه و تشریح چگونگی کاربرد آنالیز تانسوری در ساختار آن است.

هر مدل ریاضی از پوسته دارای شکلی از مساله مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل جزئی لحظه‌ای روی سطح اصلی، معمولا وسط سطح پوسته است. از آنجایی که کمیات تشریح کننده رفتار پوسته به صورت توابعی از مختصات صفحه است، نظریه پوسته رابطه بسیار نزدیکی با نظریه سطوح هندسه دیفرانسیل (فصل ۵ را نگاه کنید) دارد. نقطه قطعی در هر ویرایش از نظریه پوسته به صورت روش حذف سومین مختصه فضایی، عمود بر سطح پوسته، از مدل سه بعدی است.

قبل از اختراع رایانه، حل عددی مسایل کشسانی سه بعدی تقریبا غیرممکن بود. بیشتر توجه به سمت نظریه پوسته بوده که مسایل می‌توانند به صورت دستی با دقت مورد نظر حل شوند. راه حل رایانه‌ای پیشرفته تغییری در مسایل دیواره‌های نازک به وجود نمی‌آورد. این بدان دلیل است که محاسبات عددی کشش‌های درون جسم پوسته‌ای شکل که به شبکه با مدل‌های مجزای پوسته‌ای بسیار بزرگ همانند جسم سه بعدی وابسته بوده و وضعیتی متناظر با مسایل سه بعدی ندارد، انجام پذیر نیست. جالب توجه است که به‌کارگیری رایانه‌های قدرتمند باعث افزایش دقت در مدل‌های پوسته‌ای می‌شود به‌طوری‌که مهندسين اجازه پیدا می‌کنند تا از اجزای محدود دو بعدی در بیشتر توزیع کششی واقعی در امتداد مختصات ضخامت پوسته استفاده کنند.

دو تقریب برای تشریح مدل‌های پوسته‌ای دو بعدی وجود دارد. تقریب اول بر پایه تقریب مستقیم مساله مقدار مرزی سه بعدی برای جسم پوسته‌ای شکل بر حسب مساله مقدار مرزی روی سطح اصلی جسم استوار است. راه‌های کمی برای انجام این موضوع وجود دارد. یکی از این راه‌ها، روش فرضیه است که در آن شکل وابسته به جابه‌جایی پوسته و میدان‌های تنش روی مختصات ضخامت فرض می‌شود. مثالی از این نوع را بر اساس فرضیات کلاسیک کرشهف-لاو بیان خواهیم کرد. روش دیگر شامل بسط مجانبی حل مساله سه بعدی نسبت به پارامتر کوچک واقعی ε یعنی نسبت ضخامت پوسته به اندازه مشخصه پوسته همانند قطر صفحه دایره‌ای، است. اصول دیگری برای تشریح حل به صورت رشته‌ای نسبت به ε وجود دارد. به طور کلی، این مدل‌ها به عنوان نقطه شروع معادلات تعادل برای پوسته همانند جسمی سه بعدی به کار می‌روند. سپس با کاهش بسط‌ها، معادلات به معادلات سطح پوسته‌ای مورد نظر تبدیل می‌شود.

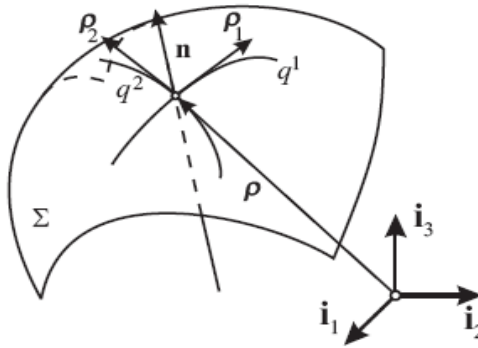
در حالت خاص این مدل‌ها در دستگاه معادلات روی سطح پایه که مرتبه آن از مرتبه دستگاه اولیه جسم سه بعدی بیشتر است، به دست می‌آید. تقریب دیگر برای به دست آوردن مدل‌های پوسته‌ای، روش مستقیم نامیده می‌شود. در این حالت پوسته به عنوان صفحه‌ای با خواص مکانیکی اضافه شده، در نظر گرفته می‌شود. به همین دلیل سطح در مقابل تغییر شکل مقاومت کرده، انرژی کششی به-دست می‌آورد، می‌تواند دارای توزیع جرمی باشد و غیره. معادلات دینامیکی یا تعادل برای چنین سطحی به طور مستقیم با قوانین اصلی مکانیک همانند قانون پایستگی تکانه فرمول بندی می‌شود. بر اساس تقریب مستقیم، معادلات سه بعدی کشسانی به کار گرفته نمی‌شود؛ چون قوانین ساختگی همانند قانون هوک باید به طور مستقل فرمول بندی شوند.

در این فصل چگونگی استفاده از حساب تانسوری در به دست آوردن پوسته و مدل‌های صفحه‌ای نسبتاً خطی برای کشش‌های کوچک، بیان می‌شود. همچنین درباره خواص مسایل مقدار مرزی نظریه پوسته بحث می‌شود. با مدل کرشهف-لاو شروع می‌کنیم.

۷-۱ برخی فرمول‌های مربوط به نظریه سطح

در این بخش فرمول‌های تانسوری مورد نیاز برای فرمول بندی روابط پوسته را به صورت یک جا ارائه می‌دهیم. بسیاری از آنها با تغییر نمادگذاری از فصل ۵، آورده شده است. فرض کنیم Σ سطح کاملاً همواری در $\mathbb{R}^3$ باشد (شکل ۷-۱ را نگاه کنید). بردار مکان هر نقطه روی Σ با ρ نمایش داده می‌شود. مختصات q^1 و q^2 روی Σ را که با معادله $\rho = \rho(q^1, q^1)$ توصیف می‌شود، معرفی می‌کنیم.^{۱۲}

^{۱۲} در فصل ۵ با پیروی از هندسه دیفرانسیل رایج، مختصات را با u^1 و u^2 نمایش می‌دهیم. برای اجتناب از اشتباه کردن این مولفه‌ها با مولفه‌های بردار جابه‌جایی $\mathbf{u}$ در این بخش، آنها را با مختصات بیان شده بازنویسی می‌کنیم.



شکل ۱-۷ سطح Σ با خطوط دارای مختصات منحنی الخط (q^1, q^2)

بردارهای پایه روی Σ به خطوط مختصاتی در هر نقطه مماس بوده، با ρ_1 و ρ_2 نمایش داده می‌شوند. بردارهای ρ^1 و ρ^2 پایه دوگانی را می‌سازند. یادآور می‌شویم که:

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial q^1}, \quad \rho_2 = \frac{\partial \rho}{\partial q^2}, \quad \rho_\alpha \cdot \rho^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

از حالا به بعد، اندیس‌های یونانی مقادیر ۱ و ۲ و اندیس‌های رومی مقادیر ۱، ۲ و ۳ را به خود می‌گیرند. بردار عمود $\mathbf{n}$ بر Σ در هر نقطه به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{n} = \frac{\rho_1 \times \rho_2}{|\rho_1 \times \rho_2|}.$$

اکنون تانسور متریک $\mathbf{A}$ را روی سطح تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{A} = \rho^\alpha \rho_\alpha = \mathbf{E} - \mathbf{nn},$$

که $\mathbf{E}$ تانسور متریک در $\mathbb{R}^3$ است. این کمیت نقش تانسور یکه را روی Σ در هر نقطه بازی می‌کند: اگر بردار $\mathbf{v}$ در هر نقطه مماس بر صفحه باشد به‌طوری‌که $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ، آنگاه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

تمرین ۱-۷. فرض کنید $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. نشان دهید $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

تمرین ۲-۷. نشان دهید $\mathbf{A} = a_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta = a^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$ ، به طوری که $a_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \cdot \rho_\beta$ و

$$a^{\alpha\beta} = \rho^\alpha \cdot \rho^\beta$$

تمرین ۷-۲ بیان می‌کند که مولفه‌های $\mathbf{A}$ به صورت ضرایب اولین شکل اصلی Σ هستند. به همین دلیل $\mathbf{A}$ به نام اولین تانسور اصلی Σ نامیده می‌شود. بردارهای $(\rho_1, \rho_2, \mathbf{n})$ در هر نقطه از Σ تشکیل پایه ای از $\mathbb{R}^3$ می‌دهند. پایه دوگان برابر $(\rho^1, \rho^2, \mathbf{n})$ است. این بدان معنا است که میدان برداری دلخواه $\mathbf{v}$ روی Σ می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \mathbf{v}(q^1, q^2) &= v_1(q^1, q^2)\rho^1 + v_2(q^1, q^2)\rho^2 + v_3(q^1, q^2)\mathbf{n} \\ &= v^1(q^1, q^2)\rho_1 + v^2(q^1, q^2)\rho_2 + v^3(q^1, q^2)\mathbf{n}.\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که $v_3 = v^3$.

عملگر گرادین روی Σ با فرمول زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{\nabla} = \rho^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}.$$

برای به کارگیری عملیات دیفرانسیل گیری به مشتقات بردارهای پایه $\rho_1, \rho_2, \mathbf{n}$ ، ρ^1 نیاز است. یادآور می‌شویم که مشتقات عمود $\mathbf{n}$ برابر است با (معادله (۵-۳۹) را نگاه کنید):

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} = -b_{\alpha\beta}\rho^\beta.$$

تانسور زیر را با استفاده از مولفه‌های $b_{\alpha\beta}$ می‌سازیم:

$$\mathbf{B} = b_{\alpha\beta}\rho^\alpha\rho^\beta.$$

با به کارگیری تعریف $\tilde{\nabla}$ می‌بینیم که:

$$\mathbf{B} = -\tilde{\nabla}\mathbf{n}.$$

تانسور متقارن $\mathbf{B}$ ، تانسور خمیدگی Σ یا دومین تانسور اصلی نامیده می‌شود که مولفه‌های $\mathbf{B}$ با ضرایب دومین شکل اصلی Σ برابر است.

تمرین ۷-۳ نشان دهید $\mathbf{B} = b_{\alpha\beta}\rho^\alpha\rho^\beta = b^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta$. همچنین نشان دهید که عبارت‌های $b_{\alpha\beta}$ با ضرایب دومین شکل اصلی یکسان است (۵-۵).

مشتقات ρ_α و ρ^α توسط فرمول‌های زیر داده می‌شوند:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \rho_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial q^\beta} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \rho^\gamma + b_\beta^\alpha \mathbf{n},$$

که در آن $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ نماد کریستوفل معرفی شده در بخش ۴-۵ است. اکنون عبارت گرادیان $\tilde{\nabla} \mathbf{v}$ برای میدان برداری $\mathbf{v}$ که روی Σ داده شده را به دست می آوریم. بردار $\mathbf{v}$ را به دو مولفه تقسیم می کنیم؛ یکی $\tilde{\mathbf{v}}$ که مماس بر Σ است به طوری که $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = 0$ و دیگری بردار عمود بر Σ است:

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \omega \mathbf{n}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \nu_1(q^1, q^2) \rho^1 + \nu_2(q^1, q^2) \rho^2, \quad \omega = \nu_3 = \nu^3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

در این صورت:

$$\tilde{\nabla} \mathbf{v} = (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{A} - \omega \mathbf{B} + (\tilde{\nabla} \omega + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{n}. \quad (۱-۷)$$

همچنین به عبارتی برای واگرایی تانسور به صورت زیر نیاز داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} &= \rho^\gamma \frac{\partial}{\partial q^\gamma} \cdot (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta + T^{3\beta} n \rho_\beta + T^{\alpha 3} \rho_\alpha n + T^{33} n n) \\ &= \frac{\partial T^{\alpha 3}}{\partial q^\alpha} \rho_\beta + T^{\alpha\beta} \rho^\gamma \cdot \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial q^\gamma} \rho_\beta + T^{\alpha\beta} \frac{\partial \rho_\beta}{\partial q^\alpha} + T^{3\beta} \rho^\gamma \cdot \frac{\partial n}{\partial q^\gamma} \rho_\beta \\ &\quad + T^{33} \rho^\gamma \cdot \frac{\partial n}{\partial q^\gamma} + \frac{\partial T^{\alpha 3}}{\partial q^\alpha} n + T^{\alpha 3} \rho^\gamma \cdot \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial q^\gamma} n + T^{\alpha 3} \frac{\partial n}{\partial q^\alpha} \\ &= \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \rho_\beta + T^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma \rho_\beta + T^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \rho_\gamma + T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} n - T^{3\beta} b_\gamma^\gamma \rho_\beta \\ &\quad - T^{33} b_\gamma^\gamma \mathbf{n} + \frac{\partial T^{\alpha 3}}{\partial q^\alpha} \mathbf{n} + T^{\alpha 3} \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma \mathbf{n} - T^{\alpha 3} b_\alpha^\beta \rho_\beta. \end{aligned} \quad (۲-۷)$$

تمرین ۴-۷. رابطه (۱-۷) را بررسی کنید.

تمرین ۵-۷. با استفاده از (۱-۷) نشان دهید که $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \omega \text{tr} \mathbf{B}$.

تمرین ۶-۷. فرض کنید $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\phi, \theta)$ برداری روی کره با مختصات کروی ϕ و θ باشد. بیابید $\tilde{\nabla} \mathbf{v}$.

تمرین ۷-۷. فرض کنید $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\phi, z)$ برداری روی سطح استوانه ای با مختصات استوانه ای ϕ و z باشد. بیابید $\tilde{\nabla} \mathbf{v}$.

تمرین ۷-۸. فرض کنید $\mathbf{T}$ تانسور مرتبه اول روی Σ باشد به طوری که $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}$, $\mathbf{T} = 0$. نشان دهید که معادله $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} = 0$ رابطه جبری $T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0$ را نتیجه می‌دهد.

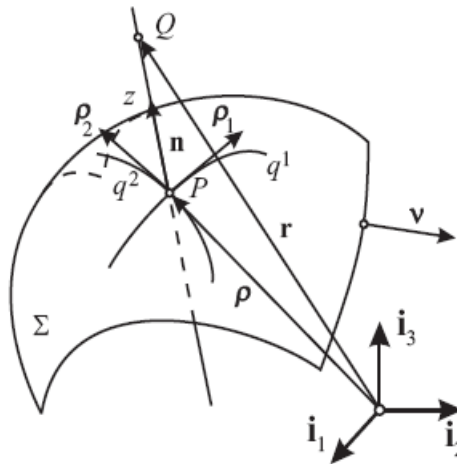
تمرین ۷-۹. فرض کنید $\mathbf{T}$ تانسور مرتبه دوم روی کره با مختصات کروی ϕ, θ باشد. $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T}$ را بیابید.

تمرین ۷-۱۰. فرض کنید $\mathbf{T}$ تانسور مرتبه دوم روی سطح استوانه‌ای با مختصات استوانه‌ای ϕ, z باشد. بیابید. $\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T}$ را بیابید.

۷-۲ سینماتیک در همسایگی Σ

برای توصیف دامنه فضای محدود به Σ از مختصات و کمیات بخش قبل استفاده می‌کنیم. پوسته به صورت جسمی سه بعدی است که توسط همسایگی سطح اصلی Σ اشغال شده به طوری که برای توصیف سینماتیک پوسته همانند جابجایی و گشش‌های تحت بارگذاری استفاده می‌شود.

مختصات نقطه Q در همسایگی Σ به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار از نقطه Σ بر Q عمود می‌شود. فرض کنید $\mathbf{n}$ نقطه اصلی P با بردار مکان $\rho(q^1, q^2)$ باشد به طوری که مختصات آن روی Σ برابر q^1, q^2 است. q^1, q^2 را به عنوان دو مختصه اول Q و فاصله z از P به Q به عنوان سومین مختصه در نظر گرفته می‌شود (شکل ۷-۲ را نگاه کنید). توجه داشته باشید که وقتی $\overline{PQ}$ با $\mathbf{n}$ هم جهت است، z مقدار مثبتی را به خود می‌گیرد و هنگامی که $\overline{PQ}$ با $\mathbf{n}$ دارای جهتی مخالف است، مقدار z منفی است.

شکل ۷-۲ سینماتیک در همسایگی Σ

بردار مکان $\mathbf{r}$ از Q برابر است با:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, z) = \rho(q^1, q^2) + z \mathbf{n}.$$

حجم اشغال شده توسط پوسته به صورت نامعادله زیر بیان می‌شود:

$$-h/2 \leq z \leq h/2,$$

که در آن h ضخامت پوسته است. به‌طور کلی $h = h(q^1, q^2)$ می‌تواند از یک نقطه

به نقطه دیگر تغییر کند. در هر نقطه Q نزدیک Σ بردارهای پایه عبارتند از:

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = \rho_\alpha + z \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} = (\mathbf{A} - z \mathbf{B}) \cdot \rho_\alpha, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{n}. \quad (3-7)$$

پایه دوگان به صورت زیر است:

$$\mathbf{r}_\alpha = (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot \rho_\alpha, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{n}. \quad (4-7)$$

اکنون نماد $(\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1}$ را تشریح می‌کنیم. با توجه به اینکه $(\mathbf{A} - z \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} = 0$ ،

بنابراین $\mathbf{A} - z \mathbf{B}$ به صورت تانسور سه بعدی تباهیده شده و معکوسی نخواهد داشت.

در اینجا $\mathbf{A} - z \mathbf{B}$ را با عملگر وارد زیر فضای دو بعدی مماس بر Σ محدود می‌کنیم.

این زیر فضا دارای پایه ρ^1, ρ^2 است و تانسور $\mathbf{A}$ نقش عملگر واحد روی آن را بازی

می‌کند. در ادامه، $h\|\mathbf{B}\|$ را کوچک در نظر می‌گیریم. اکنون با استفاده از اصل انقباض باناخ [لبدوف و کلود (۲۰۰۳)] می‌توان وجود یکتایی معکوس $\mathbf{A} - z\mathbf{B}$ را برای مقادیر کوچک $|z| \leq h/2$ روی فضای مماسی ثابت کرد. بنابراین داریم:

$$(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot (\mathbf{A} - z\mathbf{B}) = (\mathbf{A} - z\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}. \quad (5-7)$$

چگونگی به دست آوردن $(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$ را برای دو مثال مهم تشریح می‌کنیم. (۱) فرض کنید Σ به صورت استوانه‌ای به شعاع R است. در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= e_r, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{E} - \mathbf{nn} = e_\phi e_\phi + e_z e_z, \\ \mathbf{B} &= -\tilde{\nabla} e_r = -e_\phi e_\phi / R. \end{aligned}$$

در این صورت:

$$\mathbf{A} - z\mathbf{B} = \left(1 + \frac{z}{R}\right) e_\phi e_\phi + e_z e_z.$$

به سادگی می‌توان دید که:

$$(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} = \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} e_\phi e_\phi + e_z e_z$$

در (۵-۷) صادق بوده و در نتیجه تانسور لازم است.

(۲) اکنون $(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$ را برای کره‌ای به شعاع R تعریف می‌کنیم. در مختصات کروی داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= e_r, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{E} - \mathbf{nn} = e_\phi e_\phi + e_\theta e_\theta, \\ \mathbf{B} &= -\tilde{\nabla} e_r = (e_\phi e_\phi + e_\theta e_\theta) / R. \end{aligned}$$

در این صورت:

$$\mathbf{A} - z\mathbf{B} = \left(1 + \frac{z}{R}\right) (e_\phi e_\phi + e_\theta e_\theta).$$

دوباره با بررسی مستقیم فرمول (۵-۷) برای:

$$(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} = \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} (e_\phi e_\phi + e_\theta e_\theta)$$

نشان داده می‌شود که تانسور معکوسی مورد نیاز است.

این مثال‌ها نشان می‌دهد که $(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$ را نمی‌توان برای تمام مقادیر z به دست آورد. تانسور معکوس در هر دو حالت، برای تمام $|z| \leq h/2$ با شرط $h/2R < 1$ وجود دارد. این دامنه‌ای است که هر نقطه به طور یکتا توسط دستگاه مختصات معرفی شده در بالا، معرفی می‌شود. در این حالت محدود از تعریف $(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$ استفاده شده است.

در نهایت با به کارگیری پایه دوگان و (۷-۴) می‌توان عبارت زیر را برای عملگر فضایی نابلا به دست آورد:

$$\begin{aligned}\nabla &= \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \rho^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \tilde{\nabla} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

۷-۳ معادلات تعادل پوسته

اکنون معادلات دو بعدی را برای تعادل پوسته به دست می‌آوریم. این معادلات نتیجه مستقیمی از معادلات تعادل سه بعدی پوسته که به صورت جسم فضایی که ناحیه V از $\mathbb{R}^3$ را اشغال کرده، است (شکل ۷-۳ را نگاه کنید). V توسط دو صفحه (وجه‌ها) $S +$ و $S -$ که فاصله هر کدام از سطح میانی $h/2$ برابر Σ است و سطوح مدرج عرضی S_ν ، محصور شده است. $\mathbf{n}$ توسط حرکت برداری عمود بر Σ در امتداد مرز Σ به وجود آمده است. به عبارت دیگر V با مجموعه تمام نقاط فضایی داده شده توسط بردار مکان زیر برابر است:

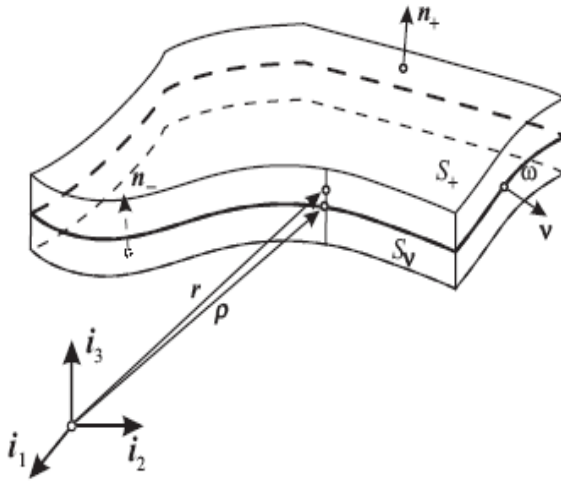
$$\mathbf{r} = \rho(q^1, q^2) + z\mathbf{n},$$

در اینجا ρ بردار مکان هر نقطه روی Σ و $-h/2 \leq z \leq h/2$ است. برای سادگی h را ثابت در نظر می‌گیریم.

شرایط مرزی روی سطوح $S_{\pm}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{n}_+ \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{z=h/2} = \mathbf{t}_+^0, \quad \mathbf{n}_- \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{z=-h/2} = \mathbf{t}_-^0, \quad (۶-۷)$$

در اینجا $\mathbf{n}_{\pm}$ بردارهای عمود بر $S_{\pm}$ (شکل ۳.۷) بوده و $t_{\pm}^0$ برابر سطوح بارگذاری شده روی $S_{\pm}$ است. در حالت کلی، شرایط مرزی ترکیبی از مساله سوم کشسانی را روی سطح S_v در نظر می‌گیریم.



شکل ۷-۳ جسم پوسته‌ای شکل

معادله (۶-۲۰) به همراه $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ بیان کننده تعادل جسم کشسان سه بعدی است که حجم V را اشغال کرده:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} \sigma^{ij} \mathbf{r}_j) + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (۷-۷)$$

در معادله (۷-۷) با استفاده از $q^1, q^2, q^3 = z$ به عنوان مختصات می‌توان دیفرانسیل‌ها را بر حسب z از هم جدا کرد. اکنون قرار می‌دهیم:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\alpha} = \mathbf{r}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma^{\alpha j} \mathbf{r}_j, \quad \sigma^3 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma^{3j} \mathbf{r}_j.$$

پس به دست می آوریم:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial(\sqrt{g} \sigma^\alpha)}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial(\sqrt{g} \sigma^3)}{\partial z} \right) + \rho f = 0. \quad (۸-۷)$$

یادآور می شویم که g برابر با دترمینان $g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$ است. کمیت g را می توان برحسب پارامترهای Σ نمایش داد. در حقیقت:

$$g_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \cdot (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^2 \cdot \rho_\beta, \quad g_{13} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad g_{33} = 1.$$

بنابراین g به صورت زیر تبدیل می شود:

$$g = aG^2, \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad G = \det(\mathbf{A} - z \mathbf{B}), \quad (۹-۷)$$

در اینجا $a_{\alpha\beta}$ با مقادیر $g_{\alpha\beta}$ روی Σ برابر است. در اینجا $(\mathbf{A} - z \mathbf{B})$ به صورت دترمینان دوبعدی زیر محاسبه می شود:

$$\det \mathbf{X} = X_1^1 X_2^2 - (X_1^2)^2,$$

که X_α^β مولفه های ترکیبی از $\mathbf{X} = \mathbf{A} - z \mathbf{B}$ است. همچنین مشاهده می شود که (۶-۷) در نمادگذاری جدید به صورت زیر است:

$$\sigma^3 \Big|_{z=\pm h/2} = t_\pm^0.$$

اکنون (۸-۷) را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial(\sqrt{g} G \sigma^\alpha)}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial(G \sigma^3)}{\partial z} + \rho G f = 0. \quad (۱۰-۷)$$

اکنون می توان معادلات تعادل دو بعدی را برای پوسته به دست آورد. از (۱۰-۷) روی ضخامت، یعنی در امتداد مختصه عمودی از z تا $h/2$ تا $-h/2$ انتگرال گیری می کنیم. با در نظر گرفتن شرایط مرزی (6-7) به دست می آوریم:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (\sqrt{a} \llbracket \sigma^\alpha \rrbracket) + G + t_+^0 - G - t_-^0 + \rho f = 0, \quad (۱۱-۷)$$

که:

$$G_\pm = G \Big|_{z=\pm h/2}.$$

در اینجا نماد ... معرفی می‌شود. این نماد برای هر کمیت f به صورت انتگرال معین روی ضخامت بیان می‌شود که

$$f = \int_{-h/2}^{h/2} Gf \, dz.$$

اکنون (۷-۱۱) را به حالت بدون مولفه ای تبدیل می‌کنیم. کمیت:

$$\mathbf{T} = \rho_\alpha \llbracket \sigma^\alpha \rrbracket$$

به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \rho_\alpha \llbracket r^\alpha \cdot \sigma \rrbracket \\ &= \rho_\alpha \llbracket \rho^\alpha \cdot (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot \sigma \rrbracket \\ &= \rho_\alpha \rho^\alpha \cdot \llbracket (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot \sigma \rrbracket \\ &= A \cdot \llbracket (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot \sigma \rrbracket \\ &= \llbracket (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot \sigma \rrbracket. \end{aligned}$$

$\mathbf{T}$ را تانسور مبین تنشی می‌نامیم. طبق تعریف آشکار است که $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. $\mathbf{n}$ مولفه‌های $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}$ به صورت مبین‌های تنشی هستند که روی صفحه مماس پوسته وارد می‌شوند. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ با بردار مبین‌های تنشی متقاطع برشی برابر است. بنابراین (۷-۱۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (7-12)$$

که:

$$\mathbf{q} = G + t_+^0 - G t_-^0 + \rho \mathbf{f}.$$

بردار $\mathbf{q}$ با توزیع بار روی پوسته برابر است. مولفه‌های آن $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}$ بر روی صفحه مماس Σ وارد شده و $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ برابر با بار متقاطع است. پس می‌توان اولین معادله تعادل پوسته را به دست آورد.

برای به دست آوردن معادله دوم تعادل، جملات (۷-۸) را از سمت چپ در $z \mathbf{n}$ ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} z \mathbf{n} \times \frac{\partial(\sqrt{a} G \sigma^\alpha)}{\partial q^\alpha} + z \mathbf{n} \times \frac{\partial(G \sigma^\alpha)}{\partial z} + \rho G z \mathbf{n} \times \mathbf{f} = 0. \quad (۱۳-۷)$$

با وارد کردن $\mathbf{n}$ به درون مشتق به دست می آوریم:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (\mathbf{n} \times \sqrt{a} G \sigma^\alpha) - \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} \times G z \sigma^\alpha + z \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{n} \times \sigma^3) + \rho G z \mathbf{n} \times \mathbf{f} = 0.$$

به دلیل:

$$\mathbf{r}_\alpha = \rho_\alpha + z \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha}$$

به طوری که:

$$z \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} = \mathbf{r}_\alpha - \rho_\alpha,$$

به دست می آوریم:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} \times z \sigma^\alpha = (\mathbf{r}_\alpha - \rho_\alpha) \times \sigma^\alpha = -\mathbf{n} \times \sigma^3 - \rho_\alpha \times \sigma^\alpha.$$

از آنجایی که:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \times \sigma^i &= \mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_i \cdot \sigma) \\ &= \mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_i \cdot \sigma^{kj} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_j) \\ &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \sigma^{ij} \\ &= -\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i \sigma^{ij} \\ &= -\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i \sigma^{ji} \\ &= -\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \sigma^{ij} \\ &= -\mathbf{r}_i \times \sigma^i, \end{aligned}$$

خواهیم داشت:

$$\mathbf{r}_i \times \sigma^i = 0.$$

از:

$$\mathbf{r}_i \times \sigma^i = \mathbf{r}_\alpha \times \sigma^\alpha + \mathbf{n} \times \sigma^3.$$

به دست می‌آید:

$$\mathbf{r}_\alpha \times \sigma^\alpha = -\mathbf{n} \times \sigma^3.$$

معادله (۷-۱۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (\mathbf{n} \times \sqrt{a} G \sigma^\alpha) + \rho_\alpha \times G \sigma^\alpha + \frac{\partial}{\partial z} (G \mathbf{n} \times Z \sigma^3) + \rho G z \mathbf{n} \times \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

با انتگرال‌گیری از z تا $-h/2$ نسبت به $h/2$ و به کارگیری (۷-۶)، دومین معادله برداری تعادل پوسته به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(\sqrt{a} \llbracket \mathbf{n} \times z \sigma^\alpha \rrbracket \right) + \rho_\alpha \llbracket \sigma^\alpha \rrbracket \\ & + \frac{hG}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{t}_+^0 + \frac{hG}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{t}_-^0 + \rho z \mathbf{n} \times \mathbf{f} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (۷-۱۴)$$

اکنون آن را به صورت بدون مولفه‌ای نمایش می‌دهیم. تانسور جفتی تنشی که به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$\mathbf{M} = \rho_\alpha \llbracket \mathbf{n} \times z \sigma^\alpha \rrbracket,$$

به صورت زیر نیز نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= -\rho_\alpha \llbracket r^\alpha \cdot z \sigma \times \mathbf{n} \rrbracket \\ &= -\rho_\alpha \llbracket \rho^\alpha \cdot (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot z \sigma \times \mathbf{n} \rrbracket \\ &= -\rho_\alpha \rho^\alpha \cdot \llbracket (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot z \sigma \times \mathbf{n} \rrbracket \\ &= -A \cdot \llbracket (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot z \sigma \times \mathbf{n} \rrbracket \\ &= -\llbracket (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot z \sigma \times \mathbf{n} \rrbracket. \end{aligned}$$

طبق تعریف $\mathbf{M}$ دیده می‌شود که $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. اکنون رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} hG + \mathbf{n} \times \mathbf{t}_+^0 + \frac{1}{2} hG - \mathbf{n} \times \mathbf{t}_-^0 + \rho z \mathbf{n} \times \mathbf{f},$$

که جفت‌های منحنی وار خارجی وارد بر سطح پوسته را نمایش می‌دهد. طبق تعریف $\mathbf{m}$ می‌بینیم که $\mathbf{m}$ در صفحه مماس بر Σ قرار دارد، یعنی $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$. در نهایت، ناوردای برداری $\mathbf{T}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T}_x = \rho_\alpha \times \llbracket \sigma^\alpha \rrbracket;$$

این نمادگذاری، ضرب خارجی گیبسیان نامیده می‌شود. اکنون می‌توان (۷-۱۴) را بدون مولفه بازنویسی کرد:

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} = 0. \quad (7-15)$$

توجه داشته باشید که (۷-۱۲) و (۷-۱۵) نتایج دقیقی از معادلات تعادل برای پوسته پیوسته سه بعدی است. این معادلات کمیت‌هایی که باعث صفر شدن مجموع تمام نیروها و اندازه حرکت‌های وارد بر هر جزء از پوسته است را بیان می‌کند. بنابراین می‌توان معادلات تعادل دوبعدی (۷-۱۲) و (۷-۱۵) را برای پوسته به‌دست آورد. کمیت‌های نامعلوم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{M}$ روی Σ تعریف می‌شوند. در ادامه، Σ را صفحه پوسته‌ای یا میان صفحه یا صفحه پایه پوسته می‌نامیم.

۷-۴ تغییر شکل پوسته و کشش‌ها؛ فرضیات کرشهف

کرشهف فرضیات معروف خود را در مورد قوانین تغییر شکل سطح که تعمیمی از فرضیات برنولی برای خم شدن پرتو است، فرمول بندی کرد. از آنجایی که فرضیات کرشهف توسط لاو به نظریه پوسته تعمیم داده شده، اغلب آنها را مفروضات کرشهف-لاو می‌نامیم.

فرضیه سینماتیکی کرشهف. هر مقطع از پوسته که بر میان سطح عمود است، قبل از تغییر شکل بر میان سطح تغییر شکل یافته به صورت عمود باقی می‌ماند. کشش‌های مقطع اریب به علت کوچک بودن، قابل چشم پوشی هستند. از نظر ریاضی بدان معنا است که $\tau \cdot \mathbf{n} = 0$ برای تمام τ به طوری که $\tau \cdot \mathbf{n} = 0$.

فرضیه استاتیکی کرشهف. تنش عمودی در مقایسه با دیگر تنش‌ها قابل چشم پوشی است، بنابراین $\sigma_{33} = \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} = 0$.

از نظر تجربی، اغلب رفتار عمودی به خوبی وضعیت واقعی را نشان می‌دهد. در این نظریه، کشش‌های مقطع و فشردگی پوسته به صورت اریب را در نظر نمی‌گیریم. در نوشته‌ها می‌توان ویرایشهای مختلفی از فرضیات کرشلف را پیدا کرد. همچنین می‌توان مباحثی درباره توصیف کاربرد و غیره را یافت. نگاه کنید [سیارلت (۱۹۹۷)؛ سیارلت (۲۰۰)؛ چرو شیلوفسکی، ماکوفسکی و پیتراژکیویژ (۲۰۰۴)؛ دائل (۱۹۷۶)؛ گلدن ویزر (۱۹۷۶)؛ لیبای و سیموندس (۱۹۸۸)؛ نووژیلوف، چرنیخ و میخایلوفسکی (۱۹۹۱)؛ تیموشنکو (۱۹۸۵)؛ وروویچ (۱۹۹۹)؛ ژیلین (۲۰۰۶)؛ زوبوف (۱۹۸۲)]. این موضوعات خارج از اهداف کتاب است.

فرضیه استاتیکی کرشلف اجازه می‌دهد که $\varepsilon_{33} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$ را از قانون هوک حذف کنیم. به روش مشابه، این موضوع برای حذف ε_{33} در صفحه استاتیکی استفاده می‌شود (به تمرین‌های ۶-۱۴ و ۶-۱۵ رجوع کنید). با استفاده از فرضیات کرشلف،

$$\sigma_{33} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

ماده پوسته‌ای شکل را به صورت همگن در نظر می‌گیریم. از آنجایی که:

$$\sigma_{33} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{33} = 0$$

به مقدار زیر منجر می‌شود:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

بنابراین برای تانسورهای تنش و کشش پوسته می‌توان نشان داد که:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \sigma_{\alpha 3} (\mathbf{r}^\alpha \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{r}^\alpha),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \varepsilon_{\alpha 3} (\mathbf{r}^\alpha \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{r}^\alpha) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \mathbf{n},$$

در اینجا $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ و $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

قانون هوک به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{E} \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] = \frac{E}{1+\nu} \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{E} \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \right]. \quad (۱۶-۷)$$

این قانون بر حسب نمایش مولفه‌ای برابر است با:

$$\begin{aligned}\sigma_1^1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^1 + \nu \varepsilon_2^2), & \sigma_2^2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2^2 + \nu \varepsilon_1^1), \\ \sigma_1^2 &= \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_1^2, & \sigma_1^3 &= \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_1^3, \\ \sigma_2^3 &= \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_2^3,\end{aligned}\quad (۱۷-۷)$$

که:

$$\sigma_\beta^\alpha = \mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}^\beta, \quad \sigma_\alpha^3 = \mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}.$$

به طور مشابه، مولفه های Σ قابل نمایش هستند.

تمرین ۷-۱۱. روابط (۷-۱۶) و (۷-۱۷) را به دست آورید.

اکنون به فرضیه سینماتیکی بر می گردیم. هر سطح مقطع عمود بر میان سطح با استفاده از این فرضیه، بعد از تغییر شکل همانند قبل از تغییر شکل به صورت عمودی و همچنین به صورت تخت نیز باقی می ماند. روی Σ نقطه ثابت q^1, q^2 را در نظر بگیرید. هر سطح مقطع عبوری از این نقطه بعد از تغییر شکل به صورت تخت است، اگر و فقط اگر وابستگی جابه جایی نقاط روی خط عمودی در q^1, q^2 بر حسب z خطی باشد. بنابراین شکل کلی بردار جابه جایی به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathbf{u}(q^1, q^2, z) = \tilde{\mathbf{v}}(q^1, q^2) + \omega(q^1, q^2) \mathbf{n} - z \mathcal{G}(q^1, q^2), \quad (۱۸-۷)$$

که:

$$\mathcal{G}(q^1, q^2) = \tilde{\mathcal{G}} + \mathcal{G}_n \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathcal{G}} = 0.$$

اکنون عبارتی برای تانسور کشش متناظر با (۷-۱۸) به دست می آوریم. داریم:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{u} &= \left(\tilde{\nabla} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\tilde{\mathbf{v}} + \omega \mathbf{n} - z \mathcal{G}) \\ &= \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\nabla} \omega) \mathbf{n} - \omega \mathbf{B} - z \tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}} + z \mathcal{G}_n \mathbf{B} - \mathbf{n} \mathcal{G}\end{aligned}\quad (۱۹-۷)$$

و

$$(\nabla \mathbf{u})^T = (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}) + \mathbf{n} \tilde{\nabla} \omega - \omega \mathbf{B} - z (\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}})^T + z \mathcal{G}_n \mathbf{B} - \mathcal{G} \mathbf{n}.$$

بنابراین تانسور کشش برابر است با:

$$\begin{aligned}
 2\varepsilon &= \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \\
 &= \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} \right)^T - 2\omega \mathbf{B} - z \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}} + \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}} \right)^T + 2z \mathcal{G}_n \mathbf{B} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\tilde{\nabla} \omega \right) \mathbf{n} - \mathbf{n} \mathcal{G} + \mathbf{n} \tilde{\nabla} \omega - \mathcal{G} \mathbf{n} \right).
 \end{aligned} \quad (۲۰-۷)$$

یادآور می‌شویم که با (۱-۷):

$$\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{A} + \left(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) \mathbf{n}, \quad \tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}} = \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}} \right) \cdot \mathbf{A} + \left(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathcal{G}} \right) \mathbf{n}.$$

با جایگذاری این مقادیر در (۲۰-۷) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 2\varepsilon &= \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} \right)^T - 2\omega \mathbf{B} - z \left(\left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}} \right) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}} \right)^T \right) \\
 &\quad + \left(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) + \mathbf{n} \left(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) - z \left(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathcal{G}} \right) \mathbf{n} - z \mathbf{n} \left(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathcal{G}} \right) + 2z \mathcal{G}_n \mathbf{B} \\
 &\quad + \left(\tilde{\nabla} \omega \right) \mathbf{n} - \mathbf{n} \mathcal{G} + \mathbf{n} \tilde{\nabla} \omega - \mathcal{G} \mathbf{n}.
 \end{aligned} \quad (۲۱-۷)$$

اکنون برخی نتایج دیگر از فرضیه سینماتیکی کرشلف را به‌دست می‌آوریم. با استفاده از این فرضیه داریم:

$$\mathbf{n} \cdot \varepsilon \cdot \tau = 0, \quad (۲۲-۷)$$

که τ بردار دلخواه عمود بر $\mathbf{n}$ است؛ این کمیت بر حسب مولفه‌ها برابر است با $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$. با استفاده از (21-7) می‌یابیم:

$$2\mathbf{n} \cdot \varepsilon = \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathcal{G}} + \tilde{\nabla} \omega - z \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathcal{G}} - 2\mathcal{G}_n \mathbf{n}.$$

تمام جملات سمت راست به غیر از $2\mathcal{G}_n \mathbf{n}$ بر $\mathbf{n}$ عمود هستند. از (22-7) که برای هر τ عمود بر $\mathbf{n}$ برقرار است، داریم:

$$\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathcal{G}} + \tilde{\nabla} \omega - z \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathcal{G}} = 0.$$

از اینجا به‌دست می‌آوریم: $\tilde{\mathcal{G}}$

$$\tilde{\mathcal{G}} = \left(\mathbf{A} + z \mathbf{B} \right)^{-1} \cdot \left(\tilde{\nabla} \omega + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right).$$

جابه‌جایی‌ها و مشتقات آنها در کشسانی خطی باید بسیار کوچک باشد. همچنین برای پوسته کاملاً نازک و هموار می‌توان فرض کرد که $h\mathbf{B}$ نیز کوچک است.

این را به صورت زیر فرمول بندی می‌کنیم:

فرض $S. \|\mathbf{B}\| h \ll 1$ را در نظر بگیرید.

بنابراین می‌توان فرض کرد که جملات $z \mathbf{B}$ در مقایسه با واحد قابل چشم پوشی است. توجه داشته باشید که با (9-7) از فرض S می‌توان نتیجه گرفت که $(\mathbf{A} - z \mathbf{B}) G =$ بسیار به ۱ نزدیک است. با در نظر گرفتن فرض S به دست می‌آوریم که:

$$\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathbf{V}} \omega + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (23-7)$$

به کمک آن خواهیم داشت:

$$2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\tau} = -z \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathcal{G}}.$$

بر اساس فرضیه سینماتیکی کرشلف، سمت این تساوی $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\tau}$ برابر صفر است. با فرض S ، جملات سمت راست معادله با مرتبه بالاتری از کمترین $\tilde{\mathcal{G}}$ دیده می‌شود. بنابراین مقدار انتخابی بالا از $\tilde{\mathcal{G}}$ باعث دقیق شدن فرضیه سینماتیکی کرشلف می‌شود. توجه داشته باشید که کمیت $\mathcal{G}_n$ هنوز نامشخص است.

با جایگذاری (23-7) در (21-7) به دست می‌آوریم:

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}})^T - 2\omega \mathbf{B} - z \left((\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathcal{G}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathcal{G}})^T \right) - 2\mathcal{G}_n \mathbf{nn} + 2z \mathcal{G}_n \mathbf{B} - z (\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathcal{G}}) \mathbf{n} - z \mathbf{n} (\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathcal{G}}). \quad (24-7)$$

به کمک فرض S ، جملاتی که زیر آنها خط کشیده شده را برابر صفر قرار می‌دهیم. در نهایت، عبارتی برای تانسور کششی به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}})^T - 2\omega \mathbf{B} - z \left((\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathcal{G}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathcal{G}})^T \right) - 2\mathcal{G}_n \mathbf{nn} = 2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2\mathcal{G}_n \mathbf{nn} \quad (25-7)$$

که:

$$2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}})^T - 2\omega \mathbf{B} - z \left((\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathcal{G}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathcal{G}})^T \right).$$

معادله آخر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} + z \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (26-7)$$

که

$$2\epsilon = (\tilde{\nabla}\tilde{v}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\nabla}\tilde{v})^T - 2\omega\mathbf{B},$$

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \left((\tilde{\nabla}\tilde{g}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\nabla}\tilde{g})^T \right).$$

تانسور ϵ ، اندازه کشش مماسی یا تانسور کششی میان صفحه است. این کمیت، تغییر شکل پوسته را برحسب صفحه مماس توصیف می‌کند. تانسور ϵ تغییر شکل متناسب با خمیدگی را تشریح کرده که اندازه کشش خمیدگی یا تانسور تغییرات انحنا نامیده می‌شود. در ادامه، ساده‌ترین نمایش این کمیات برای صفحه که حالت خاصی از پوسته است، فرمول‌بندی می‌شود. حالت‌های ساده‌ای از اندازه‌های کشش در نوشته‌ها آمده است. آنها بر اساس فرض‌های از کوچک‌ترین جملات معین ϵ و ϵ بیان شده‌اند. در اینجا چنین حالت‌های خاص مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. برای مثال اندازه‌های تغییر شکل یافته که ذکر شد توسط دلبلیو. تی. کویتز مورد استفاده قرار گرفت [کویتز (۱۹۷۰)].

اکنون یادآور می‌شویم که کمیت $\mathcal{Q}_n$ در چارچوب فرضیات کرشلف برحسب ϵ و ϵ بیان نمی‌شود. این کمیت تنها شامل ϵ_{33} است. بنابراین در نظریه کرشلف-لاو، تغییر شکل پوسته و مشخصات تنش تحت تاثیر $\mathcal{Q}_n$ قرار نمی‌گیرد؛ در واقع اگر $\mathcal{Q}_n = 0$ وجود داشته باشد، عبارت بالا را برحسب ϵ و ϵ به‌دست می‌آوریم. کمیت $\mathcal{Q}_n$ دوران سطح مقطع پوسته را که مماس بر میان سطح حول خط عموداست، تشریح می‌کند. از نقطه نظر فیزیکی، این دوران‌ها در مقایسه با سایر دوران‌ها دست کم برای پوسته‌های همگن بسیار کوچک است. این موضوع به این حقیقت بستگی دارد که پیچش شدید پوسته از خمش شدید آن بسیار بزرگ‌تر است. بنابراین در نظریه کرشلف-لاو، بررسی $\mathcal{Q}_n$ و دوران‌های سطح مقطع حول خط عمود منسوب به $\mathcal{Q}_n$ ناممکن است. در بیشتر نوشتارها $\mathcal{Q}_n$ صفر فرض می‌شود؛ این کمیت شبیه آنچه در بالا آمده، در برخی از تحلیل‌ها به‌طور متداول کوچک در نظر گرفته می‌شود. نگاه کنید [انوژیلوف، چرنیخ و میخایلوفسکی (۱۹۹۱)؛ وروویچ (۱۹۹۹)؛ ژیلین (۲۰۰۶)]. خواننده می‌تواند اثبات مجانبی نادقیقی از کوچکی $\mathcal{Q}_n$ تحت فرضیات معینی از بارها، نوع شرایط مرزی و همگنی پوسته در [گولدن ویزر (۱۹۷۶)] را بیابد.

اکنون به قانون هوک باز می گردیم. ε را در (۷-۱۷) جایگذاری کنید عبارت مربوط به $\tilde{\sigma}$ به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\tilde{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left[\tilde{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{Atr} \tilde{\varepsilon} \right]. \quad (۷-۲۷)$$

بر حسب مولفه ها به صورت زیر است:

$$\sigma_{\alpha}^{\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{\alpha}^{\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha}^{\beta} \text{tr} \tilde{\varepsilon} \right] \quad (۷-۲۸)$$

یا با جزییات بیشتر:

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 &= \frac{E}{1+\nu^2} (\epsilon_1^1 + \nu \epsilon_2^2) + \frac{Ez}{1+\nu^2} (\alpha_1^1 + \nu \alpha_2^2), \\ \sigma_2^2 &= \frac{E}{1+\nu^2} (\epsilon_2^2 + \nu \epsilon_1^1) + \frac{Ez}{1+\nu^2} (\alpha_2^2 + \nu \alpha_1^1), \\ \sigma_1^2 &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_1^2 + \frac{Ez}{1+\nu} \alpha_1^2. \end{aligned}$$

با به کارگیری اینها، مبین های $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{M}$ از طریق فرمول های زیر به دست می آید:

$$\mathbf{T} = \left\| (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \sigma \right\|, \quad \mathbf{M} = - \left\| (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot z \sigma \times \mathbf{n} \right\|.$$

دانستن تغییر شکل در متن نظریه کرشلف نمی تواند مبین های کششی مقطع اریب $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ را پوشش دهد، در حقیقت تنش های مقطع ε_1^3 و ε_2^3 در پوسته با توجه به فرضیه کرشلف برابر صفر است. اما بردار $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ که نمایش دهنده مولفه های کششی مقطع است، برابر صفر نیست. تاکنون این کمیت به عنوان نامعین در نظر گرفته شد، اما $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ را می توان بر حسب (۷-۱۲) و (۷-۱۵) به دست آورد.

فرض S به ما این اجازه را می دهد که بر دشواری انتگرال گیری $(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$ روی ضخامت غلبه کنیم. این موضوع باعث ساده شدن فرمول های مبین های تنش و زوج های تنش می شود:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \tilde{\sigma}, \quad \mathbf{M} = - \mathbf{A} \cdot z \tilde{\sigma} \times \mathbf{n}. \quad (۷-۲۹)$$

شکل ساده شده (۷-۲۹) ایجاب می کند که معادلات دو بعدی تعادل (۷-۱۲) و (۷-۱۵) با T و M نمی تواند نتیجه دقیقی از معادلات سه بعدی تعادلی قبلی را به دست دهد.

آنها تنها اولین تقریب‌های معادلات تعادلی هستند که برحسب کوچک‌ترین مرتبه‌های دوم بندرت باهم تفاوت دارند. با انتگرال‌گیری نسبت به z روی ضخامت به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon - \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{A} \operatorname{tr} \varepsilon \right] \quad (۳۰-۷)$$

و

$$\mathbf{M} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left[\varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{A} \operatorname{tr} \varepsilon \right] \times \mathbf{n} \quad (۳۱-۷)$$

بر حسب پایه ρ^α ، داریم:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = T_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta$$

و

$$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta.$$

در نتیجه نمایش مولفه‌های تانسور مبین کشش برابر است با:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} a_{\alpha\beta} \varepsilon_\gamma^\gamma \right]. \quad (۳۲-۷)$$

که در مقایسه با (۲۸-۷) می‌بینیم که:

$$T_{\alpha\beta} = \llbracket \sigma_{\alpha\beta} \rrbracket \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz. \quad (۳۳-۷)$$

در اینجا از این واقعیت استفاده شده که با فرض S می‌توان $G=1$ را به‌دست آورد؛ که در نتیجه بازتعریف را خواهیم داشت:

$$f \equiv \int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz.$$

به طور مشابه، مولفه‌های تانسور جفت شده تنش را بیابیم:

$$M_{\alpha\beta} = \llbracket z \sigma_{\alpha\beta} \rrbracket \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha\beta} dz. \quad (۳۴-۷)$$

این کمیات با مولفه‌های ε از طریق فرمول زیر باهم در ارتباط هستند:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} a_{\alpha\beta} \varepsilon_\gamma^\gamma \right]. \quad (۳۵-۷)$$

مقایسه (۳۳-۷) و (۳۴-۷) با (۲۹-۷) نشان می‌دهد که:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = T_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta, \quad \mathbf{M} = -M_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta \times \mathbf{n}.$$

این عبارات برای مولفه های مبین های تنش و تانسورهای جفت شده تنش در [کویتز (۱۹۷۰)], [دائل (۱۹۷۶)], [لیبای و سیموندز (۱۹۹۸)] و موارد دیگر استفاده شده است.

شرایط مورد استفاده برای دسته خاصی از پوسته های کوتاه که از فرض S پیروی می کند توسط دائل مورد تحلیل قرار گرفت. نظریه پوسته های کوتاه برای تغییر شکل های ملایم که در آن شکل پوسته به صفحه نزدیک است، استفاده می شود. برای مثال، این همانند حالتی است که میان سطح به صورت لیوان کروی است که نسبت به یک کره کامل بسیار کوچک در نظر گرفته می شود. این نظریه به دائل، مارگور و ولاسوف منسوب می شود. با نوشتن $\mathcal{E}$ به صورت تفصیلی، آنها از $\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ در عبارت $\mathcal{Q} = \tilde{\mathbf{v}} \omega$ به عنوان کمیتی کوچک مرتبه بالا چشم پوشی کردند. بنابراین در نظریه پوسته کوتاه، کشش ها به صورت زیر بیان می شود:

$$2\mathcal{E} = (\tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}})^T - 2\omega \mathbf{B}, \quad \mathcal{E} = -\tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \omega.$$

این ساده سازی $\mathcal{E}$ برای اولین بار توسط مهندس و مکانیک روسی واسیلی زد. ولاسوف معرفی شد [ولاسوف (۱۹۴۹)].

عبارات مربوط به مبین های تنش و جفت های تنش در نظریه پوسته کوتاه از هندسه "عجیب" تخت استفاده می شود؛ به طور صوری مولفه های انحنای $\mathbf{B}$ در $\mathcal{E}$ برابر صفر است اما در $\mathcal{E}$ وجود دارد. در دستگاه مختصات خمیده خط می توان عملگرهای دیفرانسیلی مربوط به این نظریه را به دست آورد. توجه داشته باشید که معادلات ابتدایی ولاسوف هنگامی به دست می آیند که هندسه پوسته به صورت تخت در نظر گرفته شود اما برخی از انحنای غیر صفر به طور مصنوعی در $\mathcal{E}$ وجود دارند. حالت خاصی از نظریه پوسته کوتاه، نظریه تخت است که در ۷-۸ مورد بررسی قرار می گیرد.

شایسته است که به برخی جنبه های کاربرد تحلیل تانسوری نظریه پوسته توجه شود. در نوشتار، هر کس می تواند ویرایش های مختلفی از نظریه خطی پوسته را با استفاده از فرض های متفاوتی مربوط به کمیات معین کوچک بیابد. برخی از اینها در دستگاه های مختصات خاص همانند حالتی که توسط خطوط منحنی وار اصلی ساخته شده بود، به

دست می‌آید. برای مواد همگن در یک حالت معین وقتی چنین معادلاتی در دستگاه-های مختصات خمیده خط دلخواه، خاصیت همگنی خود را از دست می‌دهند. این تغییر خاصیت همگنی توسط [ژیلین (۲۰۰۶)] که نووژیلوف آن را برای اولین ویرایش معادلات پوسته بررسی کرده بود، به دست آمد. تحلیل تانسوری به ما اجازه می‌دهد که از اتفاقات مشابه پرهیز کنیم.

۷-۵ انرژی پوسته

پیشتر اهمیت کشش و انرژی کل را در کشسان مورد بررسی قرار گرفت. یکتایی جواب مسایل مقدار مرزی کشسانی با استفاده از اینها اثبات شده و اصول وردشی کشسانی فرمول‌بندی گردید. همچنین انرژی نقش مهمی را در نظریه پوسته بازی می‌کند. فرضیات کرشلف روی شکل تنش و کشش‌ها در پوسته همانند جسم سه بعدی عمل کرده، بنابراین می‌توان شکل چگالی انرژی کششی پوسته را به دست آورد.

چگالی انرژی کششی W پوسته همانند جسمی سه بعدی به صورت زیر است:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{..} \varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_j^i \varepsilon_i^j = \frac{1}{2} \sigma_\beta^\alpha \varepsilon_\alpha^\beta.$$

وقتی که $\varepsilon_3^1 = 0$, $\varepsilon_3^2 = 0$ و $\varepsilon_3^3 = 0$ ، کمیت بالا از فرضیات کرشلف نتیجه می‌شود.

با جایگذاری (۷-۲۸) در W به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} W &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\tilde{\varepsilon}_{..} \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \tilde{\varepsilon} \right] \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\varepsilon_\alpha^\beta \varepsilon_\beta^\alpha + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_\alpha^\alpha)^2 \right]. \end{aligned} \quad (۷-۳۶)$$

این رابطه با استفاده از (۷-۲۶) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} W &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\varepsilon_{..} \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right] + \frac{Ez^2}{2(1+\nu)} \left[\varepsilon_{..} \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right] \\ &+ \frac{Ez}{1+\nu} \left[\varepsilon_{..} \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr} \varepsilon \text{tr} \varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (۷-۳۷)$$

بنابراین با استفاده از فرضیات کشف می‌توان عبارتی برای W بر حسب ε ، ε و z به‌دست آورد.

انرژی تابعی کششی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$E = \int_V W \, dV.$$

یادآور می‌شویم که عنصر حجم در q^1, q^2, z مختصات خمیده خط برابر است با:

$$dV = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dz = \sqrt{a} G dq^1 dq^2 dz, \quad G = \det(\mathbf{A} - z \mathbf{B}).$$

با توجه به کوچک بودن جابه‌جایی‌ها، کمیت W به دلیل شکل مربعی کشش‌ها دارای مرتبه دوم از کوچکی است. با فرض S می‌توان از $\mathbf{B}$ در مقایسه با $\mathbf{A}$ چشم‌پوشی کرد، زیرا $\det \mathbf{A} = 1$ و G به مقدار ۱ تغییر می‌کند. با انتگرال‌گیری ضمنی از (۷-۳۷) بر حسب z ، کمیت E به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$E = \int_V W \sqrt{a} dq^1 dq^2 dz = \int_\Sigma U \sqrt{a} dq^1 dq^2,$$

که در آن $U = W$ دلالت بر چگالی انرژی کششی بر واحد سطح است:

$$U = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\varepsilon_{..}\varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right] + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left[\varepsilon_{..}\varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right]. \quad (۷-۳۸)$$

شکل U به صورت مربعی که روی Σ تعریف شده بر حسب دو تانسور ε و ε است. مشاهده می‌شود که U به دو جمله تجزیه شده است؛ یکی تنها بر حسب ε در حالی که دیگری تنها بر حسب ε است. از نقطه نظر فیزیکی، این تجزیه بدان معنا است که چگالی انرژی کششی به دو قسمت قابل تقسیم است. قسمت اول به تغییر شکل مماسی پوسته مربوط است، یعنی تغییر شکل‌ها در صفحه مماسی انجام می‌شود. دومین قسمت به خمیدگی پوسته مرتبط است.

(۷-۳۸) ایجاب می‌کند که $U \geq 0$ و $U = 0$ اگر و فقط اگر $\varepsilon = 0$ و $\varepsilon = 0$ برقرار باشد. در حقیقت می‌توان یادآور شد که برای مواد کشسان $-1 < \nu \leq 1/2$ برقرار است. بنابراین:

$$\varepsilon \neq 0 \quad \varepsilon_{..}\varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon > 0$$

به طور مشابه:

$$\mathfrak{E} \neq 0 \quad \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \mathfrak{E} > 0$$

تمرین ۷-۱۲. نشان دهید که:

$$\mathcal{E} \neq 0 \quad \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \mathcal{E} > 0$$

با به‌کارگیری نمادگذاری مولفه‌ای $\mathbf{T}$ و $\mathbf{M}$ می‌توان U را به‌صورت دیگری نمایش داد:

$$U = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta \in \alpha\beta} + \frac{1}{2} M_{\alpha\beta \mathfrak{E} \alpha\beta}. \quad (۳۹-۷)$$

از (۳۹-۷) و به‌کارگیری (۳۲-۷) و (۳۵-۷) به‌دست می‌آوریم که:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}^{\alpha\beta}}, \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{E}^{\alpha\beta}}. \quad (۴۰-۷)$$

شکل بدون مولفه‌ای به‌صورت زیر است:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathcal{E} + \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{n} \times \mathfrak{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathcal{E} + \frac{1}{2} (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \mathfrak{E} \quad (۴۱-۷)$$

و

$$\mathbf{T} = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{E}}, \quad \mathbf{M} \times \mathbf{n} = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{E}}. \quad (۴۲-۷)$$

کمیت U معین مثبت بودن چگالی انرژی در کشسانی خطی سه بعدی را به ارث می‌برد، که چگالی انرژی $W = 0$ اگر و فقط اگر $\mathcal{E} = 0$ برقرار است. یادآور می‌شویم که $\mathcal{E} = 0$ اگر و فقط اگر میدان جابه‌جایی به صورت جابه‌جایی کوچکی از جسم صلب باشد؛ یعنی این با مجموع انتقال موازی و دورانی جسم در فضا برابر است. در پوسته با چنین وضعیت مشابه روبرو هستیم. عبارت $\in$ و $\mathfrak{E}$ در نظریه کرشف پیچیده بوده، پس در ادامه مطلب تنها حالت ساده نظریه تخت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تمرین ۷-۱۳. (۴۱-۷) را اثبات کنید.

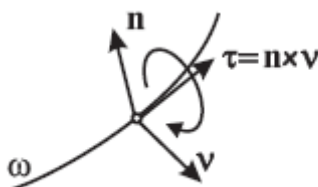
۷-۶ شرایط مرزی

برای تعریف یکتایی جواب مساله تعادل پوسته کشسان باید شرایط مرزی را به معادلات تعادل اضافه کنیم. این کار ساده‌ای نیست: در شروع نظریه پوسته، سوال مربوط به

شرایط مرزی برای مدت طولانی مورد بحث قرار گرفت. حتی پواسون کبیر نیز تعداد زیادی شرایط مرزی را پیشنهاد داد.

معادلات تعادل روی میان سطح Σ به گونه‌ای تعریف می‌شود که شرایط مرزی شمارنده مرز ω وجود داشته باشد.

ابتدا شرایط مرزی سینماتیک را معرفی می‌کنیم: جابه‌جایی $\mathbf{v}$ به گونه‌ای اختصاص داده می‌شود که موقعیت شمارنده مرز را بعد از تغییر شکل تعریف کند. در نظریه کرشهف-لاو اغلب دوران خط عمودی $\mathbf{n}$ را حول مماس بر بردار شمارنده پوسته در نظر می‌گیریم، یعنی حول بردار $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ (شکل ۴-۷).



شکل ۴-۷ بردارهای سه تایی $\mathbf{n}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ با استفاده از شرایط مرزی

دوران با استفاده از فرمول $\tilde{\mathbf{v}}, \mathcal{G} = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\omega} + B$ تعریف می‌شود، به طوری که دوران حول $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ برابر است با:

$$\mathcal{G}_v \equiv v. \mathcal{G} = v. \tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\omega} + v. B. \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial v} + v. B. \quad \tilde{\mathbf{v}},$$

در اینجا $\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \partial \boldsymbol{\omega} / \partial v$ ، با در نظر گرفتن بردار عمودی به دست می‌آید. بنابراین، شرایط مرزی سینماتیک در نظریه کرشهف-لاو شامل چهار معادله عددی زیر است:

$$v|_{\omega} = \mathbf{v}^0(s), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial v} + \mathbf{v} \cdot B. \tilde{\mathbf{v}}|_{\omega} = \mathcal{G}^0(s), \quad (43-7)$$

در اینجا $\mathbf{v}^0(s)$ و $\mathcal{G}^0(s)$ روی ω معلوم هستند.

برخی مشکلات در فرمول بندی شرایط مرزی استاتیکی در نظریه کرشهف-لاو وجود دارد. در اولین نگاه به نظر می‌رسد که می‌توان کمیات $\mathbf{v} \cdot T$ و $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ را روی مرز

در نظر گرفت. اما این موضوع به پنج معادله عددی نیاز دارد نه چهار تا. پیشتر خطای پواسون را در ساختن نظریه تخت متذکر شدیم: او همچنین شرایط مرزی استاتیکی روی مرز را پیشنهاد داد. انحراف شرایط مرزی استاتیکی می‌تواند بر اساس اصل وردشی لاگرانژ برای پوسته باشد به طوری که با حفظ تعادل، تابعی انرژی کل روی دستگاهی از جابه‌جایی‌های مجاز سینماتیکی دارای کمترین مقدار خود است. شرایط مرزی استاتیکی به شرایط مرزی طبیعی برای مساله کمینه سازی انرژی کل تبدیل می‌شود؛ اینها دوگان شرایط مسینماتیک هستند. اثبات اصل لاگرانژ و به دست آوردن شرایط مرزی استاتیکی برای پوسته بسیار مشکل است، بنابراین به مقالات تخصصی تر (به عنوان نمونه اگرین و زرنا (۱۹۵۴)، نووژیل، چرنیخ و میخایلوفسکی (۱۹۹۱)) و طرح‌هایی که فقط برای به دست آوردن شرایط مرزی به وجود آمده اند، رجوع می‌کنیم. سپس از اینها جزییات بیشتری برای روش‌های ساده‌تر مثلاً حالت صفحه‌ای، به دست می‌آید.

نتیجه‌ای از اصل وردشی لاگرانژ این عبارت است که وردش انرژی کششی پوسته با کار نیروی خارجی روی جابه‌جایی‌های مجاز سینماتیکی برابر است:

$$\delta E = \delta A.$$

از این می‌توان به دست آورد که کمیات $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \omega \mathbf{n}$ و ϑ_v با چهار کمیت عددی روی دستگاهی از جابه‌جایی‌های مجاز لبه پوسته به طور مستقل وجود دارد. بنابراین کار نیروهای خارجی روی لبه پوسته به شکل زیر است:

$$\delta A = \int_{\omega} (\varphi^0(s) \delta v - \ell^0(s) \delta \vartheta_v) ds,$$

در اینجا $\varphi^0(s)$ و $\ell^0(s)$ تابع‌هایی از ω هستند. به نظر می‌رسد که δA به $\delta \mathbf{v}$ و $\delta \vartheta_v$ بستگی خطی دارد. با در نظر گرفتن (۷-۴۰) به دست می‌آوریم:

$$\delta E = \int_{\Sigma} \delta U \sqrt{adq^1 dq^2} = \int_{\Sigma} (T_{\alpha\beta} \delta \epsilon^{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta \mathfrak{e}^{\alpha\beta}) \sqrt{adq^1 dq^2}.$$

تبدیلات دیگری از δE با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و قضیه گاوس-استروگرادوسکی به دست می‌آید. باید $\delta \epsilon^{\alpha\beta}$ و $\delta \mathfrak{e}^{\alpha\beta}$ به جای $\delta \mathbf{v}$ و $\delta \vartheta$ نمایش داده و مشتقات آنها را از انتگرال‌های سطح حذف کرد. برخلاف حالت کشسانی سه بعدی، $\delta \mathfrak{e}^{\alpha\beta}$ شامل مشتقات دوم ω بوده و بنابراین انتگرال جزء به جزء باید دوبار

انجام شود. اغلب برای انتگرال‌های مرزی باید تبدیلات دیگر را به کار برد به گونه‌ای که آنها شامل عوامل $\delta \mathbf{v}$ و $\delta \mathcal{G}$ باشند، این روش‌ها در بخش مربوط به صفحه معرفی می‌شود. معادله $\delta E = \delta A$ برای هر کمیت مجاز $\delta \mathbf{v}$ و $\delta \mathcal{G}$ برقرار است. تنها با انتخاب $\delta \mathbf{v}$ و $\delta \mathcal{G}$ که در شرایط سینماتیک همگن صادق است، می‌توان نقطه کمینه $\mathbf{v}$ و $\mathcal{G}$ صادق در معادلات تعادل Σ را به دست آورد. سپس با بسط دستگاه $\delta \mathbf{v}$ و $\delta \mathcal{G}$ با تمام کمیات مجاز $\delta \mathbf{v}$ و $\delta \mathcal{G}$ ، دستگاه مربوط به شرایط مرزی استاتیکی زیر را برای $\mathbf{v}$ و $\mathcal{G}$ به دست می‌آوریم. آنها روی ω تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \Big|_{\omega} &= \varphi^0(s) \cdot \mathbf{A}, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\omega} \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau} \right) \Big|_{\omega} &= \varphi^0(s) \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\nu} \Big|_{\omega} &= \ell^0(s). \end{aligned} \quad (44-7)$$

اینها همانند شرایط مرزی سینماتیکی اغلب دارای چهار معادله عددی هستند. در اینجا $\varphi^0(s)$ و $\ell^0(s)$ توابع داده شده روی ω هستند که بیان کننده مبین‌های تنش و زوج‌های خمیده روی لبه پوخته است.

اصول شرایط مرزی مورد استفاده مهندسين به صورت زیر است:
لبه مقید (ثابت):

$$\mathbf{v} \Big|_{\omega} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \Big|_{\omega} = 0.$$

لبه پشتیبان ساده:

$$\mathbf{v} \Big|_{\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \Big|_{\omega} = 0.$$

لبه آزاد:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \Big|_{\omega} &= 0, & \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\omega} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau} \right) \Big|_{\omega} &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \Big|_{\omega} &= 0. \end{aligned}$$

شرایط مرزی ترکیبی نیز امکان‌پذیر است. برای مثال، روی قسمتی از ω می‌توان (۷-۷) را مشخص کرده و باقیمانده آن را روی (۷-۴۴) تعیین کرد. مسایل مقدار مرزی گوناگونی از شرایط مرزی ترکیبی دیگری، چهار تا روی هر نقطه از ω ، قابل تعریف است. ترکیب‌های مجاز شرایط مرزی توسط چیدمان وردشی این مسایل تعریف می‌شود.

۷-۷ تذکراتی در باره نظریه کرشهف-لاو

دیدگاه‌های گوناگونی در مورد نظریه کرشهف-لاو وجود دارد. این نظرات از فرضیات ساده شده متفاوتی که بستگی به انتخاب روابط ساختاری U ، T و M همانند انتخاب اندازه‌گیری‌های قابل تغییر ε و $\mathfrak{E}$ استفاده می‌کند. معادله (۷-۳۸) برای U در نظریه خطی دارای شکل عمومی وابسته به U روی اندازه‌گیری تغییر شکل است (برای مثال ادانل (۱۹۷۶)؛ کوپتر (۱۹۷۰)؛ نووژیلوف، چرنیخ و میخایلوفسکی (۱۹۹۱)؛ تیموشنکو (۱۹۸۵) [نگاه کنید]).

ویرایش‌ها برحسب تعاریف T متفاوت است. با تعریف T به صورت زیر:

$$T = \left\| (A - zB)^{-1} \cdot \sigma \right\|$$

و با استفاده از فرض S می‌توان آن را به شکل دیگری نوشت:

$$T = A \cdot \sigma.$$

در مقالات کرشهف-لاو می‌توان به هر دو تعریف ابتدایی و ساده شده، دست یافت. اکنون این تفاوت را با جزییات بیشتری بررسی می‌کنیم. ابتدا با دستگاه مختصات ویژه روی پوسته که توسط منحنی‌های اصلی انحنا روی Σ تعریف شده، شروع می‌کنیم. اکنون B به صورت قطری تبدیل می‌شود:

$$B = e_1 e_1 / R_1 + e_2 e_2 / R_2,$$

که R_1 و R_2 شعاع‌های اصلی انحنا روی Σ است. در این صورت:

$$A = e_1 e_1 + e_2 e_2$$

$$G = (1 - z/R_1)(1 - z/R_2).$$

تانسور $G(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1}$ به صورت زیر تبدیل می شود:

$$G(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} = \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) e_1 e_1 + \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) e_2 e_2.$$

با در نظر گرفتن:

$$\mathbf{T} = \left\| (\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\|,$$

به فرمول زیر برای مولفه های $\mathbf{T}$ می رسم:

$$T_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \sigma_{11} dz, \quad T_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \sigma_{22} dz,$$

$$T_{12} = T_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dz.$$

تعریف دیگر $\mathbf{T} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ منجر به عبارتهای زیر می شود:

$$T_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz, \quad T_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dz, \quad T_{12} = T_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dz.$$

بنابراین دو تعریف $\mathbf{T}$ منجر به معادلات تعادل می شود که در کمیات با مرتبه دوم کوچک، متفاوت هستند. شکل ساده شده $\mathbf{T}$ توسط تعدادی از نویسندگان همانند [گولدنویزر (۱۹۷۶)؛ نووژی洛夫، چرنیخ و میخایلوفسکی (۱۹۹۱)؛ تیموشنکو (۱۹۸۵)] مورد استفاده قرار گرفته است. کویتز [کویتز (۱۹۷۰)] با استفاده از (۷-۳۸) و (۷-۴۰) بین مبین های تنش و زوج های خمیده U ارتباطی را برقرار کرد اما او محاسبه عبارت های پیچیده تر آنها را از طریق تنش برای جسم سه بعدی نیز نشان داد.

اغلب مولفه های $M_{\alpha\beta}$ با به کار گیری (۷-۳۴) و ارتباط با U توسط (۷-۴۰) به طور رایج قابل محاسبه است. هر چند، همانند حالت مربوط به $\mathbf{T}$ می توان در مقالات روش های دیگری برای معرفی $\mathbf{M}$ یافت. برای مثال عبارتهای مربوط به $M_{\alpha\beta}$ در [گولدنویزر (۱۹۷۶)] شامل جملاتی است که نسبت به z مربعی هستند.

برخی نوشته های مربوط به نظریه پوسته با بیان چگونگی فرمول بندی "ترکیبی" مسایل مقدار مرزی، مبین های تنش را از طریق فرمول ساده شده $\mathbf{T} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ معرفی

می‌کند. معادلات ساختاری به (7-38) تبدیل شده در حالی که معادلات تعادل شامل جملات اضافی به‌دست آمده از تعریف کامل $\sigma = \left\| (A - zB)^{-1} \right\| T$ است. همچنین تانسور ε در [کویتز (۱۹۷۰)؛ نووژیلوف، چرنیخ و میخایلوفسکی (۱۹۹۱)] و برخی کارهای مشخص دیگر مورد استفاده قرار گرفته است. اغلب دومین اندازه‌گیری تغییر شکل θ که جابه‌جایی ساده شده $\mathcal{E}$ توسط $\tilde{V}\omega$ به‌دست آمده، دارای شکل‌های متفاوتی است (بحث مربوطه را در [کویتز (۱۹۷۰)] نگاه کنید). خواننده می‌تواند در نظریه خطی پوسته کرشلف-لاو با شکل‌های مختلفی از معادلات تعادل همانند تفاوت‌های مربوط به مبین‌های تنش و زوج‌های خمیده روبرو شود. به وضوح در ویرایش‌های متفاوت نظریه پوسته، شکل‌های مربوط به شرایط مرزی استاتیکی نیز متفاوت است و این موضوع در مقالات منعکس شده است.

متذکر می‌شویم که در مقالات مختلف، معادلات تعادلی یکسان می‌تواند به معادلات تعادلی متفاوتی از جابه‌جایی‌ها منجر شود. این اختلاف برای پوسته نازک با میان‌سطح بسیار تخت و بارگذاری یکنواخت، همانند قانون، قابل مقایسه با جملات اصلی معادلات با مرتبه دوم کوچکی است.

۷-۸ نظریه سطح

نیروها و اندازه حرکت‌های مبین روی سطح؛ معادلات تعادل

سطح نازک حالت خاصی از پوسته است. قسمتی از سطح که Σ ، صفحه اصلی $B=0$ از سطح است. روابط سطح از نظریه پوسته به‌دست می‌آید. معادلات تعادل عبارتند از:

$$\tilde{V} \cdot T + q = 0, \quad \tilde{V} \cdot M + T_x + m = 0, \quad (45-7)$$

که:

$$T = A \cdot \sigma, \quad M = -A \cdot z \sigma \times n. \quad (46-7)$$

در دستگاه مختصات دکارتی $i_1, i_2, i_3 = n$ داریم:

$$\sigma = \sigma_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta + \sigma_{33} (i_\alpha n + n i_\alpha) + \sigma_{33}, \quad A = i_\alpha i_\alpha, \quad \tilde{V} = i_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad G = 1,$$

که x_1, x_2 مختصات دکارتی درون سطح هستند. مبین‌های تنش عبارتند از:

$$\mathbf{T} = T_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta + T_{an} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{n},$$

$$T_{\alpha\beta} = \llbracket \sigma_{\alpha\beta} \rrbracket \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz, \quad T_{an} = \sigma_{\alpha 3} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dz. \quad (۴۷-۷)$$

توجه داشته باشید که σ_{33} در تعریف مبین‌های تنش یا مبین‌های تنش برشی اریبی ظاهر نمی‌شود. این موضوع مقارن بودن $T_{\alpha\beta}$ را به دست می‌دهد: $T_{\alpha\beta} \times T_{\beta\alpha}$. کمیت $\mathbf{T}_\times$ توسط فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{T}_\times = T_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \times \mathbf{i}_\beta + T_{an} \mathbf{i}_\alpha \times \mathbf{n} = T_{an} \mathbf{i}_\alpha \times \mathbf{n} = T_{2n} \mathbf{i}_1 - T_{1n} \mathbf{i}_2.$$

در ادامه ماتریس اندازه حرکت ها را تعریف می‌کنیم:

$$M_{\alpha\beta} = \llbracket z \sigma_{\alpha\beta} \rrbracket \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha\beta} dz. \quad (۴۸-۷)$$

در اینجا $M_{\alpha\beta}$ نیز ماتریس مقارن است. با در نظر گرفتن تساوی زیر:

$$\begin{aligned} \sigma \times \mathbf{n} &= \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \times \mathbf{n} \\ &= -\sigma_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \sigma_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 - \sigma_{21} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \sigma_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1, \end{aligned}$$

از (۴۶-۷) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{M} = z \sigma_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - z \sigma_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + z \sigma_{21} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 - z \sigma_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1.$$

به کمک (۴۸-۷)، $\mathbf{M}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= M_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - M_{12} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + M_{21} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 - M_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 \\ &= M_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

بنابراین معادلات تعادل در دستگاه دکارتی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \mathbf{i}_\beta + \frac{\partial T_{an}}{\partial x_\alpha} \mathbf{n} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \mathbf{i}_\beta \times \mathbf{n} + \mathbf{T}_\times + \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (۴۹-۷)$$

اینها بر حسب مولفه‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + q_1 &= 0, \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + q_2 &= 0, \\ \frac{\partial T_{1n}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{2n}}{\partial x_2} + q_n &= 0, \end{aligned} \quad (۵۰-۷)$$

۹

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - T_{1n} + m_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - T_{2n} + m_2 &= 0,\end{aligned}\quad (۵۱-۷)$$

که:

$$q_\alpha = \mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{q}, \quad q_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}, \quad m_\alpha = \mathbf{i}_\alpha \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{m}).$$

توجه داشته باشید که $T_{12} = T_{21}$ و $M_{12} = M_{21}$ ؛ از نمادگذاری متفاوتی برای تقارن استفاده می‌شود.

در کاربردهای نظریه پوسته معمولاً از $\mathbf{m}$ در مقایسه با نیروهای خارجی چشم پوشی می‌شود. بنابراین برای سادگی قرار می‌دهیم $\mathbf{m} = \mathbf{0}$. اکنون T_{1n} و T_{2n} را از معادلات (۵۱-۷) خارج می‌کنیم. برای این کار، از معادله دوم (۵۱-۷) بر حسب x_2 و معادله اول (۵۱-۷) بر حسب x_1 دیفرانسیل‌گیری کرده و نتیجه را باهم جمع می‌کنیم. با استفاده از معادله سوم (۵۰-۷)، معادله نامعلوم نظریه سطح را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} + q_n = 0. \quad (۵۲-۷)$$

این بر حسب نمادگذاری اندیسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + q_n = 0,$$

در حالی که بر حسب نمادگذاری بدون مولفه‌ای به صورت نوشته می‌شود:

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (۵۳-۷)$$

در حقیقت:

$$\mathbf{M} = -M_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta \times \mathbf{n}.$$

با استفاده از اتحاد زیر:

$$(\mathbf{i}_\beta \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = -\mathbf{i}_\beta,$$

که اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود، داریم:

$$\mathbf{M} \times \mathbf{n} = -M_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha (\mathbf{i}_\beta \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = M_{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta.$$

سپس به دست می آوریم:

$$\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) = \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} \mathbf{i}_\beta, \quad \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})) = \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

در نتیجه (۷-۵۳) از این روابط به دست می آید.

فرضیات سینماتیکی کرشهف در نظریه سطح به صورت فرض همانند جابه جایی میدان کاهش می یابد، یعنی:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2, z) &= \mathbf{v}(x_1, x_2) - z \tilde{\nabla} \omega(x_1, x_2) \\ &= \tilde{\mathbf{v}} + \omega \mathbf{n} - z \tilde{\nabla} \omega, \quad \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (۷-۵۴)$$

اکنون عبارتی برای تانسور کشش متناظر با $\mathbf{u}$ به دست می آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \left(\tilde{\nabla} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\tilde{\mathbf{v}} + \omega \mathbf{n} - z \tilde{\nabla} \omega) \\ &= \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} - z \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \omega + (\tilde{\nabla} \omega) \mathbf{n} - \mathbf{n} \tilde{\nabla} \omega, \end{aligned}$$

و

$$(\nabla \mathbf{u})^T = (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}})^T - z \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \omega + \mathbf{n} \tilde{\nabla} \omega - (\tilde{\nabla} \omega) \mathbf{n}.$$

بنابراین:

$$2\mathcal{E} = \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}})^T - 2z \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \omega.$$

که از آن می توان نتیجه گرفت $\mathcal{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{E} = 0$.

با استفاده از نمادگذاری:

$$2\mathcal{E} = \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}})^T, \quad \mathcal{A} = -\tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \omega,$$

کشش سطح را به صورت دو قسمت زیر به دست می آید:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} + z \mathcal{A}. \quad (۷-۵۵)$$

در اینجا $\mathcal{E}$ نشان دهنده تغییر سطح تخت است و $\mathcal{A}$ با خمیدگی سطح متناسب است. از نظر هندسی $\mathcal{A}$ تشریح کننده تغییرات کوچکی از انحنای سطح متناسب با خمیدگی است.

اکنون از فرضیات استاتیکی کرشلف استفاده می‌کنیم $\sigma_{33}=0$. از قانون هوک نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{12}.\end{aligned}\quad (۵۶-۷)$$

با جایگذاری (۵۵-۷) در معادلات بالا به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) + \frac{Ez}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) + \frac{Ez}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{12} + \frac{Ez}{1-\nu} \varepsilon_{12}.\end{aligned}$$

اکنون با استفاده از (۴۷-۷) و (۴۸-۷) از عبارت‌های $\sigma_{\alpha\beta}$ برحسب z روی ضخامت انتگرال‌گیری کرده، عبارتی را برای مبین‌ها و جفت‌های تنشی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}T_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \\ T_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ T_{12} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \varepsilon_{12}, \\ M_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \\ M_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \varepsilon_{12}.\end{aligned}\quad (۵۷-۷)$$

ثابت زیر

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

سختی خمیدگی نامیده می‌شود. با جایگذاری عبارت های $M_{\alpha\beta}$ در (۷-۵۲) و در نظر گرفتن مقادیر زیر:

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}, \quad \varepsilon_{12} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2},$$

به دست می‌آوریم:

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} \right) = q_n. \quad (۷-۵۸)$$

این عبارت به صورت بدون مولفه‌ای برابر است با:

$$D \tilde{\nabla}^4 \omega = q_n. \quad (۷-۵۹)$$

زیرا:

$$\tilde{\nabla}^4 = (\tilde{\nabla}^2)^2 = \Delta^2,$$

معادله (۷-۵۸) یا (۷-۵۹) معادله دو هماهنگی نامیده می‌شود.

این معادله تاریخی طولانی در نظریه سطح دارد. معادله خمیدگی توسط ماری-سوفیا جرمین که جایزه نوبل را از آکادمی علوم فرانسه در سال ۱۸۱۶ دریافت کرد، منشر شد. در ادامه برخی اشتباهات جرمین توسط لاگرانژ تصحیح گردید که اکنون آن را معادله جرمین یا معادله جرمین-لاگرانژ می‌نامند. نظریه سطح که آن را مورد بررسی قرار دادیم به کرشلف که شرایط مرزی تصحیحی را برای سطح فرمول‌بندی کرد، منصوب است. همچنین کرشلف به طور آشکاری فرضیات معنادار فیزیکی مرتبط با توزیع جابه جایی ها و تنش ها در سطح را معرفی کرد.

توجه داشته باشید که $T_{\alpha\beta}$ به ω بستگی ندارد. بنابراین معادلات تعادل سطح به دو گروه تجزیه می‌شود. اولین گروه شامل دو معادله اول (۷-۵۰) نسبت به $\tilde{\nabla}$ است، در حالی که دومین گروه شامل معادله (۷-۵۹) برای متغیر ω است.

اکنون معادلات T.A را بر حسب بردار جابه‌جایی مماسی $\tilde{\nabla}$ می‌نویسیم. معادلات (۷-۵۰) به صورت تانسوری زیر هستند:

$$\tilde{\nabla}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (۶۰-۷)$$

معادلات ساختاری $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}$ برابر است با:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{A} \text{tr} \varepsilon \right].$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}) &= \frac{Eh}{1+\nu} \left[\tilde{\nabla} \cdot \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \tilde{\nabla} \text{tr} \varepsilon \right] \\ &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \frac{2\nu}{1-\nu} \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right] \\ &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right]. \end{aligned}$$

معادله (۶۰-۷) بر حسب $\tilde{\mathbf{v}}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right] + \mathbf{q} \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (۶۱-۷)$$

ممکن است برخی نگرانی‌ها در مورد معادلات (۵۱-۷) که شامل مبین‌های تنش برشی T_{1n} و T_{2n} است، وجود داشته باشد. به نظر می‌رسد که هر دو عبارت $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ و T_{1n} و T_{2n} با استفاده فرضیه سینماتیکی Σ و آخرین معادله (۴۷-۷) باید حذف شوند. اما نظریه سینماتیکی کرشلف تنها به صورت تغییر شکل یافتگی محدود می‌شود. بنابراین T_{1n} و T_{2n} در نظریه سطح کرشلف، توسط کشش‌ها تعریف نمی‌شوند؛ آنها به صورت عکس العمل‌های متناسب با قیدهای کشش هستند. توجه داشته باشید که معادلات (۵۱-۷) برای تعیین T_{1n} و T_{2n} به کار می‌روند.

شرایط مرزی

در نظریه صفحه به عنوان حالت خاصی از نظریه پوسته می‌توان روی شمارنده مرزی ω شرایط سینماتیکی:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^0(s), \quad \omega = \omega^0(s), \quad \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \mathcal{G}^0(s), \quad (۶۲-۷)$$

یا شرایط استاتیکی:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \varphi^0(s) \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau}) = \varphi_n^0(s),$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = \ell^0(s). \quad (۶۳-۷)$$

را در نظر گرفت. این مجموعه از شرایط برای مساله مقدار مرزی ترکیبی می‌تواند روی قسمت‌های جزیی از ω بیان شود. به طور جایگزین، در هر نقطه می‌توان شرایط (۷-۶۲) و شرایط دوگان (۶۳-۷) را در نظر گرفت. در هر نقطه باید چهار شرط عددی اختصاص داده شود.

شرایط مورد نظر را به دو قسمت مماسی و عمودی تجزیه می‌کنیم:

$$\varphi^0 = \varphi^0 \cdot \mathbf{A} + \varphi_n^0 \mathbf{n}, \quad \varphi_n^0 = \varphi^0 \cdot \mathbf{n}.$$

مبین های تنش برشی عرضی از شرط تعادل (۷-۵۱) بر حسب زوج‌های تنش به‌دست می‌آید. همانند رفتار پیشین نظریه پوخته قرار می‌دهیم. $m_1 = m_2 = 0$. داریم:

$$T_{1n} = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}, \quad T_{2n} = \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}.$$

این کمیات را می‌توان به صورت معادله تک برداری نیز نوشت:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}).$$

انواع مختلفی از شرایط مرزی ترکیبی وجود دارد. در اینجا خود را به دو تعریف (۷-۶۲) و (۷-۶۳) محدود می‌کنیم. توجه داشته باشید که $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}$ تنها به $\tilde{\mathbf{V}}$ بستگی دارد، در صورتی که $\mathbf{M}$ توسط ω تعریف می‌شود. بنابراین شرایط مرزی در نظریه صفحه شبیه معادلات تعادل به دو قسمت تجزیه می‌شود. قسمت اول ناشی از جابه‌جایی عمودی ω است:

$$\omega|_{\omega_1} = \omega^0(s), \quad \frac{\partial \omega}{\partial \nu}|_{\omega_1} = g^0(s),$$

$$\mathbf{v} \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}))|_{\omega_2} - \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\omega_2} = \varphi_n^0(s), \quad (۶۴-۷)$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \nu|_{\omega_2} = \ell^0(s).$$

قسمت دیگر از جابه‌جایی‌های مماسی $\tilde{\mathbf{V}}$ نتیجه می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{\omega_3} = \mathbf{v}^0(s), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}|_{\omega_4} = \varphi^0(s) \cdot \mathbf{A}. \quad (۶۵-۷)$$

فرض می‌شود که شمارنده صفحه به گونه‌ای تقسیم بندی شده که $\omega_2 = \omega/\omega_1$ و $\omega_4 = \omega/\omega_3$ برقرار است.

در پیوست الف فهرستی از شرایط مرزی همگن رایج برای صفحه بر حسب ω آمده است.

انرژی کششی صفحه

اکنون چگالی انرژی کششی سطح را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم. این کمیت برابر است با:

$$U = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\varepsilon_{..} \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right] + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left[\varepsilon_{..} \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right]. \quad (۶۶-۷)$$

هر سطح حالت خاصی از پوسته‌ای است که در بالا بررسی شد، اما با $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. پس می‌توان از عبارت چگالی کششی پوسته استفاده کرد:

$$U = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \mathbf{T}.. \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{M}..(\mathbf{n} \times \varepsilon).$$

اکنون U را بر حسب جابه‌جایی‌ها بازنویسی می‌کنیم:

$$U = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \right)^2 \right].$$

حرکت‌های صلب

اکنون نتایج معادله $U = 0$ را بررسی می‌کنیم. از آنجایی که U معین مثبت است، مقدار آن صفر است اگر و فقط اگر هر دو مقدار ε و $\varepsilon = \mathbf{0}$ ایجاب می‌کند که سطح می‌تواند بر صفحه خود تنها به صورت جسم صلب حرکت کند. به

عبارت دیگر می‌تواند حول محور عمود بر میان صفحه انتقال و دوران یابد. میدان جابه‌جایی متناظر به صورت زیر است:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \omega_0 \mathbf{n} \times (\rho - \rho_0),$$

در اینجا $\mathbf{v}_0$ بردار ثابت دلخواه واقع در میان صفحه یعنی $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ زاویه ω_0 زاویه دورانی ثابت دلخواه حول $\mathbf{n}$ ، بردار ρ بردار مکان هر نقطه واقع بر میان صفحه و ρ_0 بردار ثابت دلخواه در همان صفحه است. این فرمول حالت خاصی از (۶-۴۱) برای تغییر شکل صفحه است.

معادله:

$$\mathfrak{A} \equiv -\tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \omega = 0$$

ایجاب می‌کند که ω بر حسب x_1 و x_2 تابعی خطی است:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2,$$

که $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ عددهای ثابت دلخواهی هستند. از نظر فیزیکی، ω با انتقال کل سطح در جهت عمود و دوران حول محورهای $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ متناظر است. بنابراین به عنوان کشسانی سه بعدی، $U = 0$ تنها برای جابه‌جایی‌های متناظر با جابه‌جایی‌های کوچک سطح همانند جسم صلب برقرار است.

اصل وردشی لاگرانژ نظریه سطح

به دلیل فرضیات کرشلف در نظریه پوسته، اصل وردشی لاگرانژ کشسانی تغییر می‌کند. اکنون اصل وردشی لاگرانژ را برای سطح فرمول‌بندی می‌کنیم. یادآور می‌شویم که تابعی انرژی کل در کشسانی سه بعدی به صورت زیر است:

$$E(\mathbf{u}) = \int_V w(\varepsilon) dV - \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV - \int_S \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} dS.$$

برای پوسته‌های نازک در می‌یابیم که انتگرال روی V با انتگرال روی میان صفحه Σ نمایش داده می‌شود. این مطلب برای سطح نیز برقرار است:

$$\int_V w(\varepsilon) dV = \int_\Sigma U u d\Sigma,$$

که U توسط (۶۶-۷) تعریف می‌شود. اکنون جملات باقیمانده در E را که با کار نیروهای خارجی متناظر است، بررسی می‌کنیم. آنها در جملات نظریه سطح به صورت زیر هستند:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, d\Sigma + \int_{\omega_4} \phi^0(s) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, dS + \int_{\omega_2} \left(\phi_n^0 \omega - \ell^0 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right) dS.$$

بنابراین تابعی انرژی کل سطح به دو بخش تجزیه می‌شود:

$$E = E_{\tilde{\mathbf{v}}}(\tilde{\mathbf{v}}) + E_{\omega}(\omega),$$

که:

$$E_{\tilde{\mathbf{v}}}(\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \int_{\Sigma} \left[\varepsilon \cdot \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right] - \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\Sigma - \int_{\omega_4} \phi^0(s) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, dS$$

مربوط به جابه‌جایی‌های مماسی و

$$E_{\omega}(\omega) = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \int_{\Sigma} \left[\varepsilon \cdot \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right] d\Sigma - \int_{\Sigma} \omega \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma - \int_{\omega_2} \phi_n^0 \omega \, dS + \int_{\omega_2} \ell^0 \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \, dS$$

متناسب با خمیدگی است.

شناسه‌های $\tilde{\mathbf{v}}$ و ω مربوط به $E_{\tilde{\mathbf{v}}}$ و E_{ω} مستقل هستند، بنابراین مساله کمینه سازی انرژی کل به طور طبیعی به دو مساله کمینه سازی تقسیم می‌شود. همچنین می‌توان دو اصل وردشی را فرمول بندی کرد: یکی برای تغییر شکل های مماسی و دیگری برای خمیدگی سطح.

اصل وردشی لاگرانژ برای تغییر شکل مماسی

قضیه ۷-۱. روی مجموعه‌ای از میدان‌های جابه‌جایی مماسی قابل قبول، نقطه پایدار $\tilde{\mathbf{v}}$ از $E_{\tilde{\mathbf{v}}}$ معادلات تعادل صفحه‌ای (۶۰-۷) را روی Σ یا به طور معادل (۶۱-۷) و شرط مرزی زیر برآورد می‌کند:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}|_{\omega_4} = \varphi^0(s) \cdot \mathbf{A},$$

و برعکس. اگر نقطه پایدار وجود داشته باشد، مقدار $E_{\tilde{\nu}}$ را کمینه می‌کند. مجموعه‌ای از جابه‌جایی‌های مماسی قابل قبول $\tilde{\mathbf{v}}$ شامل تابع های برداری دوبار مشتق‌پذیر روی Σ است و شرط مرزی سینماتیکی روی ω_3 از (۶۵-۷) را برآورد می‌کند. اثبات آن مشابه اص لاگرانژ در کشسانی سه بعدی است (تمرین ۷-۱۸). توجه داشته باشید که کار نیروهای خارجی ناشی از تعریف کلی کار و حالت عمومی بیان شد. حقیقت معادلات تعادل و شرایط مرزی سینماتیکی که برای نقطه پایدار تابعی انرژی تعریف شد بیان کننده این است که تابعی کار به طور دقیق نوشته شده است.

اصل وردشی لاگرانژ برای سطح خمیده

قضیه ۷-۲. روی مجموعه‌ای از میدان‌های منحرف قابل قبول، نقطه پایدار ω از E_{ω} معادلات تعادل صفحه‌ای (۷-۵۳) یا (۷-۵۹) را روی Σ و شرط مرزی استاتیکی (۷-۶۴) روی ω_2 برآورد می‌کند و برعکس. نقطه پایدار در صورت وجود E_{ω} را کمینه می‌کند.

توجه داشته باشید که انحراف های قابل قبول ω شامل تابع هایی است که دارای مشتق های پیوسته تا مرتبه ۴ روی Σ بوده و دو شرط مرزی سینماتیکی روی ω_1 را از (۷-۶۴) برآورد می‌کند.

اثبات. اکنون وردش E_{ω} را تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \delta \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \int_{\Sigma} \left[\mathfrak{a} \dots \mathfrak{a} + \frac{\nu}{1-\nu} tr^2 \mathfrak{a} \right] &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left[\mathfrak{a} + \frac{\nu}{1-\nu} tr \mathfrak{a} \right] \dots \delta \mathfrak{a} \\ &= M_{\alpha\beta} \delta \mathfrak{a}^{\alpha\beta} \\ &= -M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \delta \omega}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}. \end{aligned}$$

با استفاده از این رابطه و قضیه گاوس- استروگراسکی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Sigma} M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \delta\omega}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} d\Sigma &= \int_{\Sigma} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \delta\omega}{\partial x_{\beta}} d\Sigma - \int_{\omega} \nu_{\alpha} M_{\alpha\beta} \frac{\partial \delta\omega}{\partial x_{\beta}} ds \\
&= -\int_{\Sigma} \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \delta\omega d\Sigma + \int_{\omega} \nu_{\beta} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} \delta\omega ds \\
&\quad - \int_{\omega} \nu_{\alpha} M_{\alpha\beta} \frac{\partial \delta\omega}{\partial x_{\beta}} ds \\
&= -\int_{\Sigma} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})) \delta\omega d\Sigma \\
&\quad + \int_{\omega} \mathbf{v} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})) \delta\omega ds \\
&\quad - \int_{\omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \tilde{\nabla} \delta\omega ds, \tag{۶۷-۷}
\end{aligned}$$

در اینجا $\nu_{\alpha} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_{\alpha}$ و S پارامتر طولی روی است. اکنون آخرین انتگرال (۶۷-۷) را بررسی می‌کنیم. روی ω عبارت $\tilde{\nabla} \delta\omega$ می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\tilde{\nabla} \delta\omega = \mathbf{v} \frac{\partial \delta\omega}{\partial \nu} + \tau \frac{\partial \delta\omega}{\partial \tau},$$

در اینجا $\tau = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ مماس برداری روی ω است. با به کارگیری شمارنده پارامتر طولی S روی ω داریم:

$$\frac{\partial \delta\omega}{\partial \tau} = \frac{\partial \delta\omega}{\partial S}.$$

توجه داشته باشید که عبارت‌های $\partial \delta\omega / \partial \nu$ و $\delta\omega$ روی ω مستقل هستند. عبارت‌های $\partial \delta\omega / \partial S$ و $\delta\omega$ از آنجایی که مقدار $\partial \delta\omega / \partial S$ وقتی $\delta\omega$ روی ω معلوم باشد، به طور منحصر به فرد تعریف شده، وابسته هستند. با انتگرال‌گیری جزء به جزء روی شمارنده بسته ω می‌توان مشتق $\partial \delta\omega / \partial S$ را حذف کرد:

$$\int_{\omega} f \frac{\partial g}{\partial S} ds = - \int_{\omega} g \frac{\partial f}{\partial S} ds,$$

در اینجا f و g توابع دلخواه از S هستند. با به کارگیری این رابطه در آخرین انتگرال (۶۷-۷) به دست می‌آوریم:

$$-\int_{\omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \tilde{\nabla} \delta \omega ds = -\int_{\omega} \left[\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \frac{\partial \delta \omega}{\partial \nu} - \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau}) \delta \omega \right] ds.$$

روی ω_1 داریم:

$$\delta \omega = 0 = \frac{\partial \delta \omega}{\partial \nu},$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \delta E_{\omega} = & -\int_{\Sigma} \left[\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \right] \delta \omega d\Sigma \\ & + \int_{\omega_2} \left[\mathbf{v} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})) - \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau}) - \varphi_n^0 \right] \delta \omega ds \\ & + \int_{\omega_2} \left[\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} - \ell^0 \right] \frac{\partial \delta \omega}{\partial \nu} ds. \end{aligned} \quad (68-7)$$

به کمک فرآیند استاندارد حسابان وردشی (برای مثال [البدوف و کلود (۲۰۰۳)] را نگاه کنید) می‌توان نشان داد که با برقراری معادله $\delta E_{\omega} = 0$ برای تمام مقادیر قابل قبول $\delta \omega$ ، هر دو معادله تعادل برای صفحه:

$$\Sigma \text{ روی } \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$$

و شرایط مرزی استاتیکی:

$$\nu \cdot (\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n})) - \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau}) - \varphi_n^0 = 0$$

و

$$\omega_2 \text{ روی } \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} - \ell^0 = 0$$

ارضاء می‌شود.

همچنین این مشتق بر تعریف صحیح کار ناشی از بار عرضی نیز دلالت دارد؛ هر نقطه پایدار E_{ω} در (۷-۵۳) روی Σ و شرایط مرزی (۷-۶۴) روی ω_2 صادق است.

اکنون می‌توان عکس این مطلب را ثابت کرد: جواب w مربوط به مساله مقدار مرزی (۷-۵۳)، (۷-۶۴) نقطه‌ای پایدار از E_w است. با ضرب کردن (۷-۵۳) در مقدار قابل قبول δw ، سپس انتگرال‌گیری جزء به جزء مناسب و انجام تبدیلات مرتبه معکوس، به معادله $\delta E_w = 0$ می‌رسیم. این اثبات را کامل می‌کند.

به روشی مشابه با اثبات کمینه سازی اصل لاگرانژ در کشسانی، می‌توان نشان داد که همانند کمینه شدن نقطه پایداری در مساله خمیدگی است. خواننده را ترغیب می‌کنیم که اثبات کاملی را انجام دهد. توجه داشته باشید که مورد مهم در اثبات کشسانی سه بعدی تنها ساختار تابعی انرژی کل بود: این عبارت است از جمع تابع y های مربعی و خطی است و قسمت مربعی آن معین مثبت است.

توجه داشته باشید که با در نظر گرفتن سطح به عنوان جسمی سه بعدی، دستگاهی از معادلات هم زمان برای جابه‌جایی‌های مرتبه دوم با سه شرط مرزی در هر نقطه از مرز را به دست می‌آوریم. تبدیل مساله به مساله سطح دو بعدی باعث می‌شود که دوباره به سه معادله دیفرانسیل برای جابه‌جایی به دست آید اما معادله مربوط به w از مرتبه چهارم است؛ این موضوع با دو شرط برای هر نقطه از لبه سطح و دو معادله دیگر از مرتبه دوم تکمیل می‌گردد. افزایش مرتبه دستگاه، مرتبه مساله سه بعدی را به مساله دو بعدی کاهش می‌دهد.

اصول وردشی‌های دیگری نیز در نظریه پوسته وجود دارد. اهمیت آنها در این نظریه حتی از حالت کشسانی بیشتر است. آنها اساس روش های عددی و بررسی سوالات کیفی نظریه هستند. همچنین اصول وردشی در ساختار مربوط به ویرایش های مختلف نظریه پوسته مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان مثال می‌توان حالتی از توزیع تنش و جابه‌جایی های در امتداد ضخامت و به دست آوردن معادلات تعادل، پیدا کردن مجموعه هایی قابل قبول از شرایط مرزی و اثبات خوش رفتاری شرایط متناظر با مسایل مقدار مرزی، معرفی کرد.

یکتایی جواب

جواب برای مساله تعادل در نظریه سطح همانند مساله سه بعدی کشسانی، یکتا است. یعنی اگر برخی قسمت های شمارنده مرزی مقید گردد، در این صورت جواب حقیقتاً یکتا خواهد بود. وقتی سطح همانند جسم صلب حرکت می کند، جواب به صورت یکتا توسط معادلات و شرایط مرزی در بازه حرکتی کوچک صلب تعریف می شود. به طور خلاصه اثباتی از آن را ارائه می دهیم.

فرض کنید که دو جواب v_1 و v_2 برای مساله مقدار مرزی $(7-60)$ ، $(7-65)$ ، $(7-53)$ و $(7-64)$ وجود دارد. تفاضل $v = v_2 - v_1$ جوابی برای مساله مقدار مرزی همگن است. به آسانی دیده می شود که این مقدار می تواند نقطه پایداری از تابعی انرژی کل باشد:

$$\int_{\Sigma} U d\Sigma.$$

رابطه بالا ایجاب می کند که:

$$\delta \int_{\Sigma} U d\Sigma = 0.$$

اما U به صورت همگن مربعی بوده، بنابراین با جایگذاری $\delta v = v$ در δU به دست می آوریم $\delta U = 2U(v)$ و در نتیجه:

$$2 \int_{\Sigma} U d\Sigma = 0.$$

اما پیشتر سوال مربوط به صفر شدن تابعی کششی را بررسی کردیم: معادله

$$\int_{\Sigma} U d\Sigma = 0$$

ایجاب می کند که v جابه جایی کوچک صلبی از سطح است. بنابراین یکتایی جواب تعادل نقض می شود: جواب روی جابه جایی های صلب وقتی به صورت یکتا می شود که قیود سینماتیک مرزی نداشته باشیم.

تمرین ۷-۱۴. $(7-50)$ را از $(7-49)$ به دست آورید.

تمرین ۷-۱۵. نشان دهید که $\varepsilon = \tilde{V} \cdot \tilde{v} - z \tilde{V} \cdot \tilde{V} \omega$.

تمرین ۷-۱۶. فرض کنید ω و مشتقات مرتبه اول و دوم آن کوچک باشند. بیان کنید که $\mathcal{E}$ تانسور انحنا از سطح خمیده صفحه است. نتایج تمرین ۵-۳۳ را به کار برید.

تمرین ۷-۱۷. عبارت (۷-۵۸) را به دست آورید.

تمرین ۷-۱۸. اصل وردشی جابه‌جایی‌های مماسی در نظریه سطوح را بیان کنید.

تمرین ۷-۱۹. نشان دهید که در هر نقطه از تعادل صفحه، E_ω دارای مقدار کمینه است.

تذکرات

نظریه صفحه کرشلف به نظریه پوسته قابل بسط است. فرضیات کرشلف در نظریه پوسته را فرضیات کرشلف-لاو می‌نامند. معادلات در نظریه پوسته کرشلف-لاو روی میان سطح نوشته شده است. همچنین چگالی انرژی کششی پوسته به دو قسمت تغییر شکل‌های مماسی و خمیده تجزیه می‌شود. گرچه این عبارت‌ها برخلاف تجزیه انرژی صفحه مستقل هستند. علاوه بر این، هر سه معادله تعادل برای جابه‌جایی‌ها از تمام مولفه‌های بردار جابه‌جایی تشکیل شده است. در اصطلاح نظریه پوسته کرشلف-لاو از نظریه صفحه پیچیده‌تر است اما از نظر کیفی کاملاً مشابه هستند. اصل وردشی لاگرانژ و یکتایی جواب مساله مقدار مرزی را در نظریه پوسته داریم. همچنین در هر دو می‌توان وجود جواب را اثبات کرد اما این اثبات در نظریه پوسته به ابزارهای پیشرفته ریاضیات نیاز دارد.

۷-۹ در خصوص نظریه‌های غیر کلاسیک صفحه و پوسته

دیدگاه ریسنر در مورد نظریه صفحه و پوسته

یادآوری می‌کنیم که فرضیات کرشلف تنها منجر به تقریبی برای تغییر شکل‌های واقعی اجسام نازک می‌شود. در مکانیک صفحه و پوسته روش‌های دیگری برای نمایش تغییر شکل‌های سه بعدی که تغییر شکل اریب، بسط عمودی و دیگر عوامل وجود دارند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. در حالت خاص، روش‌های ریسنر و میندیلین اجازه می‌دهند که مدل‌های سه بعدی دقیق‌تری را برای جواب مساله کشسانی سه بعدی پوسته بسازیم. هدف اصلی نظریه با استفاده از معادلات صفحه ریسنر توصیف می‌شود.

برخلاف (۷-۵۴) میدان جابه‌جایی در روش ریسر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_2, x_1, z) &= \mathbf{v}(x_1, x_2) - z \mathcal{G}(x_1, x_2) \\ &= \tilde{\mathbf{v}} + \omega \mathbf{n} - z \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned} \quad (۷-۶۹)$$

مولفه‌های $\mathcal{G}$ به عنوان زوایای دورانی سطح مقطع پوسته در نظر گرفته می‌شود. در حالت کلی برخلاف نظریه کرشهف، $\tilde{\mathbf{v}} \neq \omega$ و $\mathcal{G}$ مستقل از $\mathbf{v}$ است. بنابراین در نظریه ریسر پنج متغیر مجهول وجود دارد: مولفه‌های ω, v_1, v_2 از $\mathbf{v}$ و مولفه‌های $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ از $\mathcal{G}$. مبین‌های کششی اریب عرضی در نظریه ریسر دارای وضعیتی همانند مبین‌های تنش و جفت‌های تنش خمیدگی و پیچشی هستند. آنها بر خلاف آنچه در مدل کرشهف اتفاق می‌افتد، مستقل بوده و بنابراین لازم است که معادلات ساختاری اضافی در امتداد خطوط (۷-۴۷) فرمول‌بندی شود. شکل معادلات تعادل برای صفحه ریسر همانند نظریه کرشهف یعنی (۷-۴۵) است:

$$\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} = 0, \quad \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} = 0, \quad (۷-۷۰)$$

در اینجا $\mathbf{T}$ و $\mathbf{M}$ به ترتیب تانسور مبین تنش و تانسور جفتی تنش بوده و $\mathbf{q}$ و $\mathbf{m}$ بیان‌کننده جفت‌ها و نیروهای توزیعی روی Σ هستند. توجه داشته باشید که $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$. اینها بر حسب نمایش مولفه ای با (۷-۵۰) و (۷-۵۱) یکسان هستند.

معادلات دینامیکی نظریه عبارتند از:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} &= \rho \ddot{\mathbf{v}} + \rho \Theta_1 \cdot \dot{\mathcal{G}}, \\ \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} &= \rho \Theta_1^T \cdot \dot{\mathbf{v}} + \rho \Theta_2 \cdot \dot{\mathcal{G}}, \end{aligned} \quad (۷-۷۱)$$

که ρ چگالی پوسته سطح است، Θ_1 و Θ_2 تانسورهای لختی بوده و برابرند با:

$$\Theta_2^T = \Theta_2.$$

شرایط مرزی صفحه عبارتند از

$$\mathbf{v}|_{\omega_1} = \mathbf{v}^0(s), \quad \mathcal{G}|_{\omega_3} = \mathcal{G}^0(s), \quad (۷-۷۲)$$

$$\nu \cdot \mathbf{T}|_{\omega_2} = \varphi^0(s), \quad \nu \cdot \mathbf{M}|_{\omega_4} = \ell^0(s), \quad (۷-۷۳)$$

که $\mathbf{v}^0(s)$ و $\mathcal{G}^0(s)$ تابع‌های برداری از پارامتر طول s هستند که $\mathcal{G}^0 \cdot \mathbf{n} = 0$. آنها به ترتیب جابه‌جایی‌ها و چرخش روی برخی از قسمت‌های مرز را تعریف می‌کنند. با در

نظر گرفتن $\varphi(s)$ و $\ell(s)$ می‌توان مبین‌های تنش و جفت‌های تنش وارد بر لبه صفحه ساکن $\ell \cdot \mathbf{n} = 0$ را تعریف کرد.

معادلات ساختاری در نظریه صفحه ریسر به صورت زیر هستند:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mu, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \Gamma \cdot \gamma, \quad \mathbf{M} = \mathbf{D} \cdot \kappa. \quad (7-74)$$

در اینجا $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ تانسور مبین تنش سطح، $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ مبین‌های تنش اریب عرضی و M تانسور جفتی تنش است. اندازه‌های کشش به صورت زیر بیان می‌شود: μ تانسور کششی درون صفحه‌ای، γ بردار کشش‌های اریب عرضی و k تانسور کشش‌های برون صفحه‌ای است. تعریف این کمیت‌ها به صورت زیر است:

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}})^T \right), \quad \gamma = \tilde{\nabla} \omega - \mathbf{n} \times \mathcal{G}, \quad \kappa = \tilde{\nabla} \mathcal{G}.$$

نمادگذاری باقیمانده برابر است با تانسورهای مرتبه چهارم $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ تانسور مرتبه دوم Γ که خواص سخت شدگی موثر صفحه را تشریح می‌کنند؛ این کمیات به خواص مواد صفحه و هندسه سطح مقطع بستگی دارند. در حالت یکنواخت بودن صفحه که خواص تقارنی حول میان صفحه وجود دارد، تانسورهای سخت شدگی موثر به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= C_{11} \mathbf{A} \mathbf{A} + C_{22} (\mathbf{A}_2 \mathbf{A} \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_4), \\ \mathbf{D} &= D_{22} (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_4) + D_{33} \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_3, \\ \Gamma &= \Gamma \mathbf{A}, \end{aligned}$$

که:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2, & \mathbf{A}_2 &= \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1, & \mathbf{A}_4 &= \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1, \end{aligned}$$

و $\mathbf{i}_1$ و $\mathbf{i}_2$ بردارهای پایه یک‌به‌یک با شرط $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = 0$ روی میان صفحه هستند. قرار می‌دهیم $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$. رابطه تعامد زیر را می‌توان به دست آورد:

$$\frac{1}{2} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

مولفه‌های تانسور سخت شدگی برای صفحه همگن یکنواخت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{11} = \frac{Eh}{2(1-\nu)}, \quad C_{22} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} = \mu h,$$

$$D_{33} = \frac{Eh^3}{24(1-\nu)}, \quad D_{22} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} = \frac{\mu h^3}{12}.$$

سخت شدگی خمیدگی کلاسیک برای صفحه به صورت زیر است:

$$D = D_{33} + D_{22} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (۷۵-۷)$$

چگالی سطح و تانسور لختی عبارتند از:

$$\rho = \rho_0 h, \quad \Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = \Theta A, \quad \Theta = \frac{\rho_0 h^3}{12}, \quad (۷۶-۷)$$

که ρ_0 چگالی مادی صفحه است.

سخت شدگی اریب عرضی به صورت زیر داده می شود:

$$\Gamma = k \mu h, \quad (۷۷-۷)$$

در اینجا k عامل تصحیح اریب است که برای اولین بار توسط تیموشنکو در نظریه پرتو^{۱۳} معرفی شد. برای مقدار k ، میندلین^{۱۴} $k = \pi^2/12$ را ارائه داد. ریسنر^{۱۵} مقدار مشابه $k = 5/6$ را ارائه نمود. در مقالات مقادیر دیگر برای k ذکر شده است، به عنوان مثال برای صفحاتی که در ضخامت بطور قوی ناهمگن اند، به طور مشخص مقدار k با مقادیر بالا متفاوت است^{۱۶}.

¹³ Timoshenko, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Phil. Mag. Ser. 6*, **41**, 744–746, 1921.

¹⁴ Mindlin, R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **18**, 31–38, 1951.

¹⁵ Reissner, E. On the theory of bending of elastic plates. *J. Math. Physics*, **23**, 184–194, 1944.

¹⁶ Altenbach, H., and Eremeyev, V.A. Direct approach based analysis of plates composed of functionally graded materials. *Arch. Appl. Mech.*, **78**, 775–794, 2008.

چگالی انرژی کشش برای صفحه رایسنر به صورت زیر است:

$$U = \frac{1}{2} \mu \cdot C \cdot \mu + \frac{1}{2} \kappa \cdot D \cdot \kappa + \frac{1}{2} \gamma \cdot \Gamma \cdot \gamma.$$

در اینجا دیده می‌شود که:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial U}{\partial \mu}, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial U}{\partial \kappa}.$$

پنج معادله عددی (۷-۵۰) و (۷-۵۱) از پنج عدد ناشناخته $\omega, \vartheta_1, \nu_1, \nu_2$ و ϑ_2 تشکیل شده‌اند. معادله (۷-۵۹) برای ω در مدل رایسنر به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$D \tilde{\nabla}^4 \omega = q_n - \frac{D}{\Gamma} \Delta q_n. \quad (7-58)$$

نتایج به دست آمده از قضیه رایسنر برای بارگذاری های بسیار شدید غیر همگن به دلیل وجود جمله اضافی $(D/\Gamma) \Delta q_n$ می‌تواند به طور مشخص از نتایج مربوط به مدل کرشلف متفاوت باشد.

پیشنهاد زیر را برای خوانندگان علاقمند داریم.

تمرین ۷-۲۰. معادله (۷-۵۸) را به دست آورید.

قضیه رایسنر معمولاً برای صفحات غیر نازک، مسایل دینامیکی و حالتی از مواد غیر یکنواخت که دارای سختی مایل هستند، به کار گرفته می‌شود. نمایش با جزئیات بیشتر این قضیه را می‌توان در [آوانگ، ردی و لی (۲۰۰۰)؛ ژیلین (۲۰۰۶)] یافت؛ همچنین آلتنباخ^{۱۷} و گریگولیوک و سلژوف^{۱۸} را نگاه کنید.

¹⁷ Altenbach, H. An alternative determination of transverse shear stiffnesses for sandwich and laminated plates. *Int. J. Solids Structures*, **37**, 3503–3520, 2000. Altenbach, H. On the determination of transverse shear stiffnesses of orthotropic plates. *ZAMP*, **51**, 629–649, 2000.

¹⁸ Grigolyuk, E.I., and Selezov, I.T. *Nonslocal theories of vibration of beams, plates and shells* (in Russian). In: *Itogi nauki i tekhniki, Mekhanika tverdogo deformiruemogo tela*, vol 5, VINITI, Moskva, 1973.

نظریه‌های مرتبه بالاتر صفحه و پوسته

تقریب جابه‌جایی میدان (۶۹-۷) در Z خطی است. در نوشته‌های مربوط به قضیه پوسته با مرتبه‌های بالاتری از تقریب‌های جابه‌جایی Z روبرو هستیم. ایده‌ی اصلی بسط جابه‌جایی بر حسب سری توان‌های Z متعلق به کوشی و پواسون است. چنین می‌توان گفت که معادله جرمین برای تغییر شکل صفحه نشان دهنده قضیه مرتبه صفر است به طوری که میدان تغییر شکل به Z بستگی ندارد. معادله (۶۹-۷) می‌تواند به عنوان پایه‌ای از قضیه مرتبه اول در نظر گرفته شود. بسط برخی ویرایش‌های قضیه مرتبه بالاتر در تعدادی از کارها آمده؛ گرچه دشواری‌های واقعی همانند چگونگی تعریف آن روی شرایط مرزی و تعبیر فیزیکی مرتبه بالاتر ممان افزایش می‌یابد. به عنوان مثال قضیه صفحه مرتبه سوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مروری بر ادبیات این ویرایش از قضیه در مقاله [وانگ، ردی و لی (۲۰۰۰)] وجود دارد. میدان جابه‌جایی به‌طور تقریبی زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2, Z) &= \mathbf{v}(x_1, x_2) + Z \phi(x_1, x_2) + Z^3 \psi(x_1, x_2) \\ &= \tilde{\mathbf{v}} + \omega \mathbf{n} + Z \phi + Z^3, \end{aligned} \quad (۷۹-۷)$$

که $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} = 0$ و ϕ و ψ توابعی هستند به‌طوری‌که $\phi \cdot \mathbf{n} = 0$ و $\psi \cdot \mathbf{n} = 0$ برقرار است. برای حالتی خاص، می‌توان عبارت زیر را برای ψ پیشنهاد داد:

$$\psi = -\alpha (\phi + \tilde{\mathbf{V}} \omega),$$

که $\alpha = 4/(3h^2)$ و h ضخامت صفحه است. تانسور کشش برابر می‌شود با:

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\gamma \mathbf{n} + \mathbf{n} \gamma), \quad (۸۰-۷)$$

که

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon} &= \varepsilon + \frac{z}{2} \left(\tilde{\nabla} \phi + (\tilde{\nabla} \phi)^T \right) + \frac{z^3}{2} \left(\tilde{\nabla} \psi + (\tilde{\nabla} \psi)^T \right) \\
&= \varepsilon + \frac{z}{2} \left(\tilde{\nabla} \phi + (\tilde{\nabla} \phi)^T \right) - \alpha \frac{z^3}{2} \left(\tilde{\nabla} \phi + (\tilde{\nabla} \phi)^T + 2\tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \omega \right), \\
\gamma &= \phi + 3z^2 \psi = \phi - 3z^2 \alpha \phi - 3z^2 \alpha \tilde{\nabla} \omega, \\
2\varepsilon &= \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}})^T.
\end{aligned}$$

مبیین‌های تنش $T_{\alpha\beta}$ ، تنش اربیب عرضی $T_{\alpha n}$ و زوج‌های تنش $M_{\alpha\beta}$ در قضیه مرتبه سوم قابل تعریف هستند. اما برخی کمیات اضافی همانند مبیین‌های تنش مرتبه بالاتر R_α و $P_{\alpha\beta}$ را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} &= \left[\left[\sigma_{\alpha\beta} \right] \right] \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz, & T_{\alpha n} &= \sigma_{\alpha n} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dz, \\
M_{\alpha\beta} &= \left[\left[z \sigma_{\alpha\beta} \right] \right] \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha\beta} dz, & (۸۱-۷)
\end{aligned}$$

$$p_{\alpha\beta} = \left[\left[z^3 \sigma_{\alpha\beta} \right] \right] \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \sigma_{\alpha\beta} dz, \quad R_\alpha = \left[\left[z^2 \sigma_{\alpha n} \right] \right] \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sigma_{\alpha 3} dz.$$

تمرین ۷-۲۱. با استفاده از (۷-۸۰) و (۷-۵۶)، معادله (۷-۸۱) را برحسب مولفه‌های ϕ و ω به‌دست آورید.

معادلات تعادل به دو دستگاه تجزیه می‌شود. اولی برای حالت سطحی بوده که شکل آن همانند قضیه کرشهف است:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + q_1 = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + q_2 = 0. \quad (۸۲-۷)$$

معادلات (۷-۸۲) با شرایط مرزی زیر کامل می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{v}} \big|_{\omega_1} = \tilde{\mathbf{v}}^0(s), \quad \nu \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \big|_{\omega_2} = \phi^0(s), \quad (۸۳-۷)$$

که

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^0 = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \phi^0 = 0, \quad \omega_1 \cup \omega_2 = \omega, \quad \omega_1 \cap \omega_2 = \phi.$$

معادلات ترکیبی عبارتند از:

$$T_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}),$$

$$T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}),$$

$$T_{12} = \frac{Eh}{1+\nu} \epsilon_{12}.$$

مساله مقدار مرزی برای صفحه خمیده با معادلات تعادل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{1n}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{2n}}{\partial x_2} + \alpha \left(\frac{\partial^2 P_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 P_{22}}{\partial x_1^2} \right) + q_n &= 0, \\ \frac{\partial \hat{M}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{M}_{12}}{\partial x_2} - \hat{T}_{1n} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{M}_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{M}_{22}}{\partial x_2} - \hat{T}_{2n} &= 0, \end{aligned} \quad (۷-۸۴)$$

که

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - \alpha P_{\alpha\beta}, \quad \hat{T}_{\alpha n} = T_{\alpha n} - 3\alpha R_{\alpha}.$$

شرایط مرزی سینماتیکی برای مساله خمیدگی شامل چهار معادله عددی زیر است:

$$\omega|_{\omega} = \omega^0(s), \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_{\omega} = \omega_n^0(s), \quad \phi|_{\omega} = \phi^0(s),$$

که $\phi^0 = 0$. شرایط مرزی استاتیکی برحسب مبین‌های تنشی، زوج‌های تنشی و ممان‌های مرتبه بالاتر بیان می‌شود؛ علاقمندان می‌توانند به منابع اصلی [اوانگ، ردی و لی (۲۰۰۰)] و کینزler^{۱۹}، لوینسون^{۲۰} و ردی^{۲۱} مراجعه کنند.

¹⁹ Kienzler, R. On consistent plate theories. *Arch. Appl. Mech.*, **72**, 229–247, 2002.

²⁰ Levinson, M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mech. Res. Comm.*, **7**, 343–350, 1980.

²¹ Reddy, J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **51**, 745–752, 1984.

توجه داشته باشید که قضایای صفحه و پوسته مرتبه سوم و بالاتر نشان می‌دهند که چرا به فرمول‌بندی وردشی نیاز است. اینها تنها راه تعریف صحیح شرایط مرزی استاتیکی هستند.

پوسته‌های میکرو سطحی یا قضیه پوسته شش پارامتری

به‌عنوان مثالی از قضیه پوسته غیر کلاسیکی، قضیه پوسته‌های میکرو سطحی را مطرح می‌کنیم. ریشه آن ابتدا در کارهای برادران کوسرات، یوجین و فرانسیس اکوسرات و کوسرات (۱۹۰۹) آمده است. قضیه میکرو سطحی پوسته‌ها در کارهای ارمیف و زوبوف (ارمیف و زوبوف (۲۰۰۸)، ژیلین [ژیلین (۲۰۰۶)] و دیگران بیان شده است.

معادلات دینامیکی و سینماتیک پوسته در این قضیه با همین موارد در قضیه پوسته شش پارامتری که ویرایشی غیرخطی از آنچه در کتاب‌های لیبای و سیموندز [لیبای و سیموندز (۱۹۹۸)] و چروشیلوسکی و همکاران [چروشیلوسکی، ماکوفسکی و پیتراژکیویژ (۲۰۰۴)] آمده، مطابقت دارد. قضیه صفحه میکرو سطحی در نوشته ارینگن [ارینگن (۱۹۹۹)] وجود دارد. اساس آن انتگرال‌گیری روی ضخامت سطح است هنگامی که ماده آن به صورت پیوستار کوسراتی در نظر گرفته شود. این موضوع از قضیه شش پارامتری صفحه متفاوت است زیرا بیش از شش تابع عددی نامعلوم را شامل می‌شود.

سینماتیک سطح پوسته با شش کمیت عددی قابل تشریح است که سه تا از آنها مولفه های بردار جابه‌جایی v و مابقی مولفه‌های بردار میکرو چرخشی ϑ هستند. بنابراین شش درجه آزادی هر پوسته خاص با مولفه‌های v و ϑ تشریح می‌شود. بردار ϑ عبارت $\vartheta.n=0$ را ارضاء می‌کند؛ بردارهای v و ϑ به‌طور متقابل مستقل هستند. این شبیه ویرایش دو بعدی محیط کوسرات با تنش‌های جفتی و برهم کنش چرخشی ذرات است.

برای پوسته میکرو سطح می‌توان زوج نیروی وارد بر پوسته را تعیین کرد. در اینجا مرتبه معادلات تعادل برابر ۱۲ است که با شش شرط روی لبه پوسته تکمیل می‌شوند. توزیع نیروها و زوج‌ها را می‌توان روی قسمتی از لبه که دارای ساختار هندسی آزادتری است، تعیین کرد. این موضوع باعث گسترش دامنه کاربردی این قضیه در مقایسه با قضیه‌های

مورد بررسی بالا می شود: یعنی می توان گفت که با تعیین شرایط مرزی، پوسته مقید به جسم صلب قابل تشریح است.

در حالت خاص برای تشریح پوسته های انشعابی و اجسام دارای دیواره نازک با ساختار درونی پیچیده که شامل سطوح و پوسته های چند لایه یا ترکیبی هستند، پوسته های دارای تقسیم بندی داخلی با تیرک های عمودی و مشابه آرایش شش ضلعی یا ساخته شده از مواد بسیار متخلخل از قضیه میکروسطح استفاده می شود. اکنون معادلات پوسته میکروسطح را برای تغییر شکل کوچک به دست می آوریم. معادلات دینامیکی برابرند با:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} &= \rho \dot{\mathbf{v}} + \rho \Theta_1 \cdot \ddot{\mathbf{q}}, \\ \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} &= \rho \Theta_1^T \cdot \dot{\mathbf{v}} + \rho \Theta_2 \cdot \ddot{\mathbf{q}},\end{aligned}\quad (۸۵-۷)$$

که $\mathbf{T}$ و $\mathbf{M}$ به ترتیب عبارتند از تانسورهای تنش سطح و تنش زوجی همانند آنچه در قضیه کرشهف آمد، ρ چگالی سطح پوسته است، Θ_1 و Θ_2 تانسورهای اینرسی هستند که Θ_2 متقارن است یعنی $\Theta_2^T = \Theta_2$ ، و $\mathbf{q}$ و $\mathbf{m}$ به ترتیب برابر نیروها و زوج های توزیع شده سطحی هستند. همچنین در این قضیه می توان یک زوج چرخشی (یا ممان دورانی) برای سطح پوسته پیشنهاد داد. معادلات تعادل به صورت زیر هستند:

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} = 0, \quad \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} = 0. \quad (۸۶-۷)$$

شرایط در نقاط مرزی می تواند به صورت سینماتیکی:

$$\mathbf{v}|_{\omega_1} = \mathbf{v}^0(s), \quad \mathcal{G}|_{\omega_3} = \mathcal{G}^0(s), \quad (۸۷-۷)$$

یا استاتیکی:

$$\nu \cdot \mathbf{T}|_{\omega_2} = \varphi(s), \quad \nu \cdot \mathbf{M}|_{\omega_4} = \ell(s), \quad (۸۸-۷)$$

باشند، به طوری که $\mathbf{v}^0(s)$ و $\mathcal{G}^0(s)$ با توابع برداری پارامتر طول s داده می شوند که جابه جایی ها و میکرو دوران لبه پوسته توسط آنها تعریف می شود. تنش های سطح و زوج های تنش روی لبه با توابع $\varphi(s)$ و $\ell(s)$ تعیین می شوند. در اینجا داریم:

$$\omega = \omega_1 \cup \omega_2 = \omega_3 \cup \omega_4 \quad \omega_2 = \omega \setminus \omega_1 \quad \omega_4 = \omega \setminus \omega_3.$$

شکل معادلات تعادل و دینامیکی برای پوسته میکروسطح تفاوتی با روابط (۷-۷۰) و (۷-۷۱) ندارد. در این قضیه به طور کلی $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ و $\ell \cdot \mathbf{n} \neq 0$ برقرار است. در حالت خاص $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \neq 0$.

اندازه‌های کششی به صورت زیر هستند:

$$\varepsilon = \tilde{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{A} \times \mathcal{G}, \quad \chi = \tilde{\nabla} \mathcal{G}, \quad (۷-۸۹)$$

در اینجا ε و χ به ترتیب تانسورهای کششی نامتقارن و کششی خمیدگی هستند. معادلات اصلی برای هر پوسته کشسان با استفاده از چگالی انرژی کششی $U = U(\varepsilon, \chi)$ نشان داده می‌شود:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial U}{\partial \chi}. \quad (۷-۹۰)$$

برای پوسته همگن U دارای شکل درجه دوم از متغیرها است:

$$\begin{aligned} 2U = & \alpha_1 \text{tr}^2 \varepsilon + \alpha_2 \text{tr} \varepsilon^2 + \alpha_3 \text{tr}(\tilde{\varepsilon} \cdot \tilde{\varepsilon}^T) + \alpha_4 \mathbf{n} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{n} \\ & + \beta_1 \text{tr}^2 \chi + \beta_2 \text{tr} \tilde{\chi}^2 + \beta_3 \text{tr}(\tilde{\chi} \cdot \tilde{\chi}^T) + \beta_4 \mathbf{n} \cdot \chi \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (۷-۹۱)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \mathbf{A}, \quad \tilde{\chi} = \chi \cdot \mathbf{A},$$

در اینجا α_k و β_k ($k = 1, 2, 3, 4$) مدول‌های کشسانی هستند. با جایگذاری (۷-۹۱) در (۷-۹۰) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \alpha_1 \mathbf{A} \text{tr} \varepsilon + \alpha_2 \tilde{\varepsilon}^T + \alpha_3 \tilde{\varepsilon} + \alpha_4 (\varepsilon \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \\ \mathbf{M} = & \beta_1 \mathbf{A} \text{tr} \chi + \beta_2 \tilde{\chi}^T + \beta_3 \tilde{\chi} + \beta_4 (\chi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (۷-۹۲)$$

معادلات (۷-۸۶) - (۷-۸۸) و (۷-۹۲) مساله مقدار مرزی خطی با توجه با میدان‌های جابه‌جایی و میکرو دوران را بیان می‌کند که تشریح کننده تعادل پوسته میکروسطح در حالت تغییر شکل کوچک هستند. برای مسایل دینامیکی، معادله (۷-۸۵) جایگزین (۷-۸۶) می‌شود. قضیه پوسته رایسنر را می‌توان با در نظر گرفتن برخی فرضیات تکمیل کننده به صورت نتیجه‌ای از قضیه میکروسطح در نظر گرفت.

همانند دیگر نظریات پوسته می‌توان برخی اصول وردشی را فرمول‌بندی کرد. اصل وردشی لاگرانژ برای پوسته میکروسطح کشسان از فرمول تابعی انرژی کل به دست می‌آید:

$$E(\mathbf{v}, \mathcal{G}) = \int_{\Sigma} U(\varepsilon, \chi) d\Sigma - A(\mathbf{v}, \mathcal{G}), \quad (93-7)$$

که پتانسیل نیروهای خارجی $A(\mathbf{v}, \mathcal{G})$ برابر است با:

$$A(\mathbf{v}, \mathcal{G}) = \int_{\Sigma} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \mathcal{G}) d\Sigma + \int_{\omega_2} \varphi \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\omega_4} \ell \cdot \mathcal{G} ds.$$

تابعی $E(\mathbf{v}, \mathcal{G})$ روی مجموعه‌ای از میدان‌های متغیر به شدت پیوسته جابه‌جایی و میکرو دوران‌ها که (۷-۸۷) را ارضاء می‌کنند، در نظر گرفته می‌شود. جفت $(\mathbf{v}, \mathcal{G})$ که (۷-۸۶) و (۷-۸۸) را ارضاء می‌کند، نقطه پایدار $E(\mathbf{v}, \mathcal{G})$ است. اگر اصل پایداری لاگرانژ روی جواب تعادل کمینه باشد، تابعی (۷-۹۳) به حالت کمینه خود می‌رسد.

اکنون اصل وردشی ریلی به صورت زیر به دست می‌آید.

روی مجموعه‌ای از توابع با شرایط مرزی $\mathbf{v}|_{\omega_1} = 0$, $\mathcal{G}|_{\omega_3} = 0$ که از قید زیر پیروی می‌کند:

$$K(\mathbf{v}^0, \mathcal{G}^0) \equiv \int_{\Sigma} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}^0 \cdot \Theta_1 \cdot \mathcal{G}^0 + \frac{1}{2} \mathcal{G}^0 \cdot \Theta_2 \cdot \mathcal{G}^0 \right) d\Sigma = 1,$$

مدهای ویژه نوسانی پوسته به صورت نقاط پایداری از تابعی انرژی کششی زیر هستند:

$$E(\mathbf{v}^0, \mathcal{G}^0) \equiv \int_{\Sigma} U(\varepsilon^0, \chi^0) d\Sigma, \quad (94-7)$$

که $\chi^0 = \tilde{\nabla} \mathcal{G}^0$ و $\varepsilon^0 = \tilde{\nabla} \mathbf{v}^0 + \mathbf{A} \times \mathcal{G}^0$.

اصل ریلی را نیز می‌توان به صورت دیگری بیان کرد: روی مجموعه‌ای از توابع که تحت قیود ارضاء می‌شوند، نقاط پایداری E برابر مدهای ویژه نوسانی هستند. در اینجا $\mathbf{v}^0$ و $\mathcal{G}^0$ اندازه‌های نوسانات جابه‌جایی و میکروسطح‌ها هستند که همانند جواب‌های مساله ویژه نوسانی به شکل $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 e^{i\omega t}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 e^{i\omega t}$ نمایش داده می‌شوند. خارج قسمت ریلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R(\mathbf{v}^0, \mathcal{G}^0) = \frac{E(\mathbf{v}^0, \mathcal{G}^0)}{K(\mathbf{v}^0, \mathcal{G}^0)}.$$

اکنون کوچکترین ویژه بسامد پوسته که کمترین بسامد است با کمینه مقدار تابعی R برابر است.

در نهایت می‌خواهیم این موضوع را تکرار کنیم که برعکس وضعیت کشسانی خطی، قضیه پوسته هنوز قابل گسترش است، علاقمندان پیوسته در جستجوی مدل‌ها و روش‌های عددی بهتر برای حل مسایل عملی هستند. هنگامی که کسی با استفاده از یک جواب از مدل‌های دوبعدی قضیه پوسته، مساله مشابهی را حل کند، این موضوع می‌تواند منجر به این حقیقت شود که شاید بتوان تقریب دقیقی برای مساله کشسانی سه بعدی با تمام جزئیات پیدا کرد.

پیوست: فرمول‌ها

برای راحتی، فرمول‌های به‌دست آمده در هر فصل را فهرست می‌کنیم. نماد $\forall$ (که "برای همه" یا برای هر خوانده می‌شود) دلالت بر سور عمومی دارد.

فصل ۱

ضرب نقطه‌ای

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

ضرب خارجی

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ضرب سه‌گانه عددی

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

فصل ۲

پایه متقابل (دوگان)

نماد دلتای کرونکر

$$\partial_j^i = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

تعریف پایه متقابل

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = \partial_j^i$$

مولفه‌های بردار

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}^i \quad \begin{aligned} x^i &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i \\ x_i &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

روابط بین پایه‌های دوگان

$$\mathbf{e}^i = \frac{1}{V} (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \quad \mathbf{e}_i = \frac{1}{V'} (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k)$$

جایی که

$$(i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ یا } (2, 3, 1) \text{ یا } (3, 1, 2)$$

و

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \\ V' &= \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3) \end{aligned} \quad V' = 1/V$$

ضرایب متریک

$$\begin{aligned} g^{jq} &= \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^q \\ g_{ip} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_p \end{aligned} \quad g_{ij} g^{jk} = \partial_i^k$$

در چارچوب‌های دکارتی

$$g_{ij} = \partial_i^j \quad g^{ij} = \partial_j^i$$

ضرب‌های نقطه‌ای در پایه‌های مرکب و غیرمرکب

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a_i b_j g^{ij} = a^i b_i = a_i b^i$$

بالا بردن و پایین بردن اندیس‌ها

$$x_j = x^i g_{ij} \quad x^i = x_j g^{ij}$$

انتقال چارچوب

معادلات تبدیل

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= A_i^j \tilde{\mathbf{e}}_j & A_i^j &= \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}^j \\ \tilde{\mathbf{e}}_i &= \tilde{A}_i^j \mathbf{e}_j & \tilde{A}_i^j &= \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}^j \end{aligned}$$

جایی که

$$\tilde{A}_i^j A_j^k = A_i^j \tilde{A}_j^k = \partial_i^k$$

مولفه های بردار و قوانین تبدیل

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x^i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}^i = \tilde{x}^i \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{x}_i \tilde{\mathbf{e}}^i \\ \tilde{x}^i &= A_j^i x^j & x^i &= \tilde{A}_j^i \tilde{x}^j \\ \tilde{x}_i &= \tilde{A}_i^j x_j & x_i &= A_i^j \tilde{x}_j \end{aligned}$$

متفرقه

نماد جایگشت (لوی-چیویتا)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) &= \begin{cases} +V & \text{جایگشت زوجی از } (1,2,3) \\ -V & \text{جایگشت فردی از } (1,2,3) \\ 0 & \text{دو یا چند اندیس مساوی} \end{cases} \\ \varepsilon^{ijk} = \mathbf{e}^i \cdot (\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k) &= \begin{cases} +V' & \text{جایگشت زوجی از } (1,2,3) \\ -V' & \text{جایگشت فردی از } (1,2,3) \\ 0 & \text{دو یا چند اندیس مساوی} \end{cases} \end{aligned}$$

اتحادهای مفید

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{pqr} = \begin{vmatrix} \partial_i^p & \partial_i^q & \partial_i^r \\ \partial_j^p & \partial_j^q & \partial_j^r \\ \partial_k^p & \partial_k^q & \partial_k^r \end{vmatrix} \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{pqr} = \partial_i^p \partial_j^q \partial_k^r - \partial_i^q \partial_j^p \partial_k^r$$

دترمینان از ماتریس گرام

$$V^2 = \det [g_{ij}]$$

ضرب خارجی

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}^i \varepsilon_{ijk} a^j b^k = \mathbf{e}_i \varepsilon^{ijk} a_j b_k$$

فصل سوم

ضرب دوتایی

ویژگی ها

$$(\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b) = \lambda(a \otimes b)$$

$$(a + b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c$$

$$a \otimes (b + c) = a \otimes b + a \otimes c$$

ضرب نقطه‌ای دوتایی با بردار

$$ab.c = (b.c)a$$

$$c.(ab) = (c.a)b$$

تانسورها از دید عملگر

برابری تانسورها

$$A = B \Leftrightarrow \forall x, A.x = B.x$$

مولفه‌ها

$$a^{ij} = e^i . A . e^j$$

$$a_{ij} = e_i . A . e_j$$

$$a^i_j = e^i . A . e_j$$

$$a_i^j = e_i . A . e^j$$

تعریف جمع $A + B$

$$\forall x, (A + B).x = A.x + B.x$$

تعریف عددی چندگانه cA

$$\forall x, (cA).x = c(A.x)$$

تعریف ضرب نقطه‌ای $A.B$

$$(A.B).x = A.(B.x)$$

تعریف پیش ضرب $y.A$

$$\forall x, (y.A).x = y.(A.x)$$

تعریف تانسور واحد E

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{x}$$

مولفه‌های تانسور واحد

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$$

تانسور معکوس

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

تانسو غیرمفرد $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

دترمینان تانسور

$$\det \mathbf{A} = |a_i^j| = |a_{.m}^k| = \frac{1}{g} |a_{st}| = g |a^{pq}|$$

$$= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{mnp} a_m^i a_n^j a_p^k$$

مولفه‌های دوتایی تحت تبدیل

تبدیل به پایه متقابل

$$a_{km} = a^{ij} g_{ki} g_{jm}$$

تبدیل‌های کلی تر

$$\mathbf{e}_i = A_i^j \tilde{\mathbf{e}}_j \Rightarrow \tilde{a}^{ij} = a^{km} A_k^i A_m^j$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{A}_i^j \mathbf{e}_j \Rightarrow a^{ij} = \tilde{a}^{km} \tilde{A}_k^i \tilde{A}_m^j$$

$$A_j^k \tilde{A}_k^i = \delta_j^i$$

$$\mathbf{A} = \tilde{a}^{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{a}_{kl} \tilde{\mathbf{e}}^k \tilde{\mathbf{e}}^l = \tilde{a}_i^j \tilde{\mathbf{e}}^i \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{a}_{.l}^k \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}^l$$

$$= a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{kl} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^l = a_i^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = a_{.l}^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^l$$

جایی که

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}^{ij} &= A_k^i A_l^j a^{kl} & a^{ij} &= \tilde{A}_k^i \tilde{A}_l^j \tilde{a}^{kl} \\
 \tilde{a}_{ij} &= \tilde{A}_i^k \tilde{A}_j^l a_{kl} & a_{ij} &= A_i^k A_j^l \tilde{a}_{kl} \\
 \tilde{a}_i^j &= A_k^i \tilde{A}_j^k a_i^k & a_i^j &= \tilde{A}_i^k A_j^k \tilde{a}_i^k \\
 \tilde{a}_i^j &= \tilde{A}_i^k A_l^j a_k^l & a_i^j &= A_i^k \tilde{A}_l^j \tilde{a}_k^l
 \end{aligned}$$

عملگرهای دوگانه بیشتر

ضرب نقطه‌ای

$$\begin{aligned}
 \mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{ad} \\
 \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) &= \lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + \mu \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \\
 (\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} &= \lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + \mu \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

ضرب نقطه‌ای دوگانه

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$$

ضرب عددی تانسورهای مرتبه دوم

$$\mathbf{ab} \bullet \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$$

مباحث تانسورهای مرتبه دوم

ترانپاده

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^T &= a^{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{ji} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = a_{ji}^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = a_j^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \\
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^T \\
 (\mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A} \\
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{A}^{-1} &= (\det \mathbf{A})^{-1} & (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\
 (\mathbf{A}^T)^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1})^T & (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

توان‌های بالاتر تانسور

$$\begin{aligned}
 n = 1, 2, 3, \dots \quad \mathbf{A}^n &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{n-1} & \mathbf{A}^0 &= \mathbf{E} \\
 n = 2, 3, 4, \dots \quad \mathbf{A}^{-n} &= \mathbf{A}^{-n+1} \cdot \mathbf{A}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots$$

تانسورهای متقارن و پادمتقارن

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad \text{متقارن:}$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \text{پادمتقارن:}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

جفت ویژه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

فرمول‌های پایایی و بیسته

$$I_1(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr} \mathbf{A}$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{2} [\text{tr}^2 \mathbf{A} - \text{tr} \mathbf{A}^2]$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det \mathbf{A}$$

تانسور متعامد

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}$$

تجزیه قطبی

$\mathbf{Q}$ متعامد

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}$$

$\mathbf{S}, \mathbf{S}'$ معین مثبت و متقارن

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}'$$

فصل ۴

میدان‌های برداری

بعضی از قوانین مشتق‌گیری توابع برداری

$$\frac{d(e_1(t) + e_2(t))}{dt} = \frac{de_1(t)}{dt} + \frac{de_2(t)}{dt}$$

$$\frac{d(ce(t))}{dt} = c \frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{d(f(t)e(t))}{dt} = \frac{df(t)}{dt}e(t) + f(t)\frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(e_1(t) \cdot e_2(t)) = e'_1(t) \cdot e_2(t) + e_1(t) \cdot e'_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}(e_1(t) \times e_2(t)) = e'_1(t) \times e_2(t) + e_1(t) \times e'_2(t)$$

9

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[e_1(t), e_2(t), e_3(t)] &= [e'_1(t), e_2(t), e_3(t)] \\ &+ [e_1(t), e'_2(t), e_3(t)] \\ &+ [e_1(t), e_2(t), e'_3(t)] \end{aligned}$$

جایی که

$$[e_1(t), e_2(t), e_3(t)] = (e_1(t) \times e_2(t)) \cdot e_3(t)$$

بردارهای مماس به خطوط مختصاتی

$$r_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

ژاکوبی

$$\sqrt{g} = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = \left| \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial q^j} \right|$$

تعریف نقطه‌ای پایه متقابل

$$\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j = \partial_j^i$$

تعریف ضرایب متریک

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$$

$$g^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j$$

$$g_i^j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j = \partial_i^j$$

قوانین تبدیل

$$\mathbf{r}_i = A_i^j \tilde{\mathbf{r}}_j \qquad A_i^j = r^i \frac{\partial \tilde{q}^j}{\partial q^i}$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \tilde{A}_i^j \mathbf{r}_j \qquad \tilde{A}_i^j = r^i \frac{\partial q^j}{\partial \tilde{q}^i}$$

$$\tilde{f}^i = A_j^i f^j \qquad \tilde{f}_i = \tilde{A}_j^i f_j \qquad f^i = \tilde{A}_j^i \tilde{f}^j \qquad f_i = A_j^i \tilde{f}_j$$

دیفرانسیل و عملگر نابلا

فرم‌های متریک

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{ij} dq^i dq^j$$

عملگر نابلا

$$\nabla = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$$

گرادیان تابع برداری

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f}^T \cdot d\mathbf{r}$$

دیورژانس (واگرایی) بردار

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i}$$

دوران و چرخش (کرل) بردار

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i} \quad \omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{f}$$

دیورژانس و دوران از تانسور مرتبه دوم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{A} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{A}$$

دیفرانسیل تابع برداری

ضرایب کریستوفل نوع دوم

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k \quad \frac{\partial \mathbf{r}^j}{\partial q^i} = -\Gamma_{it}^j \mathbf{r}^t$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

ضرایب کریستوفل از نوع اول

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{it}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^t} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^t} \right) = \Gamma_{ijt}$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$$

دیفرانسیل گیری همورد

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^k \nabla_i \mathbf{f}_k = \mathbf{r}_j \nabla_i \mathbf{f}^j$$

$$\nabla_k f_i = \frac{\partial f_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^j f_j \quad \nabla_k f^i = \frac{\partial f^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kt}^i f^t$$

$$\nabla \mathbf{f} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \nabla_i \mathbf{f}_j = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j \nabla_i \mathbf{f}^j$$

دیفرانسیل گیری همورد تانسور مرتبه دوم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q^k} \mathbf{A} &= \nabla_K a^{ij} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j = \nabla_K a_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j = \nabla_K a_i^j \mathbf{r}^i \mathbf{r}_j = \nabla_K a_{.j}^i \mathbf{r}_i \mathbf{r}^j \\ \nabla_k a^{ij} &= \frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a^{sj} + \Gamma_{ks}^j a^{is} & \nabla_k a_{ij} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_{sj} - \Gamma_{kj}^s a_{is} \\ \nabla_k a_i^j &= \frac{\partial a_i^j}{\partial q^k} - \Gamma_{ki}^s a_s^j + \Gamma_{ks}^j a_i^s & \nabla_k a_{.j}^i &= \frac{\partial a_{.j}^i}{\partial q^k} + \Gamma_{ks}^i a_{.j}^s - \Gamma_{kj}^s a_{.s}^i\end{aligned}$$

عملگرهای دیفرانسیل

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} &= \mathbf{r}_k \varepsilon^{ijk} \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial q^i} \\ \Gamma_{in}^i &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^n} \\ \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} f^i) \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \varepsilon^{kin} \mathbf{r}_n \frac{\partial}{\partial q^k} (\mathbf{r}^j a_{ij}) \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} a^{ij} \mathbf{r}_j) \\ \nabla^2 f &= \nabla \cdot \nabla f = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial q^k} \right) \\ \nabla^2 f &= \nabla^j \nabla_j f & \nabla^j &= g^{ij} \nabla_i \\ \nabla^2 \mathbf{f} &= \mathbf{r}_j \nabla^i \nabla_i f^j \\ \nabla \nabla \cdot \mathbf{f} &= \mathbf{r}^i \nabla_i \nabla_j f^j \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{f} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{f} - \nabla^2 \mathbf{f}\end{aligned}$$

دستگاه‌های مختصات متعامد

ضرایب لامه

$$\begin{aligned}(H_i)^2 &= g_{ii} \\ \mathbf{r}^i &= \mathbf{r}_i / (H_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \hat{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{r}_i / H_i\end{aligned}$$

دیفرانسیل گیری در پایه متعامد

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{\hat{\mathbf{r}}_i}{H_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \\ \nabla \mathbf{f} &= \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial f_j}{\partial q^i} - \frac{f_i}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q^j} + \delta_{ij} \frac{f_k}{H_k} \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial q^k} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} (H_2 H_3 f_1) + \frac{\partial}{\partial q^2} (H_3 H_1 f_2) + \frac{\partial}{\partial q^3} (H_1 H_2 f_3) \right) \\ \nabla \times \mathbf{f} &= \frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{r}}_i \times \hat{\mathbf{r}}_j}{H_i H_j} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} (H_j f_j) - \frac{\partial}{\partial q^j} (H_i f_i) \right) \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q^1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q^3} \right) \right]\end{aligned}$$

فرمول‌های انتگرال

تبدیل انتگرال چندگانه

$$\begin{aligned}\int_V f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_V f(q^1, q^2, q^3) J dq^1 dq^2 dq^3 \\ J &= \sqrt{g} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q^j} \right|\end{aligned}$$

انتگرال گیری جزء به جزء

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_k} g dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_V \frac{\partial g}{\partial x_k} f dx_1 dx_2 dx_3 + \int_S f g n_k dS$$

نتایج متفرقه

$$\begin{aligned} \int_V \nabla f dV &= \int_S f \mathbf{n} dS & \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV &= \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dS \\ \int_V \nabla \mathbf{f} dV &= \int_S \mathbf{n} \mathbf{f} dS & \int_V \nabla \times \mathbf{f} dV &= \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \mathbf{A} dV &= \int_S \mathbf{n} \mathbf{A} dS \\ \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS \\ \int_V \nabla \times \mathbf{A} dV &= \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{f} d\mathbf{r} &= \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{f} dS \\ \oint_{\Gamma} dr \cdot \mathbf{A} &= \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} dS \\ \oint_{\Gamma} \mathbf{A} dr &= \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A}^T dS \end{aligned}$$

فصل ۵

نظریه مقدماتی از خم‌ها

پارامتری کردن

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \text{یا} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

طول

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

مماس یکه

$$\tau(s) = \mathbf{r}'(s)$$

معادله خط مماس

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \mathbf{r}'(t_0)$$

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

خمیدگی

$$k_1 = |\mathbf{r}''(s)| \quad k_1^2 = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))^2}{(\mathbf{r}'^2(t))^3}$$

شعاع خمیدگی

$$R = 1/k_1$$

قائم اصلی و دوم

$$\nu = \frac{\mathbf{r}''(s)}{k_1} \quad \beta = \tau \times \nu$$

صفحه بوسان

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}(s_0)] \cdot \beta(s_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) & z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

تاب

$$k_2 = -\frac{(\mathbf{r}''(s) \times \mathbf{r}''(s)).\mathbf{r}''(s)}{k_1^2} \quad k_2 = -\frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)).\mathbf{r}'''(t)}{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))^2}$$

معادلات سره-فرنه

$$\begin{aligned} \tau' &= k_1 \nu \\ \nu' &= -k_1 \tau - k_2 \beta \\ \beta' &= k_2 \nu \end{aligned}$$

نظریه رویه‌ها

پارامتری کردن

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

بردارهای مماس، قائم یک‌ه

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \quad (i=1,2) \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \end{aligned}$$

اولین فرم بنیادی

$$(ds)^2 = g_{ij} du^i du^j = E(du^1)^2 + 2F du^1 du^2 + G(du^2)^2$$

$$E = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 \quad F = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad G = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2$$

تعاملد خم‌ها

$$E du^1 d\tilde{u}^1 + F(du^1 d\tilde{u}^2 + du^2 d\tilde{u}^1) + G du^2 d\tilde{u}^2 = 0$$

مساحت

$$S = \int_A \sqrt{EG - F^2} du^1 du^2$$

دومین فرم بنیادی

$$d^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = L (du^1)^2 + 2M du^1 du^2 + N (du^2)^2 = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}$$

$$L = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{(\partial u^1)^2} \cdot \mathbf{n} \quad M = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^1 \partial u^2} \cdot \mathbf{n} \quad N = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{(\partial u^2)^2} \cdot \mathbf{n}$$

خمیدگی قائم، خمیدگی میانه، خمیدگی گاوسی

$$\mathbf{n} \text{ یا } \nu = \text{زاویه بین } \nu \text{ و } \mathbf{n} \quad k_0 = k_1 \cos \vartheta$$

$$H = \frac{1}{2} (k_{\min} + k_{\max}) = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

$$K = k_{\min} k_{\max} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

رویه‌ی داده شده $z = f(x, y)$ در مختصات دکارتی

اندیس‌های x, y به ترتیب دلالت بر مشتقات جزئی نسبت به x, y دارند.

$$\begin{aligned} E &= 1 + f_x^2 & F &= f_x f_y & G &= 1 + f_y^2 \\ EG - F^2 &= 1 + f_x^2 + f_y^2 & S &= \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \\ \mathbf{n} &= \frac{-f_x \mathbf{i}_1 - f_y \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \end{aligned}$$

$$L = \mathbf{r}_{xx} \cdot \mathbf{n} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$M = \mathbf{r}_{xy} \cdot \mathbf{n} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$N = \mathbf{r}_{yy} \cdot \mathbf{n} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}$$

رویه حاصل از دوران حول محور z

$$x = \phi(u) \quad z = \psi(u)$$

$$(ds)^2 = (\phi'^2 + \psi'^2) du^2 + \phi^2 dv^2$$

$$-d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\psi''\phi' - \phi''\psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}} du^2 + \frac{\psi'\phi}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}} dv^2$$

عملگر گرادیان رویه و قضیه‌های گوس_استراگراسکی

عملگر گرادیان رویه

$$\tilde{\nabla} = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (i=1,2)$$

رویه مشابه با قضیه گوس_استراگراسکی (دیورژانس)

$$\int_S (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{X} + 2H \mathbf{n} \cdot \mathbf{X}) dS = \oint_{\Gamma} \nu \cdot \mathbf{X} ds$$

$$\int_S (\tilde{\nabla} \mathbf{X} + 2H \mathbf{n} \mathbf{X}) dS = \oint_{\Gamma} \nu \mathbf{X} ds$$

$$\int_S (\tilde{\nabla} \times \mathbf{X} + 2H \mathbf{n} \times \mathbf{X}) dS = \oint_{\Gamma} \nu \times \mathbf{X} ds$$

$$\int_S \tilde{\nabla} \times (\mathbf{n} \mathbf{X}) dS = \oint_{\Gamma} \tau \mathbf{X} ds$$

فصل ۶

تانسور تنش

رابطه میان تانسور و بردار تنش

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

معادلات تعادل و حرکت

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}$$

تانسور کشش

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

سازگاری شرایط تغییر شکل

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T = \mathbf{0}$$

قانون هوک

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \begin{aligned} c_{ijmn} &= c_{jimn} = c_{ijnm} \\ c_{ijmn} &= c_{mnij} \end{aligned}$$

مواد ایزوتروپ

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{E} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

تجدید محاسبه مدول کشسان برای جسم ایزوتروپ

مدول	λ, μ	k, μ	μ, ν	E, ν	E, μ
λ	λ	$k - \frac{2}{3}\mu$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{(E-2\mu)\mu}{3\mu-E}$
$\mu = G$	μ	μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ
k	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	k	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E\mu}{3(3\mu-E)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{9k\mu}{3k+\mu}$	$2\mu(1+\nu)$	E	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3k-2\mu}{6k+2\mu}$	ν	ν	$\frac{1}{2} \frac{E}{\mu} - 1$

معادلات اصلی در مختصات دکارتی

معادلات حرکت

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

کشش

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$$

معادلات اصلی در دستگاه مختصات منحنی الخط

معادلات حرکت

$$\frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{g} \sigma^{ij}) + \Gamma_{mn}^j \sigma^{mn} + \rho \sqrt{g} f^j = \rho \sqrt{g} \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}$$

کشش

$$\varepsilon = \varepsilon_{st} \mathbf{r}^s \mathbf{r}^t \quad \varepsilon_{st} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial q_t} + \frac{\partial u_t}{\partial q_s} \right) - \Gamma_{st}^r u_r$$

معادلات اصلی در مختصات استوانه‌ای

معادلات حرکت

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{z\phi}}{\partial z} + \rho f_\phi = \rho \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

کشش

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{\phi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

معادلات تعادل سکون در جابه‌جایی‌ها

$$\begin{aligned} & \mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \rho f_r = 0 \\ & \mu \left(\Delta u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right) \\ & + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \rho f_\phi = 0 \\ & \mu \Delta u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \rho f_z = 0 \end{aligned}$$

جایی که

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

معادلات اصلی در مختصات کروی

معادلات حرکت

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} \\ & + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} \\ & + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\theta\phi} \cot \theta) + \rho f_\phi = \rho \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} \\ & + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}] + \rho f_\theta = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

کشش

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{\theta\phi} &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} - u_\phi \cot \theta \right) \\ \varepsilon_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned}$$

معادلات تعادل در جابه‌جایی‌ها

$$\begin{aligned}
& \mu \left\{ \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \left[u_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \right\} \\
& + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho f_r = 0 \\
& \mu \left\{ \Delta u_\theta - \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} u_\theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] \right\} \\
& + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho f_\theta = 0 \\
& \mu \left\{ \Delta u_\phi - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \cot \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{2 \sin \theta} \right] \right\} \\
& + \frac{\lambda + \mu}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho f_\phi = 0
\end{aligned}$$

جایی که

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

فصل ۷

فرمول‌های نظریه رویه

بردار مکان میانه رویه و بردارهای پایه

$$\rho = \rho(q^1, q^2)$$

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial q^1}$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \rho}{\partial q^2}$$

$$\rho_\alpha \cdot \rho^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

بردار قائم میانه رویه

$$\mathbf{n} = \frac{\rho_1 \times \rho_2}{|\rho_1 \times \rho_2|}$$

تانسور متریک

$$\mathbf{A} = \rho^\alpha \rho_\alpha = \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}$$

عملگر نابلا

$$\tilde{\nabla} = \rho^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}$$

تانسور خمیدگی

$$\mathbf{B} = b_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta = -\tilde{\nabla} \mathbf{n}$$

مشتقات ρ^α و ρ_α

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \rho_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} \quad \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial q^\beta} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \rho^\gamma + b_\beta^\alpha \mathbf{n}$$

گرادیان بردار $\mathbf{v}$

$$\tilde{\nabla} \mathbf{v} = (\tilde{\nabla} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} - \omega \mathbf{B} + (\tilde{\nabla} \omega + \mathbf{B} \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{n}$$

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \omega \mathbf{n}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \nu_1(q^1, q^2) \rho^1 + \nu_2(q^1, q^2) \rho^2$$

$$\omega = \nu_3 = \nu^3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

دیورژانس تانسور مرتبه دوم $\mathbf{T}$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} &= \rho^\gamma \frac{\partial}{\partial q^\gamma} \cdot (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta + T^{3\beta} \mathbf{n} \rho_\beta + T^{\alpha 3} \rho_\alpha \mathbf{n} + T^{33} \mathbf{n} \mathbf{n}) \\ &= \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \rho_\beta + T^{\alpha\beta} \rho^\gamma \cdot \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial q^\gamma} \rho_\beta + T^{\alpha\beta} \frac{\partial \rho_\beta}{\partial q^\alpha} + T^{3\beta} \rho^\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\gamma} \rho_\beta \\ &\quad + T^{33} \rho^\gamma \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\gamma} \mathbf{n} + \frac{\partial T^{\alpha 3}}{\partial q^\alpha} \mathbf{n} + T^{\alpha 3} \rho^\gamma \cdot \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial q^\gamma} \mathbf{n} + T^{\alpha 3} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} \\ &= \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} \rho + T^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma \rho_\beta + T^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \rho_\gamma + T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \mathbf{n} - T^{3\beta} b_\gamma^\gamma \rho_\beta \\ &\quad - T^{33} b_\gamma^\gamma \mathbf{n} + \frac{\partial T^{\alpha 3}}{\partial q^\alpha} \mathbf{n} + T^{\alpha 3} \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma \mathbf{n} - T^{\alpha 3} b_\alpha^\beta \rho_\beta \end{aligned}$$

حرکت شناسی در همسایگی پوسته میانه روبه

بردار مکان

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, z) = \rho(q^1, q^2) + z \mathbf{n}$$

بردارهای پایه

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = \rho_\alpha + z \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^\alpha} = (\mathbf{A} - z \mathbf{B}) \cdot \rho_\alpha$$

$$\mathbf{r}^\alpha = (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot \rho^\alpha$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}^3 = \mathbf{n}$$

عملگر فضایی نابلا

$$\nabla = \mathbf{r}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z} = (\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot \tilde{\nabla} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial z}$$

معادلات تعادل پوسته

برایند تانسور تنش و زوج تانسور تنش

$$\mathbf{T} = \left[(\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right]$$

$$\mathbf{M} = - \left[(\mathbf{A} - z \mathbf{B})^{-1} \cdot z \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n} \right]$$

جایی که

$$f = \int_{-h/2}^{h/2} G f dz$$

معادلات تعادل

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \mathbf{T}_x = \rho_\alpha \times \left[\boldsymbol{\sigma}^\alpha \right]$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{r}^\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

اندازه کشش

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[(\tilde{\nabla} \pi \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}})^T \right] - \omega \mathbf{B}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \left((\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}}) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{G}})^T \right)$$

ساختن معادلات پوسته کریشهف-لاو

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{A} \text{tr} \varepsilon \right]$$

$$\mathbf{M} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left[\varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{A} \text{tr} \varepsilon \right] \times \mathbf{n}$$

نمایش مولفه‌ای

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta \quad \varepsilon = \varepsilon_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta$$

$$M_{\alpha\beta} = -M_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta \times n \quad \varepsilon = \varepsilon_{\alpha\beta} \rho^\alpha \rho^\beta$$

$$T_{\alpha\beta} = \left[\sigma_{\alpha\beta} \right] = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz$$

$$M_{\alpha\beta} = \left[z \sigma_{\alpha\beta} \right] = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha\beta} dz$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} a_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma}^{\gamma} \right]$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} a_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma}^{\gamma} \right]$$

چگالی انرژی پیوسته رویه

$$U = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\varepsilon \cdots \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right] + \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left[\varepsilon \cdots \varepsilon + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}^2 \varepsilon \right]$$

شرایط مرزی اصلی معمول

(۱) لبه‌ی (ثابت) گیره‌دار

$$\mathbf{v}|_{\omega} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu} \Big|_{\omega} = 0$$

(۲) لبه‌ی ساده تکیه‌گاه

$$\mathbf{v}|_{\omega} = \mathbf{0}$$

$$\nu \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \nu \Big|_{\omega} = 0$$

(۳) لبه‌ی آزاد

$$\nu \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \Big|_{\omega} = 0$$

$$\nu \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\omega} - \frac{\partial}{\partial s} (\nu \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \tau) \Big|_{\omega} = 0$$

$$\nu \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \nu \Big|_{\omega} = 0$$

انحنای صفحه

برآیند گشتاورها

$$M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22})$$

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2}$$

$$M_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11})$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2}$$

سختی خمیدگی

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

معادله تعادل

$$D\tilde{\nabla}^4\omega = q_n$$

معادلات تعادل در مختصات دکارتی

$$D\left(\frac{\partial^4\omega}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4\omega}{\partial x_2^4}\right) = q_n$$

منابع

Ciarlet Ph. G. 1988. *Mathematical Elasticity. Vol. I. Three-Dimensional Elasticity* (North-Holland, Amsterdam).

Ciarlet Ph. G. 1997. *Mathematical Elasticity. Vol. II. Theory of Plates* (North-Holland, Amsterdam).

Ciarlet, Ph.G. 2000. *Mathematical Elasticity. Vol. III. Theory of Shells* (North-Holland, Amsterdam).

Ciarlet Ph. G. 2005. *An Introduction to Differential Geometry with Application to Elasticity* (Springer, Dordrecht).

Chróścielewski J., Makowski J. and Pietraszkiewicz W. 2004. *Statyka i dynamika powłok wielopłatowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych* (Wydawnictwo IPPT PAN, Warszawa).

Cosserat E. and Cosserat F. 1909. *Théorie des corps déformables* (Herman et Fils, Paris). English translation: NASA TT F- 11, 567 (NASA, Washington, DC).

Danielson D. A. 1992. *Vectors and Tensors in Engineering and Physics* (Addison-Wesley, New York).

Donnell L. H. 1976. *Beams, Plates and Shells* (McGraw-Hill, New York).

Eremeyev V. A., and Zubov L. M. 2008. *Mechanics of Elastic Shells (in Russian)* (Nauka, Moscow).

Eringen A. C. 1999. *Microcontinuum Field Theory. I. Foundations and Solids* (Springer-Verlag, New York).

Green A. E., and Zerna W. 1954. *Theoretical Elasticity* (Clarendon Press, Oxford).

Goldenveizer A. L. 1976. *Theory of Thin Elastic Shells (in Russian)* (Moscow, Nauka).

Goodbody A. M. 1982. *Cartesian Tensors, with Applications to Mechanics, Fluid Mechanics, and Elasticity* (Halsted Press, Ellis Horwood, New York).

Heinbockel J. H. 2001. *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics* (Trafford Publishing, British Columbia, Canada).

Jeffreys H. 1931. *Cartesian Tensors* (Cambridge University Press, Cambridge, UK).

Kay D. C. 1988. *Tensor Calculus* (Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York).

Knowles J. 1997. *Linear Vector Spaces and Cartesian Tensors* (Oxford University Press, Oxford).

Koiter W. T. 1970. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. I. *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.* B73, 169-195.

Lebedev L. P., and Cloud M. J. 2003. *The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics* (World Scientific, Singapore).

Libai A., and Simmonds J. G. 1998. *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*, 2nd ed (Cambridge University Press, Cambridge, UK).

Lipschutz M. M. 1969. *Differential Geometry* (Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York).

Lurie A. I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*, Series in Applied Mathematics and Mechanics, 36 (North-Holland, Amsterdam).

Lurie A. I. 2005. *Theory of Elasticity* (Springer, Berlin).

McConnell A. 1957. *Application of Tensor Analysis* (Dover, New York).

Muskhelishvili N. I. 1966. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity; Fundamental Equations, Plane Theory of Elasticity, Torsion and Bending*, 5th ed. (in Russian), Nauka, Moscow. Transl. P. Noordhoff, Groningen, 1953 (Translation of the 3rd ed., Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, 1949).

- Naghdi P. 1972. *The Theory of Plates and Shells*. In: Flügge, S. (Ed.), *Handbuch der Physik*, Vol. VIa/2, Springer-Verlag, Berlin. pp. 425- 640.
- Novozhilov V. V., Chernykh K. Ph., and Mikhailovskiy E. M. 1991. *Linear Theory of Thin Shells (in Russian)* (Politechnika, Leningrad).
- Ogden R. W. 1997. *Non-Linear Elastic Deformations* (Dover, New York).
- O'Neill B. 1997. *Elementary Differential Geometry* (Academic Press, New York).
- Papastavridis J. 1998. *Tensor Calculus and Analytical Dynamics* (CRC Press, Boca Raton).
- Pogorelov A. V. 1957. *Differential Geometry*. Translated from the first Russian ed. by L. F. Boron (P. Noordhoff, Groningen).
- Rubin M. B. 2000. *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points* (Kluwer, Dordrecht).
- Simmonds, J. G. 1982. *A Brief on Tensor Analysis, 2nd ed* (Springer, New York).
- Schouten J. A. 1951. *Tensor Analysis for Physicists* (Clarendon Press, Oxford).
- Sokolnikoff I. S. 1994. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua* (Wiley, New York).
- Synge J., and Schild A. 1978. *Tensor Calculus* (Dover, New York).
- Timoshenko S. P., and Woinowsky-Krieger S. 1985. *Theory of Plates and Shells* (McGraw Hill, New York).
- Truesdell C., and Noll W. 2004. *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. 3rd ed (Springer, Berlin).
- Wang C. M., Reddy J. N., and Lee K. H. 2000. *Shear Deformable Beams and Shells* (Elsevier, Amsterdam).
- Vlasov V. Z. 1949. *General Theory of Shells and its Applications in Technics (in Russian)* (Moscow, Saint-Petersburg, Gostekhizdat).
- Vorovich I. I. 1999. *Nonlinear Theory of Shallow Shells* (Springer, New York).
- Wang C. C., and Truesdell C. 1973. *Introduction to Rational Elasticity* (Noordhoof Int. Publishing, Leyden).

Young E. 1993. *Vector and Tensor Analysis* (Marcel Dekker, New York).

Yosida K. 1980. *Functional Analysis* (Springer, Berlin).

Zhilin P. A. 2006. *Applied Mechanics. Foundations of the Theory of Shells (in Russian)* (St. Petersburg State Polytechnical University, St. Petersburg).

Zubov L. M., and Karyakin M. I. 2006. *Tensor Calculus (in Russian)* (Vuzovskaya Kniga, Moscow).

Zubov L. M. 1982. *Methods of Nonlinear Elasticity in the Theory of Shells (in Russian)* (Rostov State University, Rostov on Don).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

trace of	اثر
tensor(s)	تانسور (ها)
curvature tensor	تانسور خمیدگی
commutative tensors	تانسورهای تعویض‌پذیر
generalized orthogonality	تعامد تعمیم یافته
virtual displacement	جابجایی مجازی
even permutation	جابجشت زوج
odd permutation	جابجشت فرد
sum of tensors	جمع تانسورها
weak solution	جواب ضعیف
principal directions	جهت‌های اصلی
force density	چگالی نیرو
calculus of variations	حساب تغییرات
coordinate line	خط مختصات
lines of curvature	خطوط خمیدگی
curvature	خمیدگی
complete curvature	خمیدگی کامل
normal curvature	خمیدگی عمود
mean curvature	خمیدگی میانگین
dyad	دوتایی
rotation	دوران
second fundamental tensor	دومین تانسور اساسی

second curvature	دومین خمیدگی
second fundamental form	دومین فرم اساسی
covariant differentiation	دیفرانسیل هم ورد
eigenpair	زوج ویژه
extremal	زیاد(اکسترمال)
geodesic	ژئودزی
thin-walled structure	ساختار دیوار نازک
surface	سطح
level surface	سطح تراز
developable surface	سطح توسعه یافته
isometric surfaces	سطوح ایزومتریک
bending stiffness	سختی خمشی
wave velocity	سرعت موج
triads	سه تایی
boundary conditions	شرایط مرزی
static boundary conditions	شرایط مرزی استاتیک
mixed boundary conditions	شرایط مرزی ترکیبی
compatibility condition	شرط مقایسه پذیری
radius of curvature	شعاع خمیدگی
osculating plane	صفحه بوسان
plane stress	صفحه تنش
normal plane	صفحه عمود
surface analog	صفحه قیاسی
plane strain	صفحه کشش
rectifying plane	صفحه یکسو کننده
scalar product	ضرب اسکالر
cross product	ضرب خارجی
double dot product	ضرب دو نقطه‌ای
scalar triple product	ضرب سه گانه عددی
bulk modulus	ضریب فشردگی
dot product	ضرب نقطه‌ای

shear correction factor	عامل تصحیح برشی
principal normal	عمود اصلی
quotient law	قانون خارج قسمت
right-hand rule	قاعده دست راست
diagonalization	قطری سازی
curl	کرل (چرخش)
moving trihedron	کنج متحرک
gradient	گرادیان
surface gradient	گرادیان سطح
evolute	گسترده
torque	گشتاور
stress resultant	مبین تنش
transverse shear stress resultants	مبین‌های تنش متقاطع برشی
principal axes	محورهای اصلی
oblique coordinates	مختصات اریب
intrinsic coordinates	مختصات ذاتی
curvilinear coordinates	مختصات منحنی الخط
oscillation mode	مد نوسان
order of contact	مرتبه برخورد
plane elasticity problems	مسایل کشسان مسطح
covariant derivatives	مشتق‌های هم ورد
constitutive equations	معادلات ساختاری
dynamical equations	معادلات دینامیکی
natural equations	معادلات طبیعی
degenerate eigenvalue	مقدار ویژه تباهیده
multiple eigenvalue	مقدار ویژه چند گانه
parallel	موازی
plane wave	موج مسطح
generator	مولد
contravariant components	مولفه‌های پاورد
physical components	مولفه‌های فیزیکی

covariant components	مولفه‌های هم ورد
vector field	میدان بردار
solenoidal field	میدان لوله‌ای
minimizer	مینیمم کننده
meridian	نصف النهار
stationary point	نقطه ایستا
point of inflection	نقطه عطف
singular point	نقطه منفرد
permutation symbol	نماد جایگشتی
summation convention	نماد جمع
orthogonal representation	نمایش متعامد
eigenoscillation	نوسان ویژه‌ها
contact forces	نیروهای تماسی
body forces	نیروهای جسم
external forces	نیروهای خارجی
resultant force	نیروی مبین
divergence	واگرایی
plate	ورقه
cofactor	هم عامل

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

bending stiffness	سختی خمشی
body forces	نیروهای جسم
boundary conditions	شرایط مرزی
bulk modulus	ضریب فشردگی
calculus of variations	حساب تغییرات
cofactor	هم عامل
commutative tensors	تانسورهای تعویض پذیر
compatibility condition	شرط مقایسه پذیری
complete curvature	خمیدگی کامل
constitutive equations	معادلات ساختاری
contact forces	نیروهای تماسی
contravariant components	مولفه‌های پادورد
coordinate line	خط مختصات
covariant components	مولفه‌های هم ورد
covariant derivatives	مشتق‌های هم ورد
covariant differentiation	دیفرانسیل هم ورد
cross product	ضرب خارجی
curl	کرل (چرخش)
curvature	خمیدگی
curvature tensor	تانسور خمیدگی
curvilinear coordinates	مختصات منحنی الخط
degenerate eigenvalue	مقدار ویژه تباہیده

developable surface	سطح توسعه یافته
diagonalization	قطری سازی
divergence	واگرایی
dot product	ضرب نقطه‌ای
double dot product	ضرب دو نقطه‌ای
dyad	دوتایی
dynamical equations	معادلات دینامیکی
eigenoscillation	نوسان ویژه‌ها
eigenpair	زوج ویژه
even permutation	جایگشت زوج
evolute	گسترده
external forces	نیروهای خارجی
extremal	زیاد (اکسترمال)
force density	چگالی نیرو
surface analog	صفحه قیاسی
generalized orthogonality	تعامد تعمیم یافته
generator	مولد
geodesic	ژئودزی
gradient	گرادیان
intrinsic coordinates	مختصات ذاتی
isometric surfaces	سطوح ایزومتریک
level surface	سطح تراز
lines of curvature	خطوط خمیدگی
mean curvature	خمیدگی میانگین
meridian	نصف النهار
minimizer	مینیمم کننده
mixed boundary conditions	شرایط مرزی ترکیبی
moving trihedron	کنج متحرک
multiple eigenvalue	مقدار ویژه چند گانه
natural equations	معادلات طبیعی
normal curvature	خمیدگی عمود

normal plane	صفحه عمود
oblique coordinates	مختصات اریب
odd permutation	جایگشت فرد
order of contact	مرتبه برخورد
orthogonal representation	نمایش متعامد
oscillation mode	مد نوسان
osculating plane	صفحه بوسان
parallel	موازی
permutation symbol	نماد جایگشتی
physical components	مولفه های فیزیکی
plane elasticity problems	مسایل کشسان مسطح
plane strain	صفحه کشش
plane stress	صفحه تنش
plane wave	موج مسطح
plate	ورقه
point of inflection	نقطه عطف
principal axes	محورهای اصلی
principal directions	جهت‌های اصلی
principal normal	عمود اصلی
quotient law	قانون خارج قسمت
radius of curvature	شعاع خمیدگی
rectifying plane	صفحه یکسو کننده
resultant force	نیروی مبین
right-hand rule	قاعده دست راست
rotation	دوران
scalar product	ضرب اسکالر
scalar triple product	ضرب سه گانه عددی
second curvature	دومین خمیدگی
second fundamental form	دومین فرم اساسی
second fundamental tensor	دومین تانسور اساسی
shear correction factor	عامل تصحیح برشی

singular point	نقطه منفرد
solenoidal field	میدان لوله‌ای
static boundary conditions	شرایط مرزی استاتیک
stationary point	نقطه ایستا
stress resultant	مبین تنش
sum of tensors	جمع تانسورها
summation convention	نماد جمع
surface	سطح
surface gradient	گرادیان سطح
tensor(s)	تانسور (ها)
thin-walled structure	ساختار دیوار نازک
torque	گشتاور
trace of	اثر
transverse shear stress resultants	مبین‌های تنش متقاطع برشی
triads	سه تایی
vector field	میدان بردار
virtual displacement	جابجایی مجازی
wave velocity	سرعت موج
weak solution	جواب ضعیف

نمایه

- اتحاد لاگرانژ، ۲۶
اثر، ۵۹
ارشمیدس، ۱۴۳
اصل تغییر لاگرانژ، ۳۱۲
اصل دالامبر، ۲۲۱
اصول تغییرات لاگرانژ، ۴۷۵، ۳۵۲، ۳۳۹
اصل تغییر ریلگ، ۲۵۳
اقلیدس، ۱۴۳
امواج انبساطی، ۲۶۲
امواج برش، ۲۶۲
امواج صفحه، ۲۶۲
امواج طولی، ۲۶۲
امواج متقاطع، ۲۶۲
انتگرال گیری جزء به جزء، ۱۳۵
اندازه (نرم)، ۲۶
اندیس آزاد، ۱۵
اندیس بدلی، ۱۵
اندیس های بالا رو، ۱۸
اندیس های پایین رو، ۱۸
انرژی کششی، ۲۲۳
انرژی کل، ۲۳۸
اولین تانسور اساسی، ۲۷۵
اولین فرم اساسی، ۱۶۰
- ایزوتروپیک (همگن)، ۷۲، ۷۴
بردار، ۱
بردار داریوکس، ۱۵۷
بردار دوران متناهی، ۹۳
بردار مزدوج، ۵۰
بردار موج، ۲۶۲
بردار(ها) ضرب خارجی، ۲۴
بردار(ها) مولفه های پایا، ۲۳
بردار(ها) مولفه های ناپایا، ۲۳
بردارهای پایه واحد، ۱۰۳
پاد متقارن، ۴۹
پارامتر سازی طبیعی، ۱۹۸
پایه دوگان، ۱۲
پایه متقابل، ۱۲
پیمانه برشی، ۲۲۶
پیمانه لame، ۲۲۶
پیمانه یانگ، ۲۲۲، ۲۲۶
پیکربندی (ترکیب بندی)، ۲۰۹
پیکربندی اولیه، ۲۰۹
پیکربندی منابع، ۲۰۹
پیکربندی واقعی، ۲۰۹
پیش ضرب، ۳۶
پیوستگی، ۷۸

- تاب، ۱۵۱
 تابع مجاز، ۲۴۰
 تابعی (تابعگون)، ۲۳۹
 تابع ایزوتروپیک، ۶۷
 تانسور از مرتبه چهار، ۳
 تانسور از مرتبه دو، ۲
 تانسور تنش، ۲۱۱
 تانسور پادمتقارن، ۴۸
 تانسور جابجایی (تعویض پذیر)، ۹۲
 تانسور دوتایی تنش، ۲۸۵
 تانسور ریمان - کریستوفل، ۱۱۹
 تانسور صفر، ۳۶
 تانسور صوتی، ۲۶۱
 تانسور عملگر نقطه نظر، ۳۵
 تانسور قطری سازی، ۳۷
 تانسور کشش، ۲۱۸
 تانسور لوی - سیویتا، ۶۶
 تانسور گوی، ۶۳
 تانسور مبین تنش، ۲۸۳
 تانسور متریک، ۱۷
 تانسور متقارن، ۴۸
 تانسور متعامد، ۵۷
 تانسور معکوس، ۳۷
 تانسور معین مثبت، ۶۲
 تانسور منفرد (تکین)، ۳۸
 تانسور نامنفرد، ۳۸، ۶۲
 تانسور واحد، ۳۷
 تانسورهای برابر، ۳۵
 تجزیه قطبی، ۶۰
 تصویر دوتایی، ۳۴
 تقاطع گریبسیان، ۲۸۶
 جایگشت زوج، ۲۴
 جایگشت فرد، ۳۵
 جمع تانسورها، ۳۶
 جواب ضعیف، ۲۴۷
 حد، ۷۸
 خط مختصات، ۹۸
 خمیدگی عمود، ۱۷۳
 خمیدگی کامل، ۱۷۳
 خمیدگی گاوسی، ۱۷۳
 خمیدگی میانگین، ۱۷۳
 دترمینان، ۳۹
 دلتای کرونکر، ۱۳
 دوتایی، ۳۳
 دوران (چرخش)، ۱۱۱
 دومین خمیدگی، ۱۵۱
 دومین فرم اساسی، ۱۷۰
 دیدگاه فرضیات، ۳۷۴
 دیفرانسیل (مشق گیری) هم ورد، ۱۱۵
 روش ریتز، ۲۴۷
 زوج ویژه، ۵۰
 ژئودزی، ۱۶۵
 سختی، ۲۸۰
 سختی خمشی، ۳۰۸
 سطح تراز، ۱۶۰
 سطح توسعه پذیر، ۱۷۵
 سه تایی (تراياد)، ۶۴
 شرایط مرزی، ۲۹۷
 شرایط مرزی استاتیک، ۲۳۱
 شرایط مرزی ترکیبی، ۲۳۲
 شرایط مرزی جنبشی، ۲۳۱
 شعاع خمیدگی، ۱۵۰

- ۱۴۱، ۲۰۵، ۲۳۷
 قضیه موسینر، ۱۷۴
 قطری سازی، ۵۵
 کشش، ۲۸۶
 کنج (سه وجهی) متحرک، ۱۴۸
 گرادیان، ۱۱۱
 گرادیان سطح، ۱۷۹
 گسترده، ۱۸۶
 گشتاور، ۲۳
 لوی - سیویتا، ۶۶
 ماتریس گرام، ۱۸
 متعامد، ۵۸
 متقارن، ۴۸
 مشتق، ۸۱
 مشتق گاتیوکس، ۲۴۲
 مشتق‌های هم ورد، ۱۱۵
 میدان تانسور، ۹۷
 میدان بردار، ۹۷
 معادلات اوپلر، ۱۶۷
 معادلات بلترامی - مایکل، ۲۳۴
 معادلات تعادل، ۲۸۰
 معادلات دینامیکی، ۳۲۷
 معادلات ریسر، ۳۲۰
 معادلات طبیعی، ۱۹۸
 معادلات گرماین، ۳۰۸
 معادله دو هارمونیک، ۳۰۸
 معادله گرماین - لاگرانژ، ۳۰۸
 معکوس، ۳۷
 محورهای اصلی، ۵۵
 مختصات اریب، ۱۰۷
 مختصات منحنی الخط، ۹۸
- شناسه تانسوری، ۶۹
 صفحه اصلاح کننده، ۱۴۹
 صفحه بوسان، ۱۴۹
 صفحه عمود (قائم)، ۱۴۹
 صفحه کشش، ۳۶۰
 صفحه یکسو کننده، ۱۴۹
 صوتی، ۳۷۵
 ضرایب کریستوفل، ۱۱۴
 ضرایب لامه، ۱۳۰
 ضرب اسکالر (عددی)، ۴۶
 ضرب تانسور، ۳
 ضرب داخلی، ۷۵
 ضرب دو نقطه‌ای، ۴۵
 ضرب خارجی، ۲۴
 ضرب سه‌گانه عددی، ۵
 ضرب نقطه‌ای، ۴
 عملگر نابلا، ۱۰۸
 فرضیات کریشف، ۲۸۶
 فضای اقلیدسی، ۱۱۸
 فرضیات کریشف - لاو، ۳۰۱
 فرمول سزارو، ۲۲۱
 فرمول‌های استوکس، ۱۳۷
 فرمول‌های ویت، ۵۲
 قاعده دست راست، ۲۳
 قاعده وویگ، ۲۲۵
 قانون خارج قسمت، ۳۵
 قانون هوک تعمیم یافته، ۲۲۳
 قضیه تقابل بتی، ۲۳۶
 قضیه فرما، ۲۴۰
 قضیه کیلی - هامیلتون، ۷۱
 قضیه گاوس - استروگرادسکی،

مرتبه برخورد، ۱۸۴	نظریه پوسته ۶-پارامتری، ۳۲۷
معین مثبت، ۶۱	نظریه غیر کلاسیک، ۳۱۹
مقدار ویژه تباهیده، ۵۰	نظریه مرتبه بالا، ۳۲۴
مقدار ویژه چند گانه، ۵۰	نظریه مرتبه سوم، ۳۲۴
منفرد (تکین)، ۳۹	نظریه ورقه ریسنر، ۳۱۹
مولفه‌های پایا، ۲۲	نقطه ایستا (پایداری)، ۲۴۱
مولفه‌های ناپایا، ۲۲	نقطه منفرد (تکین)، ۱۴۷
مولفه‌های هم‌ورد، ۲۲	نماد جایگشتی، ۲۴
میان سطح، ۳۹۸	نماد جمع، ۱۴
میدان غیر چرخشی، ۱۲۴	نمایش متعامد، ۵۵
میدان لوله‌ای، ۱۲۶	نقطه عطف (بازگشت)، ۱۵۰
مینیمم کننده، ۱۶۶	نصف النهار، ۱۹۴
نامساوی شوارتز، ۷۷	واگرایی، ۱۱۱
نامساوی فریدریک، ۲۵۲	هم عامل، ۹۴
نامساوی کورن، ۲۵۱	یکه، ۳۷
نامنفرد، ۳۸، ۶۲	یکتایی جواب، ۳۱۸
نسبت پواسن، ۲۲۶	



Shahrekord University

Tensor Analysis with Applications in Mechanics

Authors

Leonid P. Lebedev

Michael J. Cloud

Victor A. Eremeyev

Translation

Ali Reza Naghipour

Mohammad Moradi

2015